

## 8.4 関数の最大値と最小値

関数の  $f$  の最大値とは  $f$  の値域のなかで最も大きい実数のことであり、関数  $f$  の最小値とは  $f$  の値域のなかで最も小さい実数のことである.

関数の  $f$  の最大値とは  $f$  の値域のなかで最も大きい実数のことであり、関数  $f$  の最小値とは  $f$  の値域のなかで最も小さい実数のことである。正確に述べると次のようになる。

[定義] 関数  $f$  の定義域に属す実数  $p$  について、 $f$  が  $p$  において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$f$  の定義域の任意の要素  $x$  に対して  $f(p) \geq f(x)$  ；

このとき  $f$  の値  $f(p)$  を  $f$  の最大値という。また、 $f$  が  $p$  において最小値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$f$  の定義域の任意の要素  $x$  に対して  $f(p) \leq f(x)$  ；

このとき  $f$  の値  $f(p)$  を  $f$  の最小値という。

**例** 定義域が集合  $\{1,3,6,8\}$  である関数  $f$  を次のように定める：

$$f(1) = 4, \quad f(3) = 7, \quad f(6) = 2, \quad f(8) = 5.$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4), (3,7), (6,2), (8,5)\}.$$

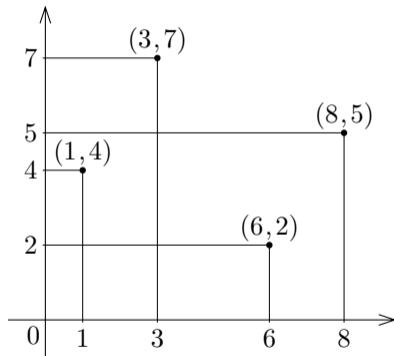
**例** 定義域が集合  $\{1,3,6,8\}$  である関数  $f$  を次のように定める：

$$f(1) = 4, \quad f(3) = 7, \quad f(6) = 2, \quad f(8) = 5.$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4), (3,7), (6,2), (8,5)\}.$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる。



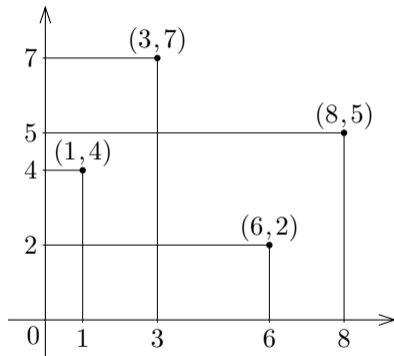
**例** 定義域が集合  $\{1,3,6,8\}$  である関数  $f$  を次のように定める：

$$f(1) = 4, \quad f(3) = 7, \quad f(6) = 2, \quad f(8) = 5.$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4), (3,7), (6,2), (8,5)\}.$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる．この関数の値域は集合  $\{, , , \}$  である．



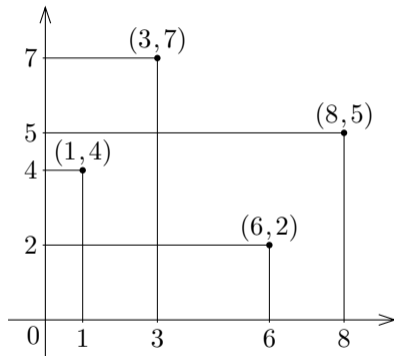
**例** 定義域が集合  $\{1,3,6,8\}$  である関数  $f$  を次のように定める：

$$f(1) = 4, \quad f(3) = 7, \quad f(6) = 2, \quad f(8) = 5.$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4), (3,7), (6,2), (8,5)\}.$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる．この関数の値域は集合  $\{2,4,5,7\}$  である．



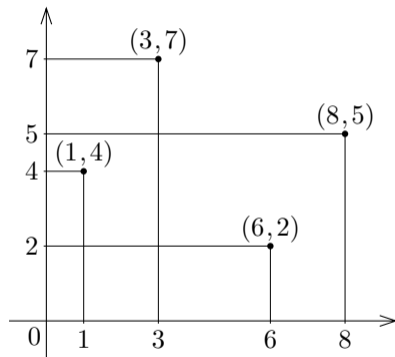
**例** 定義域が集合  $\{1,3,6,8\}$  である関数  $f$  を次のように定める：

$$f(1) = 4, \quad f(3) = 7, \quad f(6) = 2, \quad f(8) = 5.$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4), (3,7), (6,2), (8,5)\}.$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる．この関数の値域は集合  $\{2,4,5,7\}$  である． $f$  の最大値は値域の要素で最大の実数 であり、 $f$  の最小値は値域の要素で最小の実数 である．



