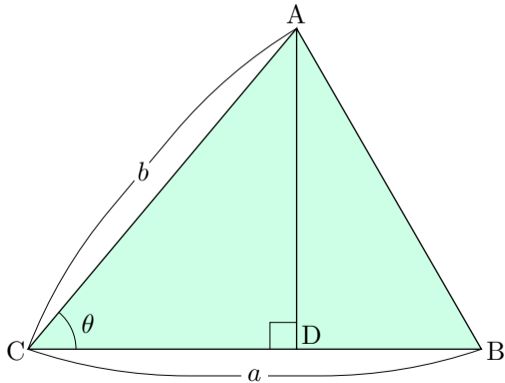


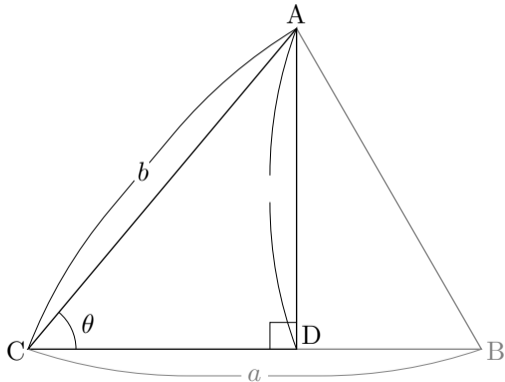
7.7 三角形の面積と正弦定理

三角形 ABC において角 ACB が鋭角であるとする． $\theta = \angle ACB$ ，
 $a = \overline{BC}$ ， $b = \overline{AC}$ とおき，頂点 A から直線 BC に下した垂線の足を D と
おく．



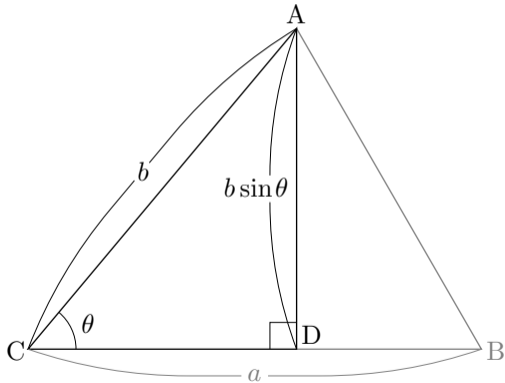
三角形 ABC において角 ACB が鋭角であるとする． $\theta = \angle ACB$ ，
 $a = \overline{BC}$ ， $b = \overline{AC}$ とおき，頂点 A から直線 BC に下した垂線の足を D と
おく． 三角形 ACD において，角 ADC が直角なので，

$$\overline{AD} =$$



三角形 ABC において角 ACB が鋭角であるとする． $\theta = \angle ACB$ ，
 $a = \overline{BC}$ ， $b = \overline{AC}$ とおき，頂点 A から直線 BC に下した垂線の足を D と
おく． 三角形 ACD において，角 ADC が直角なので，

$$\overline{AD} = b \sin \theta .$$

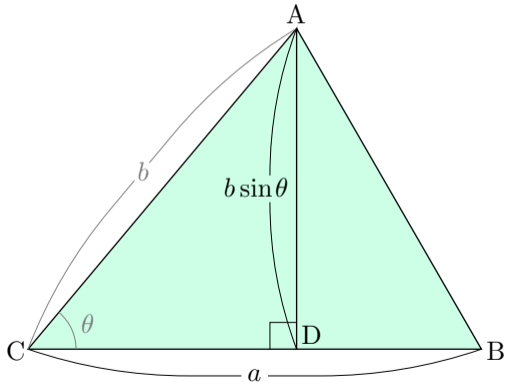


三角形 ABC において角 ACB が鋭角であるとする． $\theta = \angle ACB$ ，
 $a = \overline{BC}$ ， $b = \overline{AC}$ とおき，頂点 A から直線 BC に下した垂線の足を D と
おく． 三角形 ACD において，角 ADC が直角なので，

