

8.6 逆関数

関数 f の定義域の要素を表す変数 x 及び f の値域の要素を表す変数 y について $y = f(x)$ とする.

関数 f の定義域の要素を表す変数 x 及び f の値域の要素を表す変数 y について $y = f(x)$ とする. f によって, x の値に対して y の値が唯一つ定まる.

関数 f の定義域の要素を表す変数 x 及び f の値域の要素を表す変数 y について $y = f(x)$ とする. f によって, x の値に対して y の値が唯一つ定まる. 逆に, y の値に対して x の値が唯一つ定まるとき, y の値に対して x の値を定める関数ができる.

関数 f の定義域の要素を表す変数 x 及び f の値域の要素を表す変数 y について $y = f(x)$ とする. f によって, x の値に対して y の値が唯一つ定まる. 逆に, y の値に対して x の値が唯一つ定まるとき, y の値に対して x の値を定める関数ができる. この関数を f の逆関数という.

関数 f の定義域の要素を表す変数 x 及び f の値域の要素を表す変数 y について $y = f(x)$ とする. f によって, x の値に対して y の値が唯一つ定まる. 逆に, y の値に対して x の値が唯一つ定まるとき, y の値に対して x の値を定める関数ができる. この関数を f の逆関数という.

[定義] 関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x が唯一つあるとき, 関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める対応を f の逆関数といい, f^{-1} と書き表す. 関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域である.

例 定義域が集合 $\{3,5,9\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(3) = 8, \quad f(5) = 2, \quad f(9) = 6.$$

例 定義域が集合 $\{3,5,9\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(3) = 8, \quad f(5) = 2, \quad f(9) = 6.$$

f の値域は集合 $\{2,6,8\}$ である。

例 定義域が集合 $\{3,5,9\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(3) = 8, \quad f(5) = 2, \quad f(9) = 6.$$

f の値域は集合 $\{2,6,8\}$ である． $f(x) = 2$ となる数 x は 5 だけである．

例 定義域が集合 $\{3,5,9\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(3) = 8, \quad f(5) = 2, \quad f(9) = 6.$$

f の値域は集合 $\{2,6,8\}$ である． $f(x) = 2$ となる数 x は 5 だけである．

$f(x) = 6$ となる数 x は 9 だけである．

例 定義域が集合 $\{3,5,9\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(3) = 8, \quad f(5) = 2, \quad f(9) = 6.$$

f の値域は集合 $\{2,6,8\}$ である． $f(x) = 2$ となる数 x は 5 だけである．
 $f(x) = 6$ となる数 x は 9 だけである． $f(x) = 8$ となる数 x は 3 だけである．

例 定義域が集合 $\{3,5,9\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(3) = 8, \quad f(5) = 2, \quad f(9) = 6.$$

f の値域は集合 $\{2,6,8\}$ である． $f(x) = 2$ となる数 x は 5 だけである．
 $f(x) = 6$ となる数 x は 9 だけである． $f(x) = 8$ となる数 x は 3 だけである．
このように， f の値域 $\{2,6,8\}$ の各要素 y に対して $f(x) = y$ となる f の定義域の要素 x が唯一つ定まる．

例 定義域が集合 $\{3,5,9\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(3) = 8, \quad f(5) = 2, \quad f(9) = 6.$$

f の値域は集合 $\{2,6,8\}$ である． $f(x) = 2$ となる数 x は 5 だけである．
 $f(x) = 6$ となる数 x は 9 だけである． $f(x) = 8$ となる数 x は 3 だけである．
このように， f の値域 $\{2,6,8\}$ の各要素 y に対して $f(x) = y$ となる f の定義域の要素 x が唯一つ定まる．よって f の逆関数 f^{-1} がある．