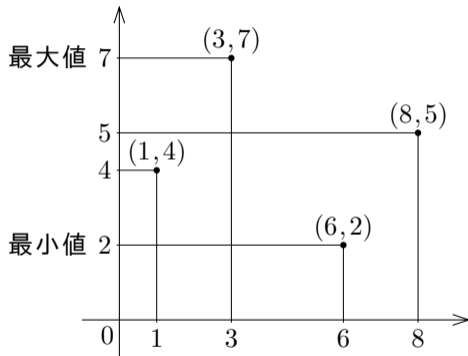
**例** 定義域が集合  $\{1,3,6,8\}$  である関数  $f$  を次のように定める：

$$f(1) = 4, \quad f(3) = 7, \quad f(6) = 2, \quad f(8) = 5.$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4), (3,7), (6,2), (8,5)\}.$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる．この関数の値域は集合  $\{2,4,5,7\}$  である． $f$  の最大値は値域の要素で最大の実数  $7$  であり， $f$  の最小値は値域の要素で最小の実数  $2$  である．



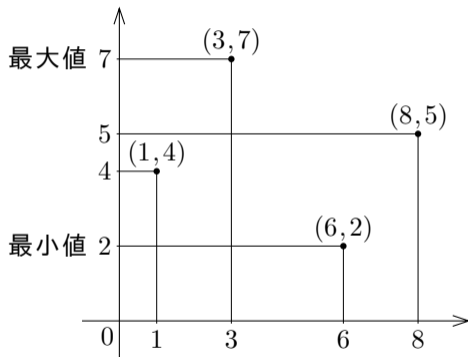
**例** 定義域が集合  $\{1,3,6,8\}$  である関数  $f$  を次のように定める：

$$f(1) = 4, \quad f(3) = 7, \quad f(6) = 2, \quad f(8) = 5.$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4), (3,7), (6,2), (8,5)\}.$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる．この関数の値域は集合  $\{2,4,5,7\}$  である． $f$  の最大値は値域の要素で最大の実数  $7$  であり， $f$  の最小値は値域の要素で最小の実数  $2$  である． $f$  は， $\{1,3,6,8\}$  において最大値  $7$  をとり， $\{1,3,6,8\}$  において最小値  $2$  をとる．



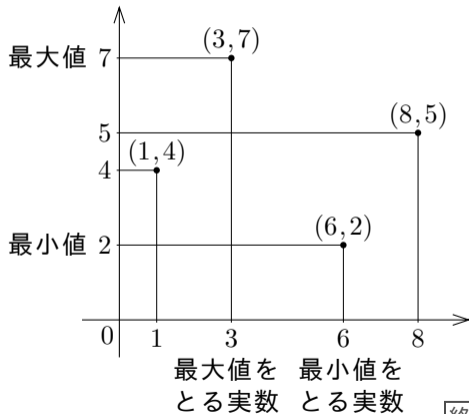
**例** 定義域が集合  $\{1,3,6,8\}$  である関数  $f$  を次のように定める：

$$f(1) = 4, \quad f(3) = 7, \quad f(6) = 2, \quad f(8) = 5.$$

この関数のグラフは次の集合である：

$$\{(1,4), (3,7), (6,2), (8,5)\}.$$

この集合を座標平面で図示すると右図のようになる．この関数の値域は集合  $\{2,4,5,7\}$  である． $f$  の最大値は値域の要素で最大の実数 7 であり， $f$  の最小値は値域の要素で最小の実数 2 である． $f$  は，3 において最大値 7 をとり，6 において最小値 2 をとる．



**問8.4.1** 定義域が集合  $\{2, 5, 7, 9\}$  である関数  $f$  を次のように定める：

$$f(2) = 4, \quad f(5) = 8, \quad f(7) = 3, \quad f(9) = 6.$$

関数  $f$  の最大値・最小値を求めよ．どの実数において最大値・最小値をとるかも記せ．

関数  $f$  の値域は集合  $\{ \quad, \quad, \quad, \quad \}$  である．関数  $f$  は,  $\quad$  において最大値をとり,  $\quad$  において最小値  $\quad$  をとる．

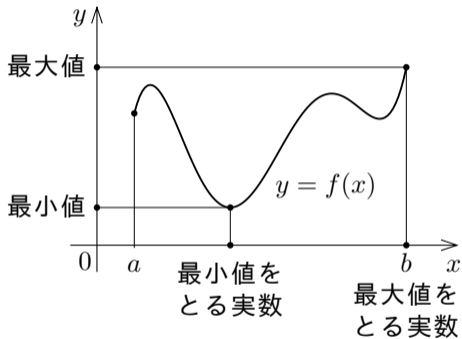
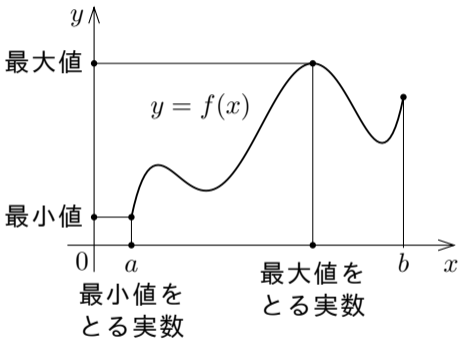
**問8.4.1** 定義域が集合  $\{2,5,7,9\}$  である関数  $f$  を次のように定める：

$$f(2) = 4, \quad f(5) = 8, \quad f(7) = 3, \quad f(9) = 6.$$

関数  $f$  の最大値・最小値を求めよ．どの実数において最大値・最小値をとるかも記せ．

関数  $f$  の値域は集合  $\{3,4,6,8\}$  である．関数  $f$  は，5 において最大値 8 をとり，7 において最小値 3 をとる．

実数  $a$  と  $b$  について  $a < b$  とする. 定義域が区間  $[a, b]$  である関数  $f$  のグラフにおいて, 最大値・最小値は例えば次の図のようになる.

