

8.8 関数のグラフの座標軸及び原点に関する対称移動

xy 座標平面における関数 $y = f(x)$ のグラフについて次のことが成り立つ：
実数 u, v について，

$$\text{点 } (u, v) \text{ が関数 } y = f(x) \text{ のグラフに属す} \iff v = f(u) \text{ .}$$

xy 座標平面において、関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = -f(x)$ のグラフを考える．実数 u, v について、

点 $(u, -v)$ が関数 $y = -f(x)$ のグラフに属す

$$\iff -v = -f(u) \iff v = f(u)$$

\iff 点 (u, v) が関数 $y = f(x)$ のグラフに属す ．

xy 座標平面において、関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = -f(x)$ のグラフを考える。実数 u, v について、

点 $(u, -v)$ が関数 $y = -f(x)$ のグラフに属す

$$\iff -v = -f(u) \iff v = f(u)$$

\iff 点 (u, v) が関数 $y = f(x)$ のグラフに属す .

$y = -f(x)$ のグラフは $y = f(x)$

のグラフに属す各点 (u, v) に対

する点 $(u, -v)$ の全体である。

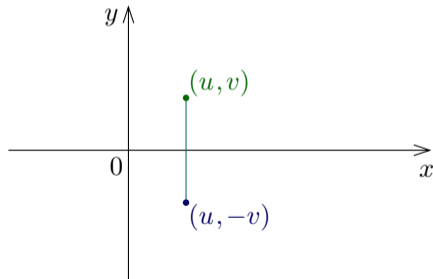
xy 座標平面において、関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = -f(x)$ のグラフを考える．実数 u, v について、

点 $(u, -v)$ が関数 $y = -f(x)$ のグラフに属す

$$\iff -v = -f(u) \iff v = f(u)$$

\iff 点 (u, v) が関数 $y = f(x)$ のグラフに属す ．

$y = -f(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフに属す各点 (u, v) に対する点 $(u, -v)$ の全体である．点 $(u, -v)$ は点 (u, v) と x 軸に関して対称である．



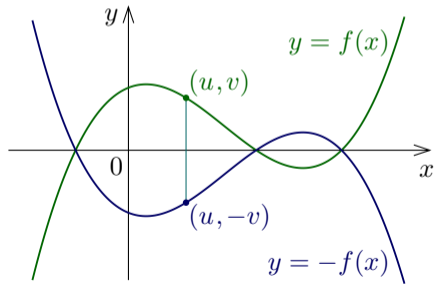
xy 座標平面において、関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = -f(x)$ のグラフを考える．実数 u, v について、

点 $(u, -v)$ が関数 $y = -f(x)$ のグラフに属す

$$\iff -v = -f(u) \iff v = f(u)$$

\iff 点 (u, v) が関数 $y = f(x)$ のグラフに属す ．

$y = -f(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフに属す各点 (u, v) に対する点 $(u, -v)$ の全体である．点 $(u, -v)$ は点 (u, v) と x 軸に関して対称である．よって $y = -f(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である．



xy 座標平面において、関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = f(-x)$ のグラフを考える．実数 u, v について、

点 $(-u, v)$ が関数 $y = f(-x)$ のグラフに属す

$$\iff v = f(-(-u)) \iff v = f(u)$$

\iff 点 (u, v) が関数 $y = f(x)$ のグラフに属す ．

xy 座標平面において、関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = f(-x)$ のグラフを考える。実数 u, v について、

点 $(-u, v)$ が関数 $y = f(-x)$ のグラフに属す

$$\iff v = f(-(-u)) \iff v = f(u)$$

\iff 点 (u, v) が関数 $y = f(x)$ のグラフに属す .

$y = f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$

のグラフに属す各点 (u, v) に対

する点 $(-u, v)$ の全体である。

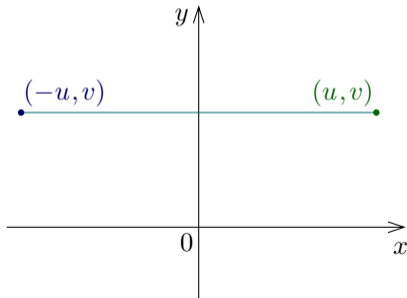
xy 座標平面において、関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = f(-x)$ のグラフを考える．実数 u, v について、

点 $(-u, v)$ が関数 $y = f(-x)$ のグラフに属す

$$\iff v = f(-(-u)) \iff v = f(u)$$

\iff 点 (u, v) が関数 $y = f(x)$ のグラフに属す ．

$y = f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフに属す各点 (u, v) に対する点 $(-u, v)$ の全体である．点 $(-u, v)$ は点 (u, v) と y 軸に関して対称である．