例 定義域が集合 $\{3,5,9\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(3) = 8, \quad f(5) = 2, \quad f(9) = 6.$$

f の値域は集合 $\{2,6,8\}$ である． $f(x) = 2$ となる数 x は 5 だけである． $f(x) = 6$ となる数 x は 9 だけである． $f(x) = 8$ となる数 x は 3 だけである．このように， f の値域 $\{2,6,8\}$ の各要素 y に対して $f(x) = y$ となる f の定義域の要素 x が唯一つ定まる．よって f の逆関数 f^{-1} がある． f^{-1} の定義域は $\{2,6,8\}$ であり，

$$f^{-1}(2) = 5, \quad f^{-1}(6) = 9, \quad f^{-1}(8) = 3.$$

終

問8.6.1 定義域が集合 $\{0,4,6\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(0) = 7, \quad f(4) = 1, \quad f(6) = 5.$$

関数 f の逆関数を調べよ.

f の値域は集合 $\{, , \}$ である. $f(x) =$ となる数 x は だけである.
 $f(x) =$ となる数 x は だけである. $f(x) =$ となる数 x は だけである. よって, f の逆関数 f^{-1} があり, f^{-1} の定義域は $\{, , \}$ であり,

$$f^{-1}() = , \quad f^{-1}() = , \quad f^{-1}() = .$$

問8.6.1 定義域が集合 $\{0,4,6\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(0) = 7, \quad f(4) = 1, \quad f(6) = 5.$$

関数 f の逆関数を調べよ.

f の値域は集合 $\{1,5,7\}$ である. $f(x) = 1$ となる数 x は 4 だけである. $f(x) = 5$ となる数 x は 6 だけである. $f(x) = 7$ となる数 x は 0 だけである. よって, f の逆関数 f^{-1} があり, f^{-1} の定義域は $\{1,5,7\}$ であり,

$$f^{-1}(1) = 4, \quad f^{-1}(5) = 6, \quad f^{-1}(7) = 0.$$

終

例 定義域が区間 $[5, \infty)$ である関数 f を $f(x) = x + 4$ と定める.

例 定義域が区間 $[5, \infty)$ である関数 f を $f(x) = x + 4$ と定める. 関数 f の値域は区間 $[9, \infty)$ である.

例 定義域が区間 $[5, \infty)$ である関数 f を $f(x) = x + 4$ と定める. 関数 f の値域は区間 $[9, \infty)$ である. この区間 $[9, \infty)$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[5, \infty)$ の実数 x を求める.

例 定義域が区間 $[5, \infty)$ である関数 f を $f(x) = x + 4$ と定める. 関数 f の値域は区間 $[9, \infty)$ である. この区間 $[9, \infty)$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[5, \infty)$ の実数 x を求める. $y = x + 4$ とすると, $x = y - 4$, $y \geq 9$ なので $x = y - 4 \geq 5$.

例 定義域が区間 $[5, \infty)$ である関数 f を $f(x) = x + 4$ と定める. 関数 f の値域は区間 $[9, \infty)$ である. この区間 $[9, \infty)$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[5, \infty)$ の実数 x を求める. $y = x + 4$ とすると, $x = y - 4$, $y \geq 9$ なので $x = y - 4 \geq 5$. このように, 区間 $[9, \infty)$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[5, \infty)$ の実数 x は $x = y - 4$ と唯一に定まる.

例 定義域が区間 $[5, \infty)$ である関数 f を $f(x) = x + 4$ と定める. 関数 f の値域は区間 $[9, \infty)$ である. この区間 $[9, \infty)$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[5, \infty)$ の実数 x を求める. $y = x + 4$ とすると, $x = y - 4$, $y \geq 9$ なので $x = y - 4 \geq 5$. このように, 区間 $[9, \infty)$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[5, \infty)$ の実数 x は $x = y - 4$ と唯一に定まる. 故に, f の逆関数 f^{-1} があり, f^{-1} の定義域である区間 $[9, \infty)$ の各実数 y に対して $f^{-1}(y) = y - 4$.