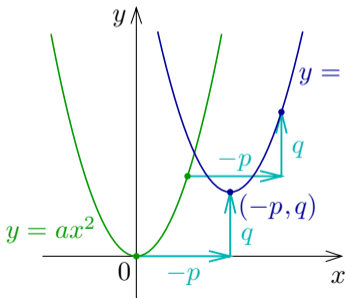


関数の最大値・最小値は無いこともある.

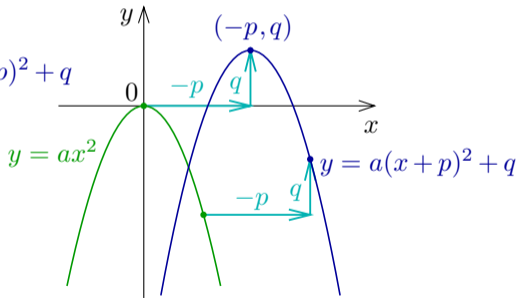
2次関数について最大値・最小値を考えるには、2次関数  $f$  の値を表す2次式を平方完成する． $a, p, q$  は定数で  $a \neq 0$  とする．

2次関数について最大値・最小値を考えるには、2次関数  $f$  の値を表す2次式を平方完成する． $a, p, q$  は定数で  $a \neq 0$  とする．4.8節で述べたように、 $xy$  座標平面において、2次関数  $y = a(x+p)^2 + q$  のグラフは、関数  $y = ax^2$  のグラフを  $x$  軸の向きに  $-p$  だけ  $y$  軸の向きに  $q$  だけ平行移動させた放物線である．

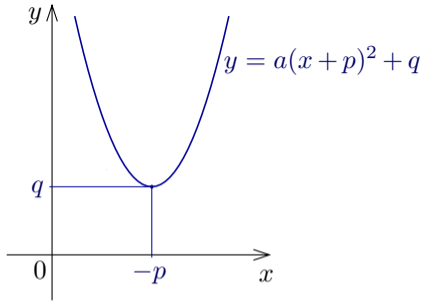
2次関数について最大値・最小値を考えるには、2次関数  $f$  の値を表す2次式を平方完成する． $a, p, q$  は定数で  $a \neq 0$  とする．4.8節で述べたように、 $xy$  座標平面において、2次関数  $y = a(x+p)^2 + q$  のグラフは、関数  $y = ax^2$  のグラフを  $x$  軸の向きに  $-p$  だけ  $y$  軸の向きに  $q$  だけ平行移動させた放物線である．例えば以下の図のようになる．



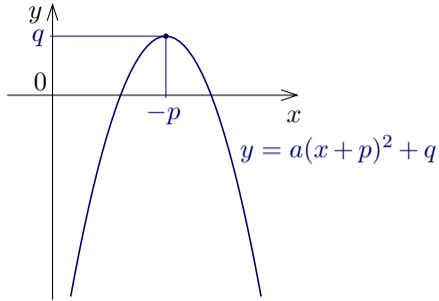
$a > 0$  のとき



$a < 0$  のとき

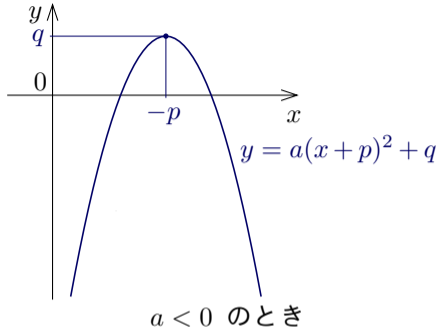
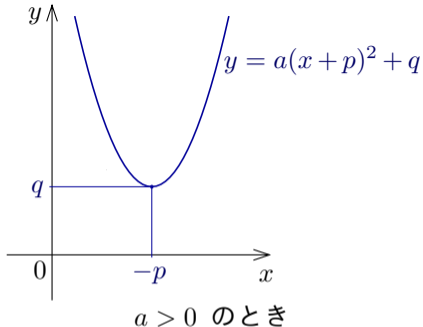


