

## 8.3 関数の単調増加・単調減少

関数  $f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  の値を大きくすると常に  $f(x)$  の値も大きくなるとき、 $f$  は単調増加であるという。

関数  $f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  の値を大きくすると常に  $f(x)$  の値も大きくなるとき、 $f$  は単調増加であるという。また、変数  $x$  の値を大きくすると常に  $f(x)$  の値が小さくなるとき、 $f$  は単調減少であるという。

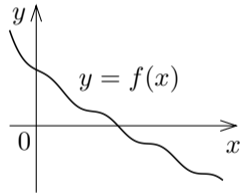
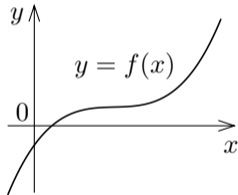
関数  $f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  の値を大きくすると常に  $f(x)$  の値も大きくなるとき、 $f$  は単調増加であるという。また、変数  $x$  の値を大きくすると常に  $f(x)$  の値が小さくなるとき、 $f$  は単調減少であるという。正確な定義は次のようになる。

[定義] 関数  $f$  が単調増加であるとは、

$f$  の定義域の任意の要素  $u$  と  $v$  について  $u < v$  ならば  $f(u) < f(v)$  となることである。関数  $f$  が単調減少であるとは、

$f$  の定義域の任意の要素  $u$  と  $v$  について  $u < v$  ならば  $f(u) > f(v)$  となることである。

関数  $f$  の独立変数を  $x$  とおき従属変数を  $y$  とおく.  $xy$  座標平面における関数  $y = f(x)$  のグラフを考える. 関数  $f$  が単調増加であるとき,  $x$  の値を大きくすると  $y = f(x)$  の値も大きくなるので,  $y = f(x)$  のグラフは右上がりになる. 関数  $f$  が単調減少であるとき,  $x$  の値を大きくすると  $y = f(x)$  の値は小さくなるので,  $y = f(x)$  のグラフは右下がりになる.



単調増加である関数  $f$  のグラフの例    単調減少である関数  $f$  のグラフの例

例 定義域が実数全体である関数  $3x - 2$  を  $f$  とおく :  $f(x) = 3x - 2$  .

**例** 定義域が実数全体である関数  $3x-2$  を  $f$  とおく： $f(x) = 3x-2$  . 任意の実数  $u, v$  について,  $u < v$  ならば,  $3u < 3v$  なので  $3u-2 < 3v-2$  つまり  $f(u) < f(v)$  .

**例** 定義域が実数全体である関数  $3x-2$  を  $f$  とおく： $f(x) = 3x-2$  . 任意の実数  $u, v$  について,  $u < v$  ならば,  $3u < 3v$  なので  $3u-2 < 3v-2$  つまり  $f(u) < f(v)$  . 従って関数  $f$  は単調増加である. **終**

**問8.3** 定義域が実数全体である関数  $f$  を  $f(x) = -2x + 5$  と定める. 関数  $f$  は単調減少であることを示せ.

任意の実数  $u, v$  について,  $u < v$  ならば,  $-2u > -2v$  なので  $-2u + 5 > -2v + 5$  つまり  $f(u) > f(v)$ . 従って関数  $f$  は単調減少である.

**問8.3** 定義域が実数全体である関数  $f$  を  $f(x) = -2x + 5$  と定める. 関数  $f$  は単調減少であることを示せ.

任意の実数  $u, v$  について,  $u < v$  ならば,  $-2u > -2v$  なので  $-2u + 5 > -2v + 5$  つまり  $f(u) > f(v)$ . 従って関数  $f$  は単調減少である. **終**

関数の定義域の一部分における単調増加・単調減少を考えることもある。

[定義] 関数  $f$  の定義域は集合  $S$  を含むとする.  $f$  が  $S$  において単調増加であるとは,

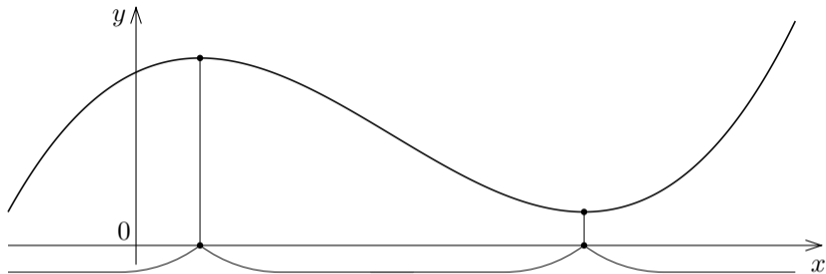
$S$  の任意の要素  $u$  と  $v$  について  $u < v$  ならば  $f(u) < f(v)$