例 定義域が区間 $[5, \infty)$ である関数 f を $f(x) = x + 4$ と定める. 関数 f の値域は区間 $[9, \infty)$ である. この区間 $[9, \infty)$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[5, \infty)$ の実数 x を求める. $y = x + 4$ とすると, $x = y - 4$, $y \geq 9$ なので $x = y - 4 \geq 5$. このように, 区間 $[9, \infty)$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[5, \infty)$ の実数 x は $x = y - 4$ と唯一に定まる. 故に, f の逆関数 f^{-1} があり, f^{-1} の定義域である区間 $[9, \infty)$ の各実数 y に対して $f^{-1}(y) = y - 4$. 通常 f^{-1} についても独立変数を x にする. f の逆関数 f^{-1} の定義域である区間 $[9, \infty)$ の各実数 x に対して $f^{-1}(x) = x - 4$. **終**

例 定義域が区間 $[2, \infty)$ である関数 g を $g(x) = 3x$ と定める.

例 定義域が区間 $[2, \infty)$ である関数 g を $g(x) = 3x$ と定める. 関数 g の値域は区間 $[6, \infty)$ である.

例 定義域が区間 $[2, \infty)$ である関数 g を $g(x) = 3x$ と定める. 関数 g の値域は区間 $[6, \infty)$ である. この区間 $[6, \infty)$ の各実数 y に対して $y = g(x)$ となる区間 $[2, \infty)$ の実数 x を求める.

例 定義域が区間 $[2, \infty)$ である関数 g を $g(x) = 3x$ と定める. 関数 g の値域は区間 $[6, \infty)$ である. この区間 $[6, \infty)$ の各実数 y に対して $y = g(x)$ となる区間 $[2, \infty)$ の実数 x を求める. $y = 3x$ とすると, $x = \frac{y}{3}$, $y \geq 6$ なので $x = \frac{y}{3} \geq 2$.

例 定義域が区間 $[2, \infty)$ である関数 g を $g(x) = 3x$ と定める. 関数 g の値域は区間 $[6, \infty)$ である. この区間 $[6, \infty)$ の各実数 y に対して $y = g(x)$ となる区間 $[2, \infty)$ の実数 x を求める. $y = 3x$ とすると, $x = \frac{y}{3}$, $y \geq 6$ なので $x = \frac{y}{3} \geq 2$. このように, 区間 $[6, \infty)$ の各実数 y に対して $y = g(x)$ となる区間 $[2, \infty)$ の実数 x は $x = \frac{y}{3}$ と唯一つに定まる.

例 定義域が区間 $[2, \infty)$ である関数 g を $g(x) = 3x$ と定める. 関数 g の値域は区間 $[6, \infty)$ である. この区間 $[6, \infty)$ の各実数 y に対して $y = g(x)$ となる区間 $[2, \infty)$ の実数 x を求める. $y = 3x$ とすると, $x = \frac{y}{3}$, $y \geq 6$ なので $x = \frac{y}{3} \geq 2$. このように, 区間 $[6, \infty)$ の各実数 y に対して $y = g(x)$ となる区間 $[2, \infty)$ の実数 x は $x = \frac{y}{3}$ と唯一つに定まる. 故に, g の逆関数 g^{-1} があり, g^{-1} の定義域である区間 $[6, \infty)$ の各実数 y について $g^{-1}(y) = \frac{y}{3}$.

例 定義域が区間 $[2, \infty)$ である関数 g を $g(x) = 3x$ と定める. 関数 g の値域は区間 $[6, \infty)$ である. この区間 $[6, \infty)$ の各実数 y に対して $y = g(x)$ となる区間 $[2, \infty)$ の実数 x を求める. $y = 3x$ とすると, $x = \frac{y}{3}$, $y \geq 6$ なので $x = \frac{y}{3} \geq 2$. このように, 区間 $[6, \infty)$ の各実数 y に対して $y = g(x)$ となる区間 $[2, \infty)$ の実数 x は $x = \frac{y}{3}$ と唯一つに定まる. 故に, g の逆関数 g^{-1} があり, g^{-1} の定義域である区間 $[6, \infty)$ の各実数 y について $g^{-1}(y) = \frac{y}{3}$. 通常 g^{-1} についても独立変数を x にする. g の逆関数 g^{-1} の定義域である区間 $[6, \infty)$ の各実数 x について $g^{-1}(x) = \frac{x}{3}$. **終**

関数 $x+4$ の逆関数は関数 $x-4$ である. 関数 $3x$ の逆関数は関数 $\frac{x}{3}$ である. このように, 関数 f の逆関数とは, f の計算と逆の計算をする関数である.