$a > 0$  のとき



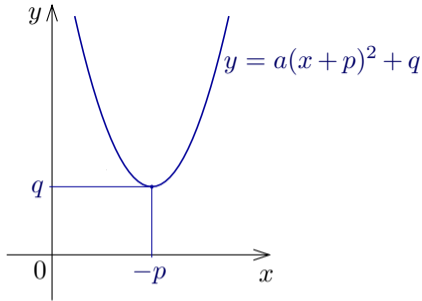
$a < 0$  のとき

定義域が実数全体である 2 次関数  $f(x) = a(x + p)^2 + q$  は次のようになる：

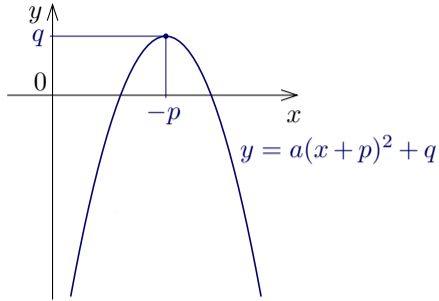


定義域が実数全体である 2 次関数  $f(x) = a(x + p)^2 + q$  は次のようになる：

- (1)  $a > 0$  のとき，区間  $(-\infty, -p]$  において単調減少で区間  $[-p, \infty)$  において単調増加なので，実数  $-p$  において最小値  $q$  をとり，最大値はない；



$a > 0$  のとき



$a < 0$  のとき

定義域が実数全体である 2 次関数  $f(x) = a(x+p)^2 + q$  は次のようになる：

- (1)  $a > 0$  のとき，区間  $(-\infty, -p]$  において単調減少で区間  $[-p, \infty)$  において単調増加なので，実数  $-p$  において最小値  $q$  をとり，最大値はない；
- (2)  $a < 0$  のとき，区間  $(-\infty, -p]$  において単調増加で区間  $[-p, \infty)$  において単調減少なので，実数  $-p$  において最大値  $q$  をとり，最小値はない。

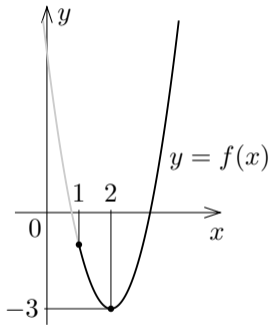
**例** 定義域が区間  $[1, \infty)$  である 2 次関数  $f$  を  $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$  と定める。  
関数  $f$  の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）。

**例** 定義域が区間  $[1, \infty)$  である 2 次関数  $f$  を  $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$  と定める.  
関数  $f$  の最大値・最小値を調べる (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる).  $f(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x + 5 = 2(x^2 - 4x) + 5 \\ &= 2(x^2 - 4x + 4) - 8 + 5 \\ &= 2(x - 2)^2 - 3 . \end{aligned}$$

**例** 定義域が区間  $[1, \infty)$  である 2 次関数  $f$  を  $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$  と定める.  
関数  $f$  の最大値・最小値を調べる (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる).  $f(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

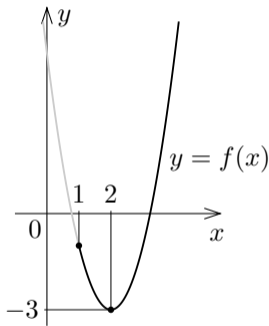
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x + 5 = 2(x^2 - 4x) + 5 \\ &= 2(x^2 - 4x + 4) - 8 + 5 \\ &= 2(x - 2)^2 - 3. \end{aligned}$$



**例** 定義域が区間  $[1, \infty)$  である 2 次関数  $f$  を  $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$  と定める。  
関数  $f$  の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）。 $f(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x + 5 = 2(x^2 - 4x) + 5 \\ &= 2(x^2 - 4x + 4) - 8 + 5 \\ &= 2(x - 2)^2 - 3. \end{aligned}$$

$f$  は、区間  $[1, 2]$  で単調減少であり、区間  $[2, \infty)$  で単調増加である。従って関数  $f$  は 2 において最小値  $f(2) = -3$  をとる。 $f$  の最大値はない。



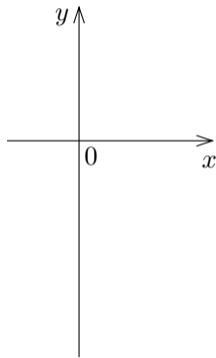
**終**

**問8.4.2** 定義域が区間  $[-1, \infty)$  である 2 次関数  $f$  を  $f(x) = 3x^2 - 6x - 5$  と定める. 関数  $f$  の最大値・最小値を調べよ (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ).

$f(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 6x - 5 \\ &= ( \quad ) - \quad \\ &= \quad . \end{aligned}$$

$f$  は, 区間  $\quad$  で単調減少であり, 区間  $\quad$  で単調増加である. 従って関数  $f$  は  $\quad$  において最 値  $f(\quad) = \quad$  をとる.  $f$  の最 値は  $\quad$

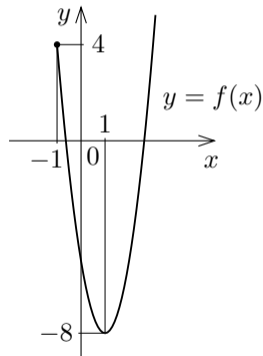


**問8.4.2** 定義域が区間  $[-1, \infty)$  である 2 次関数  $f$  を  $f(x) = 3x^2 - 6x - 5$  と定める. 関数  $f$  の最大値・最小値を調べよ (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ).