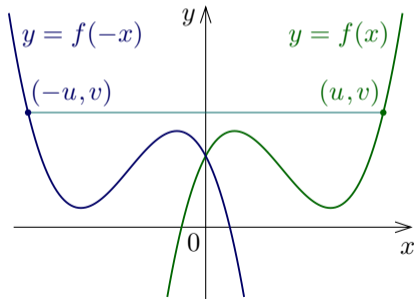
xy 座標平面において、関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = f(-x)$ のグラフを考える．実数 u, v について、

点 $(-u, v)$ が関数 $y = f(-x)$ のグラフに属す

$$\iff v = f(-(-u)) \iff v = f(u)$$

\iff 点 (u, v) が関数 $y = f(x)$ のグラフに属す ．

$y = f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフに属す各点 (u, v) に対する点 $(-u, v)$ の全体である．点 $(-u, v)$ は点 (u, v) と y 軸に関して対称である．よって $y = f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称である．



xy 座標平面において、関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = -f(-x)$ のグラフを考える．実数 u, v について、

点 $(-u, -v)$ が関数 $y = -f(-x)$ のグラフに属す

$$\iff -v = -f(-(-u)) \iff v = f(u)$$

\iff 点 (u, v) が関数 $y = f(x)$ のグラフに属す ．

xy 座標平面において、関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = -f(-x)$ のグラフを考える．実数 u, v について、

点 $(-u, -v)$ が関数 $y = -f(-x)$ のグラフに属す

$$\iff -v = -f(-(-u)) \iff v = f(u)$$

\iff 点 (u, v) が関数 $y = f(x)$ のグラフに属す ．

$y = -f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$

のグラフに属す各点 (u, v) に対す

る点 $(-u, -v)$ の全体である．

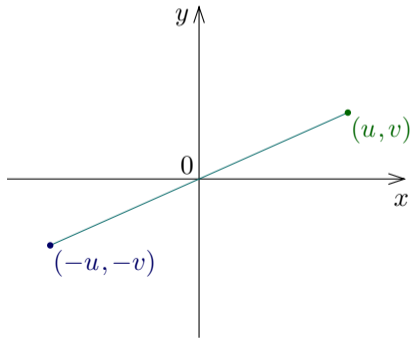
xy 座標平面において、関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = -f(-x)$ のグラフを考える．実数 u, v について、

点 $(-u, -v)$ が関数 $y = -f(-x)$ のグラフに属す

$$\iff -v = -f(-(-u)) \iff v = f(u)$$

\iff 点 (u, v) が関数 $y = f(x)$ のグラフに属す ．

$y = -f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフに属す各点 (u, v) に対する点 $(-u, -v)$ の全体である．点 $(-u, -v)$ は点 (u, v) と原点に関して対称である．



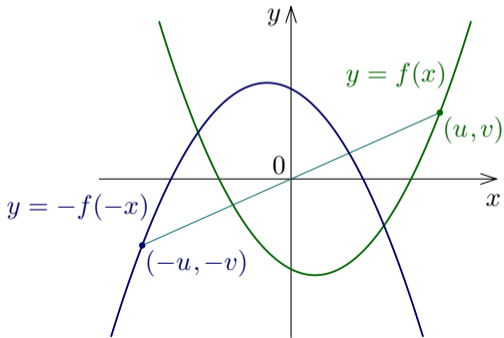
xy 座標平面において、関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = -f(-x)$ のグラフを考える．実数 u, v について、

点 $(-u, -v)$ が関数 $y = -f(-x)$ のグラフに属す

$$\iff -v = -f(-(-u)) \iff v = f(u)$$

\iff 点 (u, v) が関数 $y = f(x)$ のグラフに属す ．

$y = -f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフに属す各点 (u, v) に対する点 $(-u, -v)$ の全体である．点 $(-u, -v)$ は点 (u, v) と原点に関して対称である．よって $y = -f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと原点に関して対称である．



[定理 8.8.1] 関数 f について以下のことが成り立つ.

(1) xy 座標平面において, $y = f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称である.

(2) xy 座標平面において, $y = -f(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である.

(3) xy 座標平面において, $y = -f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと原点に関して対称である.

関数 f が偶関数であるとは,

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } x \text{ について } f(-x) = f(x)$$

となることである.