例 定義域が区間 $[0,2]$ である関数 f を $f(x) = 3x + 1$ と定める.

例 定義域が区間 $[0,2]$ である関数 f を $f(x) = 3x + 1$ と定める. f の値域は区間 $[1,7]$ である.

例 定義域が区間 $[0,2]$ である関数 f を $f(x) = 3x + 1$ と定める. f の値域は区間 $[1,7]$ である. この区間 $[1,7]$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[0,2]$ の実数 x を求める.

例 定義域が区間 $[0,2]$ である関数 f を $f(x) = 3x + 1$ と定める. f の値域は区間 $[1,7]$ である. この区間 $[1,7]$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[0,2]$ の実数 x を求める. $y = 3x + 1$ とすると, $3x = y - 1$, $x = \frac{y-1}{3}$.

例 定義域が区間 $[0, 2]$ である関数 f を $f(x) = 3x + 1$ と定める. f の値域は区間 $[1, 7]$ である. この区間 $[1, 7]$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[0, 2]$ の実数 x を求める. $y = 3x + 1$ とすると, $3x = y - 1$, $x = \frac{y - 1}{3}$. $1 \leq y \leq 7$ なので, $1 \leq 3x + 1 \leq 7$, $0 \leq 3x \leq 6$, $0 \leq x \leq 2$.

例 定義域が区間 $[0,2]$ である関数 f を $f(x) = 3x + 1$ と定める. f の値域は区間 $[1,7]$ である. この区間 $[1,7]$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[0,2]$ の実数 x を求める. $y = 3x + 1$ とすると, $3x = y - 1$, $x = \frac{y-1}{3}$. $1 \leq y \leq 7$ なので, $1 \leq 3x + 1 \leq 7$, $0 \leq 3x \leq 6$, $0 \leq x \leq 2$. 区間 $[1,7]$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[0,2]$ の実数 x が $x = \frac{y-1}{3}$ と唯一つに定まる.

例 定義域が区間 $[0, 2]$ である関数 f を $f(x) = 3x + 1$ と定める. f の値域は区間 $[1, 7]$ である. この区間 $[1, 7]$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[0, 2]$ の実数 x を求める. $y = 3x + 1$ とすると, $3x = y - 1$, $x = \frac{y - 1}{3}$. $1 \leq y \leq 7$ なので, $1 \leq 3x + 1 \leq 7$, $0 \leq 3x \leq 6$, $0 \leq x \leq 2$. 区間 $[1, 7]$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[0, 2]$ の実数 x が $x = \frac{y - 1}{3}$ と唯一つに定まる. 故に, f の逆関数 f^{-1} があり, f^{-1} の定義域である区間 $[1, 7]$ の各実数 x に対して $f^{-1}(y) = \frac{y - 1}{3}$.

例 定義域が区間 $[0, 2]$ である関数 f を $f(x) = 3x + 1$ と定める. f の値域は区間 $[1, 7]$ である. この区間 $[1, 7]$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[0, 2]$ の実数 x を求める. $y = 3x + 1$ とすると, $3x = y - 1$, $x = \frac{y - 1}{3}$. $1 \leq y \leq 7$ なので, $1 \leq 3x + 1 \leq 7$, $0 \leq 3x \leq 6$, $0 \leq x \leq 2$. 区間 $[1, 7]$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[0, 2]$ の実数 x が $x = \frac{y - 1}{3}$ と唯一つに定まる. 故に, f の逆関数 f^{-1} があり, f^{-1} の定義域である区間 $[1, 7]$ の各実数 x に対して $f^{-1}(y) = \frac{y - 1}{3}$. f^{-1} の独立変数を x にすると,