$f(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 6x - 5 \\ &= 3(x^2 - 2x + 1) - 3 - 5 \\ &= 3(x - 1)^2 - 8. \end{aligned}$$

$f$  は、区間  $[-1, 1]$  で単調減少であり、区間  $[1, \infty)$  で単調増加である. 従って関数  $f$  は  $x = 1$  において最小値  $f(1) = -8$  をとる.  $f$  の最大値は  $f(-1) = 4$  である.

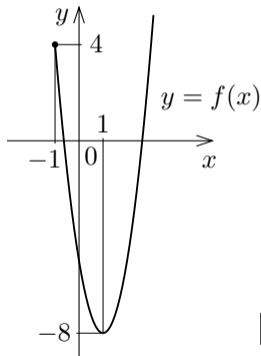


**問8.4.2** 定義域が区間  $[-1, \infty)$  である 2 次関数  $f$  を  $f(x) = 3x^2 - 6x - 5$  と定める. 関数  $f$  の最大値・最小値を調べよ (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ).

$f(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 6x - 5 \\ &= 3(x^2 - 2x + 1) - 3 - 5 \\ &= 3(x - 1)^2 - 8. \end{aligned}$$

$f$  は, 区間  $[-1, 1]$  で単調減少であり, 区間  $[1, \infty)$  で単調増加である. 従って関数  $f$  は 1 において最小値  $f(1) = -8$  をとる.  $f$  の最大値はない.



**終**

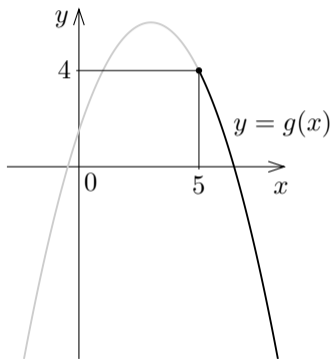
例 定義域が区間  $[5, \infty)$  である 2 次関数  $g$  を  $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2}$  と定める．関数  $g$  の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．

**例** 定義域が区間  $[5, \infty)$  である 2 次関数  $g$  を  $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2}$  と定める．関数  $g$  の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）． $g(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}g(x) &= -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x) + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 6 .\end{aligned}$$

**例** 定義域が区間  $[5, \infty)$  である 2 次関数  $g$  を  $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2}$  と定める．関数  $g$  の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）． $g(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

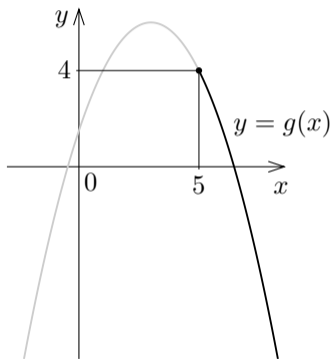
$$\begin{aligned}g(x) &= -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x) + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 6 .\end{aligned}$$



**例** 定義域が区間  $[5, \infty)$  である 2 次関数  $g$  を  $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2}$  と定める．関数  $g$  の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）． $g(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}g(x) &= -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x) + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 6 .\end{aligned}$$

これより， $g$  は区間  $[5, \infty)$  で単調減少である．よって，関数  $g$  は 5 において最大値  $g(5) = 4$  をとる． $g$  の最小値はない．



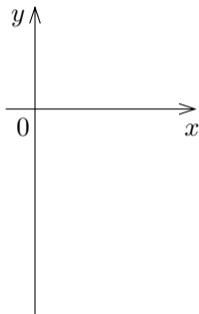
**終**

**問8.4.3** 定義域が区間  $[1, \infty)$  である 2 次関数  $g$  を  $g(x) = -\frac{x^2 + 4x - 11}{3}$  と定める. 関数  $g$  の最大値・最小値を調べよ (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ).

$g(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}
 g(x) &= -\frac{x^2 + 4x - 11}{3} \\
 &= ( \quad ) + \quad + \\
 &= \quad .
 \end{aligned}$$

$g$  は区間  $\quad$  で単調  $\quad$  である. 従って関数  $g$  は  $\quad$  において最 値  $g(\quad) = \quad$  をとる.  $g$  の最 値は  $\quad$

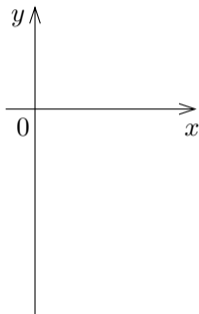


**問8.4.3** 定義域が区間  $[1, \infty)$  である 2 次関数  $g$  を  $g(x) = -\frac{x^2 + 4x - 11}{3}$  と定める. 関数  $g$  の最大値・最小値を調べよ (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ).