となることである.  $f$  が  $S$  において単調減少であるとは,

$S$  の任意の要素  $u$  と  $v$  について  $u < v$  ならば  $f(u) > f(v)$

となることである.

関数のグラフでは例えば次のようになる。



この区間で単調増加

この区間で単調減少

この区間で単調増加

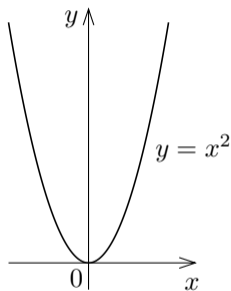
[定理 6.1.4] 任意の実数  $a$  と  $b$  について,

$$0 \leq a < b \text{ ならば } a^2 < b^2, \quad 0 \leq a \leq b \text{ ならば } a^2 \leq b^2 .$$

[定理 6.1.4] 任意の実数  $a$  と  $b$  について,

$$0 \leq a < b \text{ ならば } a^2 < b^2, \quad 0 \leq a \leq b \text{ ならば } a^2 \leq b^2.$$

[例] 定義域が実数全体である 2 次関数  $x^2$  を  $f$  とおく:  $f(x) = x^2$ . この関数  $f$  は, 区間  $(-\infty, 0]$  において単調減少であり, 区間  $[0, \infty)$  において単調増加である. このことを示す.

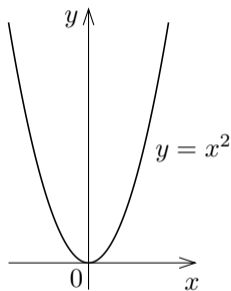


[定理 6.1.4] 任意の実数  $a$  と  $b$  について,

$$0 \leq a < b \text{ ならば } a^2 < b^2, \quad 0 \leq a \leq b \text{ ならば } a^2 \leq b^2.$$

[例] 定義域が実数全体である 2 次関数  $x^2$  を  $f$  とおく:  $f(x) = x^2$ . この関数  $f$  は, 区間  $(-\infty, 0]$  において単調減少であり, 区間  $[0, \infty)$  において単調増加である. このことを示す.

区間  $[0, \infty)$  の任意の実数  $u, v$  について,  $u < v$  ならば,  $0 \leq u < v$  なので, 定理 6.1.4 により  $u^2 < v^2$  つまり  $f(u) < f(v)$ .

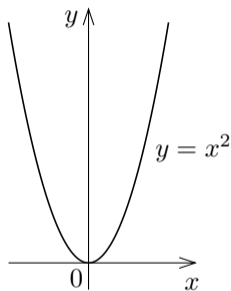


[定理 6.1.4] 任意の実数  $a$  と  $b$  について,

$$0 \leq a < b \text{ ならば } a^2 < b^2, \quad 0 \leq a \leq b \text{ ならば } a^2 \leq b^2.$$

[例] 定義域が実数全体である 2 次関数  $x^2$  を  $f$  とおく:  $f(x) = x^2$ . この関数  $f$  は, 区間  $(-\infty, 0]$  において単調減少であり, 区間  $[0, \infty)$  において単調増加である. このことを示す.

区間  $[0, \infty)$  の任意の実数  $u, v$  について,  $u < v$  ならば,  $0 \leq u < v$  なので, 定理 6.1.4 により  $u^2 < v^2$  つまり  $f(u) < f(v)$ . 故に関数  $f$  は  $[0, \infty)$  において単調増加である.