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{3} .$$

終

例 定義域が区間 $[0, 2]$ である関数 f を $f(x) = 3x + 1$ と定める. f の値域は区間 $[1, 7]$ である. この区間 $[1, 7]$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[0, 2]$ の実数 x を求める. $y = 3x + 1$ とすると, $3x = y - 1$, $x = \frac{y - 1}{3}$. $1 \leq y \leq 7$ なので, $1 \leq 3x + 1 \leq 7$, $0 \leq 3x \leq 6$, $0 \leq x \leq 2$. 区間 $[1, 7]$ の各実数 y に対して $y = f(x)$ となる区間 $[0, 2]$ の実数 x が $x = \frac{y - 1}{3}$ と唯一つに定まる. 故に, f の逆関数 f^{-1} があり, f^{-1} の定義域である区間 $[1, 7]$ の各実数 x に対して $f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{3}$. f^{-1} の独立変数を x にすると,

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{3} .$$

終

最後に f の逆関数 f^{-1} の独立変数を y から x に替える手間を省くために, f^{-1} の定義域つまり f の値域の要素を表す変数を初めから x にしよう.

例 定義域が区間 $[0, 2]$ である関数 f を $f(x) = 3x + 1$ と定める. f の値域は区間 $[1, 7]$ である. この区間 $[1, 7]$ の各実数 x に対して $x = f(y)$ となる区間 $[0, 2]$ の実数 y を求める. $x = 3y + 1$ とすると, $3y = x - 1$, $y = \frac{x - 1}{3}$. $1 \leq x \leq 7$ なので, $1 \leq 3y + 1 \leq 7$, $0 \leq 3y \leq 6$, $0 \leq y \leq 2$. 区間 $[1, 7]$ の各実数 x に対して $x = f(y)$ となる区間 $[0, 2]$ の実数 y が $y = \frac{x - 1}{3}$ と唯一つに定まる. 故に, f の逆関数 f^{-1} があり, f^{-1} の定義域である区間 $[1, 7]$ の各実数 x に対して $f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{3}$. **終**

問8.6.2 定義域が区間 $[2, 4]$ である関数 g を $g(x) = 13 - 3x$ と定める. g の逆関数を調べよ.

関数 g の値域は区間 $[,]$ である. 区間 $[,]$ の実数 x に対して, $x = g(y)$ である区間 $[,]$ の実数 y を求める. $x =$ なので, ,
 $y =$. $\leq x \leq$ より, $\leq 13 - 3y \leq$, $\leq -3y \leq$,
 $\leq y \leq$. 区間 $[,]$ の各実数 x に対して $x = g(y)$ となる区間 $[,]$ の実数 y が $y =$ と唯一つに定まる. 故に, g の逆関数 g^{-1} があり, g^{-1} の定義域である区間 $[,]$ の各実数 x に対して $g^{-1}(x) =$. **終**

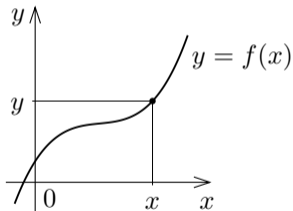
問8.6.2 定義域が区間 $[2,4]$ である関数 g を $g(x) = 13 - 3x$ と定める. g の逆関数を調べよ.

関数 g の値域は区間 $[1,7]$ である. 区間 $[1,7]$ の実数 x に対して, $x = g(y)$ である区間 $[2,4]$ の実数 y を求める. $x = 13 - 3y$ なので, $3y = 13 - x$, $y = \frac{13 - x}{3}$. $1 \leq x \leq 7$ より, $1 \leq 13 - 3y \leq 7$, $-12 \leq -3y \leq -6$, $2 \leq y \leq 4$. 区間 $[1,7]$ の各実数 x に対して $x = g(y)$ となる区間 $[2,4]$ の実数 y が $y = \frac{13 - x}{3}$ と唯一つに定まる. 故に, g の逆関数 g^{-1} があり, g^{-1}

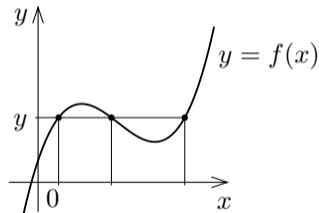
の定義域である区間 $[1,7]$ の各実数 x に対して $g^{-1}(x) = \frac{13 - x}{3}$. **終**