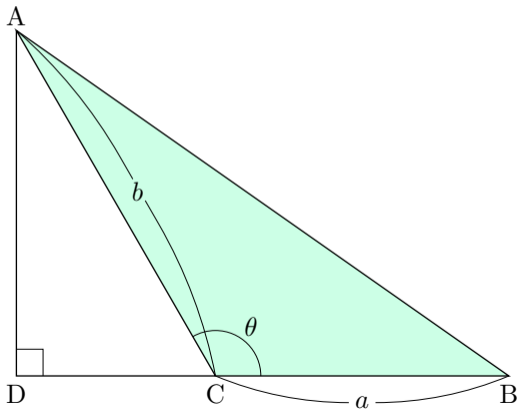
$$\overline{AD} = b \sin \theta .$$

三角形 ABC で囲まれる領
域の面積は

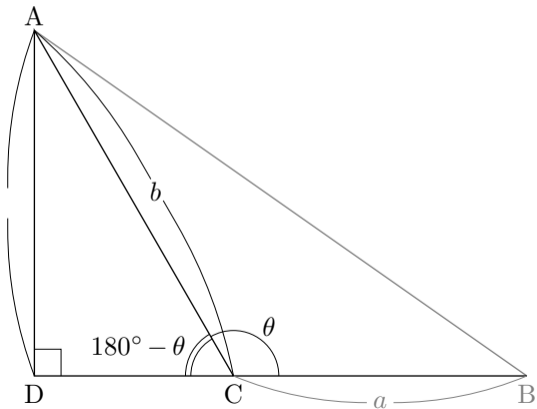
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AD} &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} ab \sin \theta . \end{aligned}$$



三角形 ABC において角 ACB が鈍角であるとする. $\theta = \angle ACB$,
 $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ とおき, 頂点 C から直線 BC に下した垂線の足を D と
おく.



三角形 ABC において角 ACB が鈍角であるとする． $\theta = \angle ACB$ ，
 $a = \overline{BC}$ ， $b = \overline{AC}$ とおき，頂点 C から直線 BC に下した垂線の足を D と
おく． 三角形 ACD において，角 ADC が直角で， $\angle ACD = 180^\circ - \theta$ なので，
 $\overline{AD} = b \sin(180^\circ - \theta)$

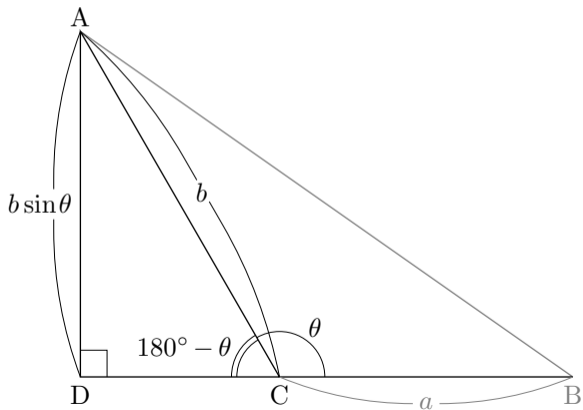


三角形 ABC において角 ACB が鈍角であるとする． $\theta = \angle ACB$ ，
 $a = \overline{BC}$ ， $b = \overline{AC}$ とおき，頂点 C から直線 BC に下した垂線の足を D と
おく．三角形 ACD において，角 ADC が直角で， $\angle ACD = 180^\circ - \theta$ なので，

$$\overline{AD} = b \sin(180^\circ - \theta)$$

$$= b \sin \theta .$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$



三角形 ABC において角 ACB が鈍角であるとする． $\theta = \angle ACB$ ，
 $a = \overline{BC}$ ， $b = \overline{AC}$ とおき，頂点 C から直線 BC に下した垂線の足を D と
おく．三角形 ACD において，角 ADC が直角で， $\angle ACD = 180^\circ - \theta$ なので，

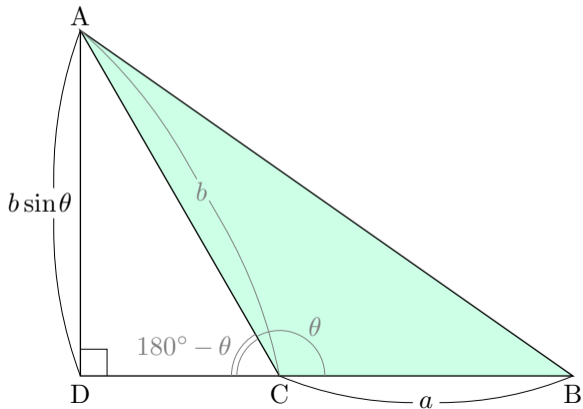
$$\overline{AD} = b \sin(180^\circ - \theta)$$

$$= b \sin \theta .$$

三角形 ABC で囲まれる領
域の面積は

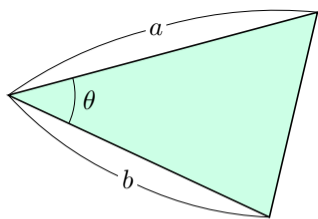
$$\frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} ab \sin \theta .$$



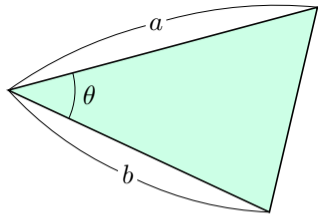
[三角形の面積の公式] 三角形の2辺の
各々の長さが a と b とでその2辺が
成す角の大きさが θ であるとき、この
三角形で囲まれる領域の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \theta .$$



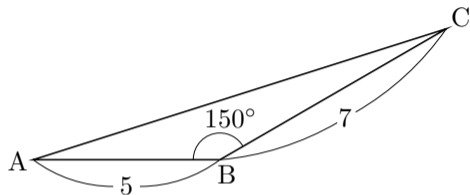
[三角形の面積の公式] 三角形の2辺の各々の長さが a と b とでその2辺が成す角の大きさが θ であるとき, この三角形で囲まれる領域の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \theta .$$



この定理により, 三角形の2辺の長さとその2辺が成す角の大きさとからその三角形の面積を計算できる.