関数 f が偶関数であるとは、

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } x \text{ について } f(-x) = f(x)$$

となることである。

例 定義域が実数全体である関数 x^2 を f とおく： $f(x) = x^2$. 任意の実数 x について

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) .$$

よって、関数 f つまり関数 x^2 は偶関数である。

関数 f が偶関数であるとは、

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } x \text{ について } f(-x) = f(x)$$

となることである。

例 定義域が実数全体である関数 x^2 を f とおく： $f(x) = x^2$. 任意の実数 x について

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) .$$

よって、関数 f つまり関数 x^2 は偶関数である。この他、関数 x^4 , 関数 x^6 , 関数 x^8 など偶関数である。

終

関数 f が奇関数であるとは、

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } x \text{ について } f(-x) = -f(x)$$

となることである。

関数 f が奇関数であるとは、

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } x \text{ について } f(-x) = -f(x)$$

となることである。

例 定義域が実数全体である関数 x^3 を g とおく： $g(x) = x^3$. 任意の実数 x について、

$$g(-x) = (-x)^3 = -x \cdot (-x)^2 = -x \cdot x^2 = -x^3 = -g(x) .$$

よって、関数 g つまり関数 x^3 は奇関数である。

関数 f が奇関数であるとは、

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } x \text{ について } f(-x) = -f(x)$$

となることである。

例 定義域が実数全体である関数 x^3 を g とおく： $g(x) = x^3$. 任意の実数 x について、

$$g(-x) = (-x)^3 = -x \cdot (-x)^2 = -x \cdot x^2 = -x^3 = -g(x) .$$

よって、関数 g つまり関数 x^3 は奇関数である。この他、関数 x^5 , 関数 x^7 , 関数 x^9 など奇関数である。 **終**

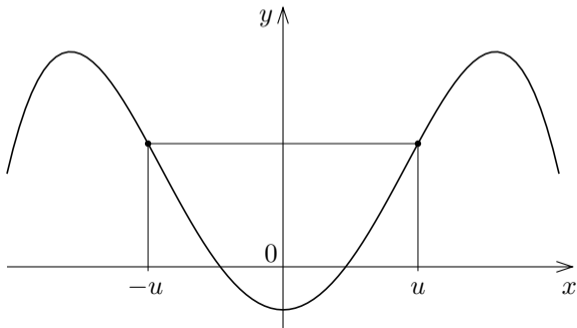
関数 f が偶関数であるとする： f の定義域の任意の点 x について

$$f(-x) = f(x) .$$

関数 f が偶関数であるとする： f の定義域の任意の点 x について $f(-x) = f(x)$. xy 座標平面において, $y = f(x)$ のグラフを y 軸に関して対称移動させると $y = f(-x)$ のグラフつまり $y = f(x)$ のグラフである.

関数 f が偶関数であるとする： f の定義域の任意の点 x について $f(-x) = f(x)$. xy 座標平面において、 $y = f(x)$ のグラフを y 軸に関して対称移動させると $y = f(-x)$ のグラフつまり $y = f(x)$ のグラフである．故に $y = f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である．

関数 f が偶関数であるとする： f の定義域の任意の点 x について $f(-x) = f(x)$. xy 座標平面において、 $y = f(x)$ のグラフを y 軸に関して対称移動させると $y = f(-x)$ のグラフつまり $y = f(x)$ のグラフである． 故に $y = f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である． 偶関数のグラフは例えば次のようになる．



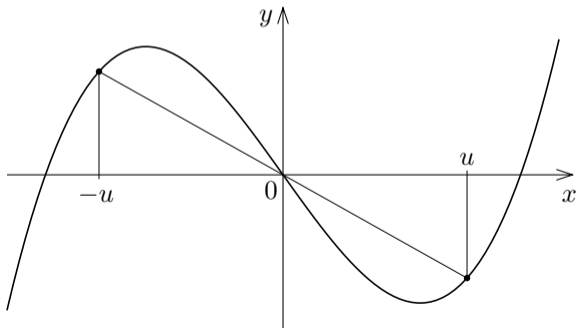
関数 f が奇関数であるとする： f の定義域の任意の点 x について

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{よって} \quad -f(-x) = f(x) .$$

関数 f が奇関数であるとする： f の定義域の任意の点 x について $f(-x) = -f(x)$ よって $-f(-x) = f(x)$. xy 座標平面において, $y = f(x)$ のグラフを原点に関して対称移動させると $y = -f(-x)$ のグラフつまり $y = f(x)$ のグラフである.

関数 f が奇関数であるとする： f の定義域の任意の点 x について $f(-x) = -f(x)$ によって $-f(-x) = f(x)$. xy 座標平面において, $y = f(x)$ のグラフを原点に関して対称移動させると $y = -f(-x)$ のグラフつまり $y = f(x)$ のグラフである. 故に $y = f(x)$ のグラフは原点に関して対称である.

関数 f が奇関数であるとする： f の定義域の任意の点 x について $f(-x) = -f(x)$ によって $-f(-x) = f(x)$. xy 座標平面において、 $y = f(x)$ のグラフを原点に関して対称移動させると $y = -f(-x)$ のグラフつまり $y = f(x)$ のグラフである. 故に $y = f(x)$ のグラフは原点に関して対称である. 奇関数のグラフは例えば次のようになる.



[定理 8.8.2] xy 座標平面において，偶関数のグラフは y 軸に関して対称であり，奇関数のグラフは原点に関して対称である．