関数 f の逆関数は、 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める。関数は唯一つの対象を定める対応なので、 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x が複数あるときは、 f の逆関数はない。

関数 f の逆関数は、 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める。関数は唯一つの対象を定める対応なので、 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x が複数あるときは、 f の逆関数はない。 xy 座標平面における関数 $y = f(x)$ のグラフを考えると例えば次のようになる。



y に対して $y = f(x)$ となる x が唯一つあるので、関数 f の逆関数がある。



y に対して $y = f(x)$ となる x が2個以上あるので、関数 f の逆関数はない。

例 定義域が実数全体である関数 f を $f(x) = x^2$ と定める. 例えば 7 に対して, $f(x) = 7$ とすると, $x^2 = 7$ なので, $x = \sqrt{7}$ または $x = -\sqrt{7}$; このように x の値が唯一つでない. よって関数 f の逆関数はない. **終**

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする.

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする. 対象 u と v について, $f(u) = v$ ならば, f の逆関数 f^{-1} は v に対して u を定めるので $f^{-1}(v) = u$.

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする. 対象 u と v について, $f(u) = v$ ならば, f の逆関数 f^{-1} は v に対して u を定めるので $f^{-1}(v) = u$. 対象 u と v について, $f^{-1}(v) = u$ となるのは $f(u) = v$ のときなので, $f^{-1}(v) = u$ ならば $f(u) = v$.

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする. 対象 u と v について, $f(u) = v$ ならば, f の逆関数 f^{-1} は v に対して u を定めるので $f^{-1}(v) = u$. 対象 u と v について, $f^{-1}(v) = u$ となるのは $f(u) = v$ のときなので, $f^{-1}(v) = u$ ならば $f(u) = v$. 故に. 任意の対象 u と v について,

$$f(u) = v \text{ ならば } f^{-1}(v) = u ,$$

かつ,

$$f^{-1}(v) = u \text{ ならば } f(u) = v .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする. 対象 u と v について, $f(u) = v$ ならば, f の逆関数 f^{-1} は v に対して u を定めるので $f^{-1}(v) = u$. 対象 u と v について, $f^{-1}(v) = u$ となるのは $f(u) = v$ のときなので, $f^{-1}(v) = u$ ならば $f(u) = v$. 故に. 任意の対象 u と v について,

$$f(u) = v \text{ ならば } f^{-1}(v) = u ,$$

かつ,

$$f^{-1}(v) = u \text{ ならば } f(u) = v .$$

[定理 8.6.1] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき, 任意の対象 u と v について,

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u .$$

[定理 8.6.1] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき, 任意の対象 u と v について,

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u .$$

例 定義域が集合 $\{2,3,4\}$ である関数 f を次のように定める:

$$f(2) = 5 , \quad f(3) = 7 , \quad f(4) = 9 .$$

この関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域 $\{5,7,9\}$ である.

[定理 8.6.1] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき, 任意の対象 u と v について,

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u .$$

例 定義域が集合 $\{2,3,4\}$ である関数 f を次のように定める:

$$f(2) = 5 , \quad f(3) = 7 , \quad f(4) = 9 .$$

この関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域 $\{5,7,9\}$ である.

$$f(\quad) = 5 \quad \text{なので} \quad f^{-1}(5) = \quad .$$

[定理 8.6.1] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき、任意の対象 u と v について、

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u .$$

例 定義域が集合 $\{2,3,4\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(2) = 5 , \quad f(3) = 7 , \quad f(4) = 9 .$$

この関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域 $\{5,7,9\}$ である。

$$f(2) = 5 \quad \text{なので} \quad f^{-1}(5) = 2 .$$

[定理 8.6.1] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき、任意の対象 u と v について、

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u .$$

例 定義域が集合 $\{2,3,4\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(2) = 5 , \quad f(3) = 7 , \quad f(4) = 9 .$$