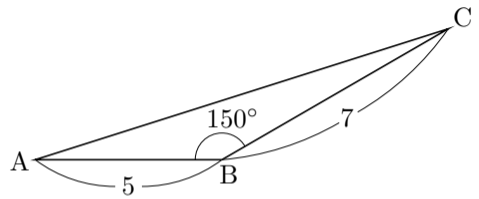
例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 5$ かつ $\overline{BC} = 7$ かつ $\angle ABC = 150^\circ$ とする. 三角形 ABC の面積を求める.



例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AB} = 5$ かつ $\overline{BC} = 7$ かつ $\angle ABC = 150^\circ$ とする. 三角形 ABC の面積を求める.

$$\sin 150^\circ = \sin(60^\circ + 90^\circ) = \cos 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta$$

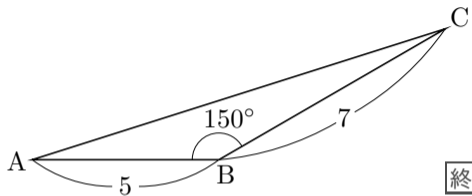


例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 5$ かつ $\overline{BC} = 7$ かつ $\angle ABC = 150^\circ$ とする. 三角形 ABC の面積を求める.

$$\begin{aligned}\sin 150^\circ &= \sin(60^\circ + 90^\circ) = \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

三角形 ABC の面積は

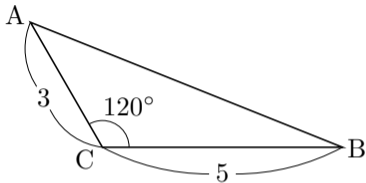
$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin 150^\circ = \frac{35}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{4}.$$



終

問7.7.1 相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AC} = 3$ かつ $\overline{BC} = 5$ かつ $\angle ACB = 120^\circ$ とする. 三角形 ABC の面積を求めよ.

$$\sin 120^\circ = \quad \quad 30^\circ =$$

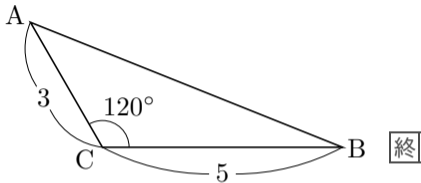


問7.7.1 相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AC} = 3$ かつ $\overline{BC} = 5$ かつ $\angle ACB = 120^\circ$ とする. 三角形 ABC の面積を求めよ.

$$\sin 120^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

三角形 ABC の面積は

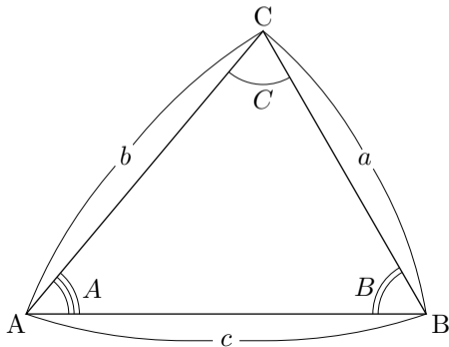
$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = \frac{15}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{4} \sqrt{3} .$$



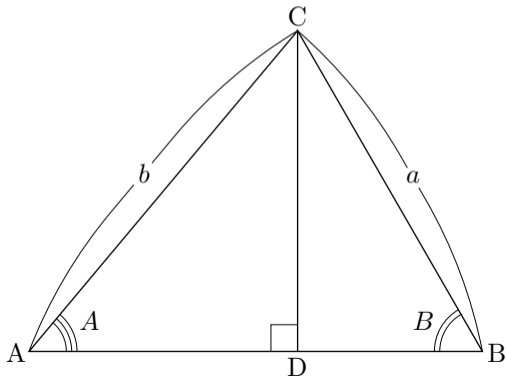
終

相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、辺の長さ及び角の大きさを次のようにおくことが多い：

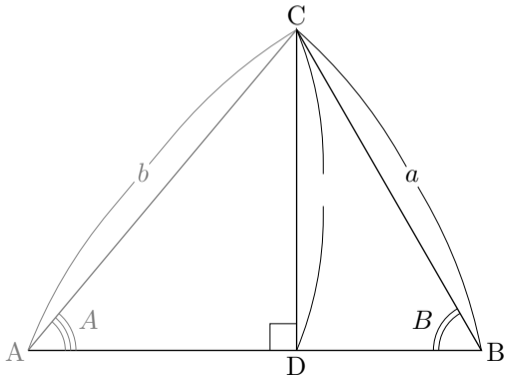
$$a = \overline{BC}, \quad b = \overline{AC}, \quad c = \overline{AB},$$
$$A = \angle BAC, \quad B = \angle ABC, \quad C = \angle ACB.$$