$g(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}g(x) &= -\frac{x^2 + 4x - 11}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(x^2 + 4x + 4) + \frac{4}{3} + \frac{11}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(x + 2)^2 + 5.\end{aligned}$$

$g$  は区間            で単調            である. 従って関数  
 $g$  は            において最 値  $g( ) =$             をとる.  $g$  の  
最 値は

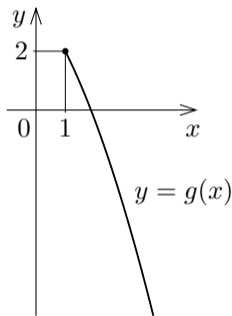


**問8.4.3** 定義域が区間  $[1, \infty)$  である 2 次関数  $g$  を  $g(x) = -\frac{x^2 + 4x - 11}{3}$  と定める. 関数  $g$  の最大値・最小値を調べよ (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ).

$g(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{x^2 + 4x - 11}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(x^2 + 4x + 4) + \frac{4}{3} + \frac{11}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(x + 2)^2 + 5. \end{aligned}$$

$g$  は区間  $[1, \infty)$  で単調  $\searrow$  である. 従って関数  $g$  は  $x=1$  において最 値  $g(1) = 2$  をとる.  $g$  の最 値は  $2$  である.

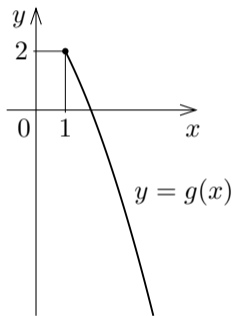


**問8.4.3** 定義域が区間  $[1, \infty)$  である 2 次関数  $g$  を  $g(x) = -\frac{x^2 + 4x - 11}{3}$  と定める. 関数  $g$  の最大値・最小値を調べよ (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ).

$g(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}g(x) &= -\frac{x^2 + 4x - 11}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(x^2 + 4x + 4) + \frac{4}{3} + \frac{11}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(x + 2)^2 + 5.\end{aligned}$$

$g$  は区間  $[1, \infty)$  で単調減少である. 従って関数  $g$  は 1 において最大値  $g(1) = 2$  をとる.  $g$  の最小値はない.



終

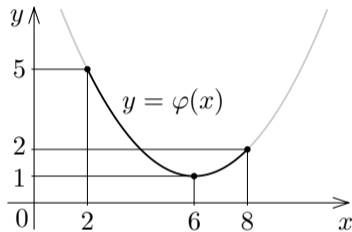
例 定義域が区間  $[2, 8]$  である 2 次関数  $\varphi$  を  $\varphi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 10$  と定める．関数  $\varphi$  の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）．

**例** 定義域が区間  $[2, 8]$  である 2 次関数  $\varphi$  を  $\varphi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 10$  と定める．関数  $\varphi$  の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）． $\varphi(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{4}x^2 - 3x + 10 = \frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 10 \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) - 9 + 10 \\ &= \frac{1}{4}(x - 6)^2 + 1 .\end{aligned}$$

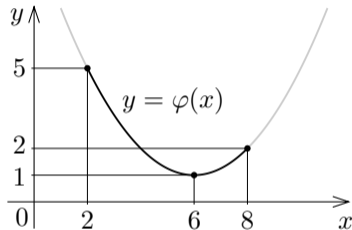
**例** 定義域が区間  $[2, 8]$  である 2 次関数  $\varphi$  を  $\varphi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 10$  と定める．関数  $\varphi$  の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）． $\varphi(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{4}x^2 - 3x + 10 = \frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 10 \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) - 9 + 10 \\ &= \frac{1}{4}(x - 6)^2 + 1 .\end{aligned}$$



**例** 定義域が区間  $[2, 8]$  である 2 次関数  $\varphi$  を  $\varphi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 10$  と定める．関数  $\varphi$  の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）． $\varphi(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{4}x^2 - 3x + 10 = \frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 10 \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) - 9 + 10 \\ &= \frac{1}{4}(x - 6)^2 + 1 .\end{aligned}$$



$\varphi$  は，区間  $[2, 6]$  で単調減少であり，区間  $[6, 8]$  で単調増加である．よって，関数  $\varphi$  は 6 において最小値  $\varphi(6) = 1$  をとる． $\varphi(2) = 5$  ，  $\varphi(8) = 2$  なので， $\varphi$  は 2 において最大値 5 をとる．

**終**

**問8.4.4** 定義域が区間  $[-1, 2]$  である 2 次関数  $\varphi$  を  $\varphi(x) = 3x^2 - 4x - 1$  と定める. 関数  $\varphi$  の最大値・最小値を調べよ (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ).