この関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域 $\{5,7,9\}$ である。

$$f(2) = 5 \text{ なので } f^{-1}(5) = 2 .$$

$$f(\quad) = 7 \text{ なので } f^{-1}(7) = \quad .$$

[定理 8.6.1] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき、任意の対象 u と v について、

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u .$$

例 定義域が集合 $\{2,3,4\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(2) = 5 , \quad f(3) = 7 , \quad f(4) = 9 .$$

この関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域 $\{5,7,9\}$ である。

$$f(2) = 5 \quad \text{なので} \quad f^{-1}(5) = 2 .$$

$$f(3) = 7 \quad \text{なので} \quad f^{-1}(7) = 3 .$$

[定理 8.6.1] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき、任意の対象 u と v について、

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u .$$

例 定義域が集合 $\{2,3,4\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(2) = 5 , \quad f(3) = 7 , \quad f(4) = 9 .$$

この関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域 $\{5,7,9\}$ である。

$$f(2) = 5 \text{ なので } f^{-1}(5) = 2 .$$

$$f(3) = 7 \text{ なので } f^{-1}(7) = 3 .$$

$$f(\quad) = 9 \text{ なので } f^{-1}(9) = \quad .$$

[定理 8.6.1] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき、任意の対象 u と v について、

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u .$$

例 定義域が集合 $\{2,3,4\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(2) = 5 , \quad f(3) = 7 , \quad f(4) = 9 .$$

この関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域 $\{5,7,9\}$ である。

$$f(2) = 5 \text{ なので } f^{-1}(5) = 2 .$$

$$f(3) = 7 \text{ なので } f^{-1}(7) = 3 .$$

$$f(4) = 9 \text{ なので } f^{-1}(9) = 4 .$$

終

[定理 8.6.1] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき、任意の対象 u と v について、

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u .$$

問8.6.3 定義域が集合 $\{2,3,4,5\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(2) = 7 , \quad f(3) = 9 , \quad f(4) = 6 , \quad f(5) = 8 .$$

$f^{-1}(6)$, $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(8)$, $f^{-1}(9)$ を求めよ.

$$f(\quad) = 6 \quad \text{なので} \quad f^{-1}(6) = \quad .$$

$$f(\quad) = 7 \quad \text{なので} \quad f^{-1}(7) = \quad .$$

$$f(\quad) = 8 \quad \text{なので} \quad f^{-1}(8) = \quad .$$

$$f(\quad) = 9 \quad \text{なので} \quad f^{-1}(9) = \quad .$$

[定理 8.6.1] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき、任意の対象 u と v について、

$$f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u .$$

問8.6.3 定義域が集合 $\{2,3,4,5\}$ である関数 f を次のように定める：

$$f(2) = 7 , \quad f(3) = 9 , \quad f(4) = 6 , \quad f(5) = 8 .$$

$f^{-1}(6)$, $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(8)$, $f^{-1}(9)$ を求めよ.

$$f(4) = 6 \text{ なので } f^{-1}(6) = 4 .$$

$$f(2) = 7 \text{ なので } f^{-1}(7) = 2 .$$

$$f(5) = 8 \text{ なので } f^{-1}(8) = 5 .$$

$$f(3) = 9 \text{ なので } f^{-1}(9) = 3 .$$

終

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする.

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする. 対象 y について,

y が f^{-1} の値域に属す

$\iff y = f^{-1}(x)$ となる f^{-1} の定義域の要素 x がある .

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする. 対象 y について,

y が f^{-1} の値域に属す

$\iff y = f^{-1}(x)$ となる f^{-1} の定義域の要素 x がある .

等式 $y = f^{-1}(x)$ は等式 $x = f(y)$ と同値である. また, f^{-1} の定義域は f の値域である.

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする. 対象 y について,

y が f^{-1} の値域に属す

$\iff y = f^{-1}(x)$ となる f^{-1} の定義域の要素 x がある .

等式 $y = f^{-1}(x)$ は等式 $x = f(y)$ と同値である. また, f^{-1} の定義域は f の値域である.