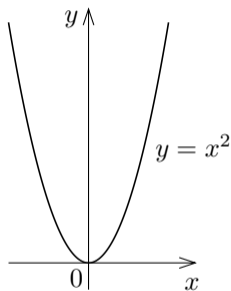
[定理 6.1.4] 任意の実数  $a$  と  $b$  について,

$$0 \leq a < b \text{ ならば } a^2 < b^2, \quad 0 \leq a \leq b \text{ ならば } a^2 \leq b^2.$$

[例] 定義域が実数全体である 2 次関数  $x^2$  を  $f$  とおく:  $f(x) = x^2$ . この関数  $f$  は, 区間  $(-\infty, 0]$  において単調減少であり, 区間  $[0, \infty)$  において単調増加である. このことを示す.

区間  $[0, \infty)$  の任意の実数  $u, v$  について,  $u < v$  ならば,  $0 \leq u < v$  なので, 定理 6.1.4 により  $u^2 < v^2$  つまり  $f(u) < f(v)$ . 故に関数  $f$  は  $[0, \infty)$  において単調増加である.

区間  $(-\infty, 0]$  の任意の実数  $u, v$  をとる.  $v \leq 0$  なので  $-v \geq 0$ .



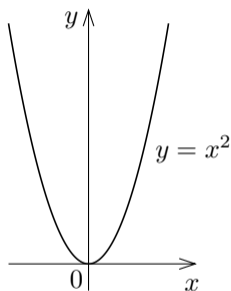
[定理 6.1.4] 任意の実数  $a$  と  $b$  について,

$$0 \leq a < b \text{ ならば } a^2 < b^2, \quad 0 \leq a \leq b \text{ ならば } a^2 \leq b^2.$$

[例] 定義域が実数全体である 2 次関数  $x^2$  を  $f$  とおく:  $f(x) = x^2$ . この関数  $f$  は, 区間  $(-\infty, 0]$  において単調減少であり, 区間  $[0, \infty)$  において単調増加である. このことを示す.

区間  $[0, \infty)$  の任意の実数  $u, v$  について,  $u < v$  ならば,  $0 \leq u < v$  なので, 定理 6.1.4 により  $u^2 < v^2$  つまり  $f(u) < f(v)$ . 故に関数  $f$  は  $[0, \infty)$  において単調増加である.

区間  $(-\infty, 0]$  の任意の実数  $u, v$  をとる.  $v \leq 0$  なので  $-v \geq 0$ .  $u < v$  ならば,  $-u > -v$  なので  $-u > -v \geq 0$ , 定理 6.1.4 により  $(-u)^2 > (-v)^2$ , よって  $u^2 > v^2$  つまり  $f(u) > f(v)$ .



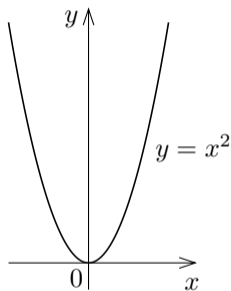
[定理 6.1.4] 任意の実数  $a$  と  $b$  について,

$$0 \leq a < b \text{ ならば } a^2 < b^2, \quad 0 \leq a \leq b \text{ ならば } a^2 \leq b^2.$$

[例] 定義域が実数全体である 2 次関数  $x^2$  を  $f$  とおく:  $f(x) = x^2$ . この関数  $f$  は, 区間  $(-\infty, 0]$  において単調減少であり, 区間  $[0, \infty)$  において単調増加である. このことを示す.

区間  $[0, \infty)$  の任意の実数  $u, v$  について,  $u < v$  ならば,  $0 \leq u < v$  なので, 定理 6.1.4 により  $u^2 < v^2$  つまり  $f(u) < f(v)$ . 故に関数  $f$  は  $[0, \infty)$  において単調増加である.

区間  $(-\infty, 0]$  の任意の実数  $u, v$  をとる.  $v \leq 0$  なので  $-v \geq 0$ .  $u < v$  ならば,  $-u > -v$  なので  $-u > -v \geq 0$ , 定理 6.1.4 により  $(-u)^2 > (-v)^2$ , よって  $u^2 > v^2$  つまり  $f(u) > f(v)$ . 故に関数  $f$  は  $(-\infty, 0]$  において単調減少である.