$\varphi(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

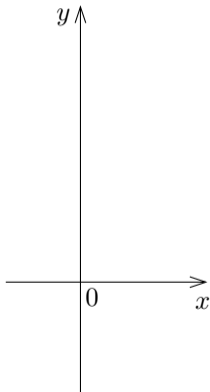
$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 3x^2 - 4x - 1 \\ &= \left\{ \quad \quad \right\} - \quad - \\ &= \quad \quad . \end{aligned}$$

関数  $\varphi$  は, 区間  $[-1, -\frac{2}{3}]$  で単調減少であ

り, 区間  $[-\frac{2}{3}, 2]$  で単調増加である. 従って  $\varphi$

は  $x = -\frac{2}{3}$  において最 値  $\varphi\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{17}{3}$  をとる.

$\varphi(-1) = -2$ ,  $\varphi(2) = 5$  なので,  $\varphi$  は  $x = 2$  において最 値  $\varphi(2) = 5$  をとる.



**問8.4.4** 定義域が区間  $[-1, 2]$  である 2 次関数  $\varphi$  を  $\varphi(x) = 3x^2 - 4x - 1$  と定める. 関数  $\varphi$  の最大値・最小値を調べよ (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ).

$\varphi(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

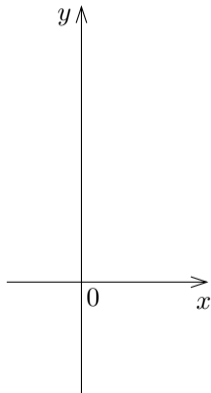
$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 3x^2 - 4x - 1 \\ &= 3\left\{x^2 - \frac{4}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} - \frac{4}{3} - 1 \\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

関数  $\varphi$  は, 区間  $[-1, \frac{2}{3}]$  で単調減少であ

り, 区間  $[\frac{2}{3}, 2]$  で単調増加である. 従って  $\varphi$

は  $x = \frac{2}{3}$  において最 値  $\varphi\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{7}{3}$  をとる.

$\varphi(-1) = -2$ ,  $\varphi(2) = 1$  なので,  $\varphi$  は  $x = -1$  において最 値  $\varphi(-1) = -2$  をとる.



**問8.4.4** 定義域が区間  $[-1, 2]$  である 2 次関数  $\varphi$  を  $\varphi(x) = 3x^2 - 4x - 1$  と定める. 関数  $\varphi$  の最大値・最小値を調べよ (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ).

$\varphi(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

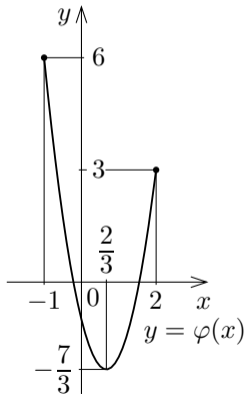
$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 3x^2 - 4x - 1 \\ &= 3\left\{x^2 - \frac{4}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} - \frac{4}{3} - 1 \\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

関数  $\varphi$  は, 区間  $[-1, \frac{2}{3}]$  で単調減少であ

り, 区間  $[\frac{2}{3}, 2]$  で単調増加である. 従って  $\varphi$

は  $x = -1$  において最 値  $\varphi(-1) = 6$  をとる.

$\varphi(\frac{2}{3}) = -\frac{7}{3}$ ,  $\varphi(2) = 3$  なので,  $\varphi$  は  $x = \frac{2}{3}$  において最 値  $\varphi(\frac{2}{3}) = -\frac{7}{3}$  をとる.



**問8.4.4** 定義域が区間  $[-1, 2]$  である 2 次関数  $\varphi$  を  $\varphi(x) = 3x^2 - 4x - 1$  と定める. 関数  $\varphi$  の最大値・最小値を調べよ (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ).

$\varphi(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

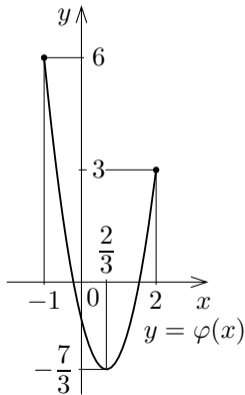
$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 3x^2 - 4x - 1 \\ &= 3\left\{x^2 - \frac{4}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} - \frac{4}{3} - 1 \\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

関数  $\varphi$  は, 区間  $\left[-1, \frac{2}{3}\right]$  で単調減少であ

り, 区間  $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$  で単調増加である. 従って  $\varphi$

は  $\frac{2}{3}$  において最小値  $\varphi\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{7}{3}$  をとる.

$\varphi(-1) = 6$ ,  $\varphi(2) = 3$  なので,  $\varphi$  は  $-1$  において最大値  $6$  をとる.



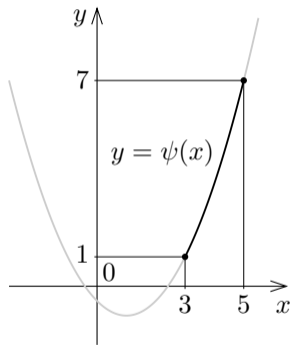
例 定義域が区間  $[3, 5]$  である 2 次関数  $\psi$  を  $\psi(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$  と定める.  
関数  $\psi$  の最大値・最小値を調べる (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる).