$y = f^{-1}(x)$ となる f^{-1} の定義域の要素 x がある

$\iff x = f(y)$ となる f の値域の要素 x がある

$\iff y$ が f の定義域に属す .

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする. 対象 y について,

y が f^{-1} の値域に属す

$\iff y = f^{-1}(x)$ となる f^{-1} の定義域の要素 x がある .

等式 $y = f^{-1}(x)$ は等式 $x = f(y)$ と同値である. また, f^{-1} の定義域は f の値域である.

$y = f^{-1}(x)$ となる f^{-1} の定義域の要素 x がある

$\iff x = f(y)$ となる f の値域の要素 x がある

$\iff y$ が f の定義域に属す .

よって

y が f^{-1} の値域に属す $\iff y$ が f の定義域に属す .

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする. 対象 y について,

y が f^{-1} の値域に属す

$\iff y = f^{-1}(x)$ となる f^{-1} の定義域の要素 x がある .

等式 $y = f^{-1}(x)$ は等式 $x = f(y)$ と同値である. また, f^{-1} の定義域は f の値域である.

$y = f^{-1}(x)$ となる f^{-1} の定義域の要素 x がある

$\iff x = f(y)$ となる f の値域の要素 x がある

$\iff y$ が f の定義域に属す .

よって

y が f^{-1} の値域に属す $\iff y$ が f の定義域に属す .

故に f^{-1} の値域と f の定義域とは一致する.

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする. 対象 y について,

y が f^{-1} の値域に属す

$\iff y = f^{-1}(x)$ となる f^{-1} の定義域の要素 x がある .

等式 $y = f^{-1}(x)$ は等式 $x = f(y)$ と同値である. また, f^{-1} の定義域は f の値域である.

$y = f^{-1}(x)$ となる f^{-1} の定義域の要素 x がある

$\iff x = f(y)$ となる f の値域の要素 x がある

$\iff y$ が f の定義域に属す .

よって

y が f^{-1} の値域に属す $\iff y$ が f の定義域に属す .

故に f^{-1} の値域と f の定義域とは一致する.

[定理 8.6.2] 関数 f の逆関数 f^{-1} の値域は f の定義域である.

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする.

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする. f の定義域の要素 x について,
 $y = f(x)$ とおくと, $x = f^{-1}(y)$ なので,

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする. f の定義域の要素 x について,
 $y = f(x)$ とおくと, $x = f^{-1}(y)$ なので,

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x .$$

f の値域の要素 y について, $x = f^{-1}(y)$ とおくと, $y = f(x)$ なので,

$$f(f^{-1}(y)) = f(x) = y .$$

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする. f の定義域の要素 x について,
 $y = f(x)$ とおくと, $x = f^{-1}(y)$ なので,

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x .$$

f の値域の要素 y について, $x = f^{-1}(y)$ とおくと, $y = f(x)$ なので,

$$f(f^{-1}(y)) = f(x) = y .$$

[定理 8.6.3] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

f の定義域の任意の要素 x について $f^{-1}(f(x)) = x$,

f の値域の任意の要素 y について $f(f^{-1}(y)) = y$.

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとする. f の定義域の要素 x について,
 $y = f(x)$ とおくと, $x = f^{-1}(y)$ なので,

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x .$$

f の値域の要素 y について, $x = f^{-1}(y)$ とおくと, $y = f(x)$ なので,

$$f(f^{-1}(y)) = f(x) = y .$$

[定理 8.6.3] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

f の定義域の任意の要素 x について $f^{-1}(f(x)) = x$,

f の値域の任意の要素 y について $f(f^{-1}(y)) = y$.

関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき, f の定義域の要素 x に対して
 $f^{-1}(f(x)) = x$ なので, f^{-1} は x における f の値 $f(x)$ を x に戻す関数である.

更に以下の定理が成り立つ.

[定理 8.6.4] 関数 g の定義域が関数 f の値域であり, f の定義域の各要素 x について $g(f(x)) = x$ ならば, g は f の逆関数である.

[定理 8.6.5] 関数 g が関数 f の逆関数であるとき, f は g の逆関数である.