[定理 6.1.6] 任意の実数  $a$  と  $b$  について,

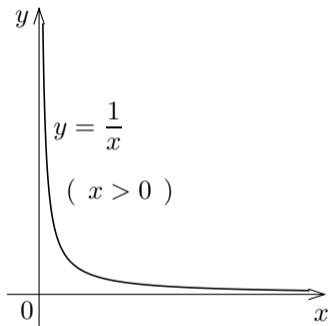
$$0 < a < b \text{ ならば } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}, \quad 0 < a \leq b \text{ ならば } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} .$$

[定理 6.1.6] 任意の実数  $a$  と  $b$  について,

$$0 < a < b \text{ ならば } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}, \quad 0 < a \leq b \text{ ならば } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} .$$

[例] 定義域が区間  $(0, \infty)$  である関数  $\frac{1}{x}$

を  $f$  とおく:  $f(x) = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ). この関数  $f$  は単調減少である. このことを示す.



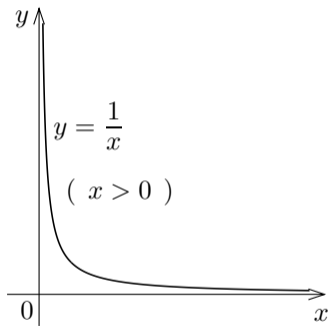
[定理 6.1.6] 任意の実数  $a$  と  $b$  について,

$$0 < a < b \text{ ならば } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}, \quad 0 < a \leq b \text{ ならば } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} .$$

[例] 定義域が区間  $(0, \infty)$  である関数  $\frac{1}{x}$

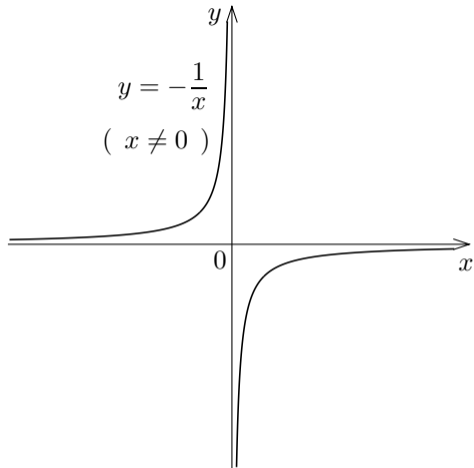
を  $f$  とおく:  $f(x) = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ). この関数  $f$  は単調減少である. このことを示す.

定義域  $(0, \infty)$  の任意の実数  $u$  と  $v$  について,  $u < v$  ならば,  $0 < u < v$  なので, 定理 6.1.6 により  $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$  つまり  $f(u) > f(v)$ . 故に関数  $f$  は単調減少である.

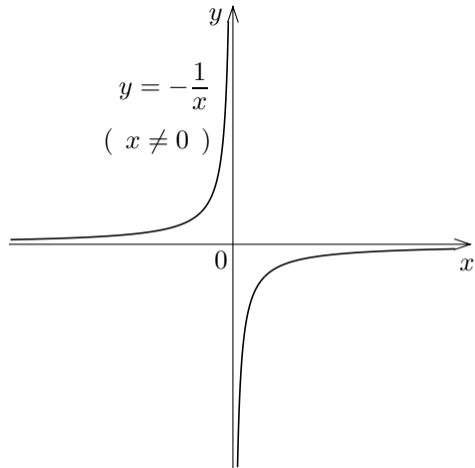


終

例 定義域が 0 以外の実数の  
全体である関数  $-\frac{1}{x}$  を  $f$  と  
おく:  $f(x) = -\frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ).



**例** 定義域が 0 以外の実数の全体である関数  $-\frac{1}{x}$  を  $f$  とおく： $f(x) = -\frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ) .  
この関数は，正の実数の全体  $(0, \infty)$  において単調増加であり，負の実数の全体  $(-\infty, 0)$  において単調増加である.



**例** 定義域が 0 以外の実数の全体である関数  $-\frac{1}{x}$  を  $f$  とおく： $f(x) = -\frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ) .  
この関数は，正の実数の全体  $(0, \infty)$  において単調増加であり，負の実数の全体  $(-\infty, 0)$  において単調増加である．しかし，例えば  $-3 < 2$  だが  $f(-3) > f(2)$  なので，定義域全体では単調増加でない．