**例** 定義域が区間  $[3, 5]$  である 2 次関数  $\psi$  を  $\psi(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$  と定める.  
関数  $\psi$  の最大値・最小値を調べる (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる).  $\psi(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - 2x) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 1 .\end{aligned}$$

**例** 定義域が区間  $[3, 5]$  である 2 次関数  $\psi$  を  $\psi(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$  と定める.  
関数  $\psi$  の最大値・最小値を調べる (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる).  $\psi(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

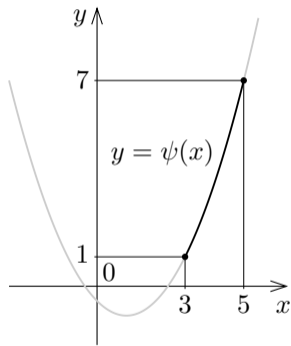
$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - 2x) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 1 .\end{aligned}$$



**例** 定義域が区間  $[3, 5]$  である 2 次関数  $\psi$  を  $\psi(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$  と定める。  
関数  $\psi$  の最大値・最小値を調べる（どの実数において最大値・最小値をとるかも調べる）。 $\psi(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - 2x) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 1.\end{aligned}$$

$\psi$  は区間  $[3, 5]$  で単調増加である。従って関数  $\psi$  は、3 において最小値  $\psi(3) = 1$  をとり、5 において最大値  $\psi(5) = 7$  をとる。



**終**

**問8.4.5** 定義域が区間  $[-1, 2]$  である 2 次関数  $\psi$  を  $\psi(x) = -2x^2 + 10x - 5$  と定める. 関数  $\psi$  の最大値・最小値を調べよ (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ).

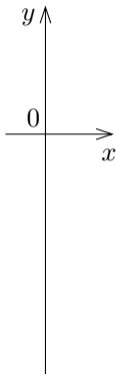
$\psi(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\psi(x) = -2x^2 + 10x - 5$$

$$= \left\{ \quad \right\} + \quad -$$

$$= \quad .$$

$\psi$  は区間  $[-1, 2]$  で単調  $\nearrow$  である. 従って関数  $\psi$  は,  $x = 1$  において最大値  $\psi(1) = 4$  をとり,  $x = -1$  において最小値  $\psi(-1) = -12$  をとる.

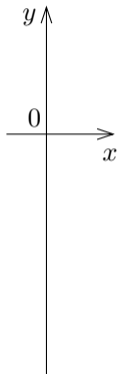


**問8.4.5** 定義域が区間  $[-1, 2]$  である 2 次関数  $\psi$  を  $\psi(x) = -2x^2 + 10x - 5$  と定める. 関数  $\psi$  の最大値・最小値を調べよ (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ).

$\psi(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -2x^2 + 10x - 5 \\ &= -2\left\{x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right\} + \frac{25}{2} - 5 \\ &= -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}.\end{aligned}$$

$\psi$  は区間  $[-1, 2]$  で単調  $\searrow$  である. 従って関数  $\psi$  は,  $x = -1$  において最大値  $\psi(-1) = 2$  をとり,  $x = 2$  において最小値  $\psi(2) = -5$  をとる.

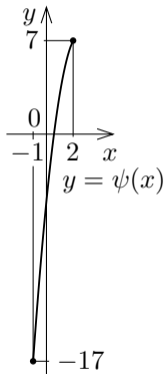


**問8.4.5** 定義域が区間  $[-1, 2]$  である 2 次関数  $\psi$  を  $\psi(x) = -2x^2 + 10x - 5$  と定める. 関数  $\psi$  の最大値・最小値を調べよ (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ).

$\psi(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -2x^2 + 10x - 5 \\ &= -2\left\{x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right\} + \frac{25}{2} - 5 \\ &= -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}.\end{aligned}$$

$\psi$  は区間  $[-1, 2]$  で単調  $\nearrow$  である. 従って関数  $\psi$  は,  $x = -1$  において最大値  $\psi(-1) = 7$  をとり,  $x = 2$  において最小値  $\psi(2) = -17$  をとる.

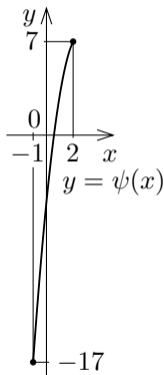


**問8.4.5** 定義域が区間  $[-1, 2]$  である 2 次関数  $\psi$  を  $\psi(x) = -2x^2 + 10x - 5$  と定める. 関数  $\psi$  の最大値・最小値を調べよ (どの実数において最大値・最小値をとるかも調べよ).

$\psi(x)$  の値を表す 2 次式を平方完成すると

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -2x^2 + 10x - 5 \\ &= -2\left\{x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right\} + \frac{25}{2} - 5 \\ &= -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}.\end{aligned}$$

$\psi$  は区間  $[-1, 2]$  で単調増加である. 従って関数  $\psi$  は, 2 において最大値  $\psi(2) = 7$  をとり,  $-1$  において最小値  $\psi(-1) = -17$  をとる.



終