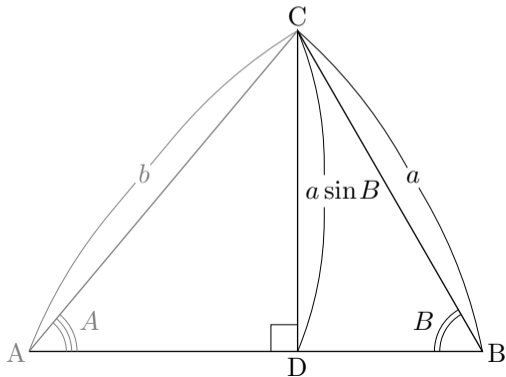
鋭角三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ とおく. 頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく.



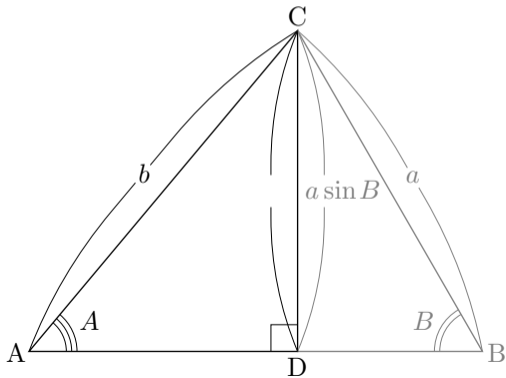
鋭角三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ とおく. 頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく. 三角形 BCD において, 角 BDC が直角なので, $\overline{CD} =$.



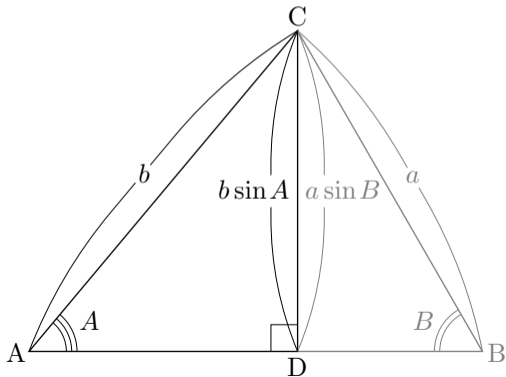
鋭角三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ とおく. 頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく. 三角形 BCD において, 角 BDC が直角なので, $\overline{CD} = a \sin B$.



鋭角三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$
 とおく. 頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく. 三角形 BCD において,
 角 BDC が直角なので, $\overline{CD} = a \sin B$. 三角形 ACD において, 角
 ADC が直角なので, $\overline{CD} =$.

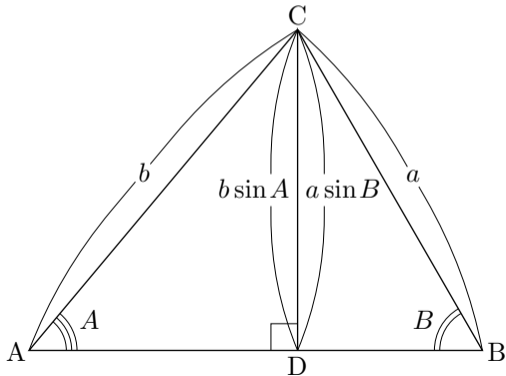


鋭角三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ とおく．頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 BCD において，角 BDC が直角なので， $\overline{CD} = a \sin B$. 三角形 ACD において，角 ADC が直角なので， $\overline{CD} = b \sin A$.

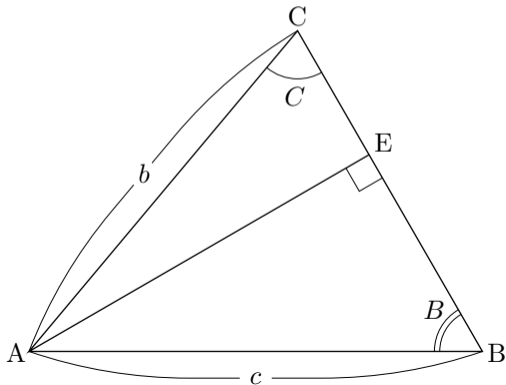


鋭角三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ とおく. 頂点 C から辺 AB に下した垂線の足を D とおく. 三角形 BCD において, 角 BDC が直角なので, $\overline{CD} = a \sin B$. 三角形 ACD において, 角 ADC が直角なので, $\overline{CD} = b \sin A$. よって,

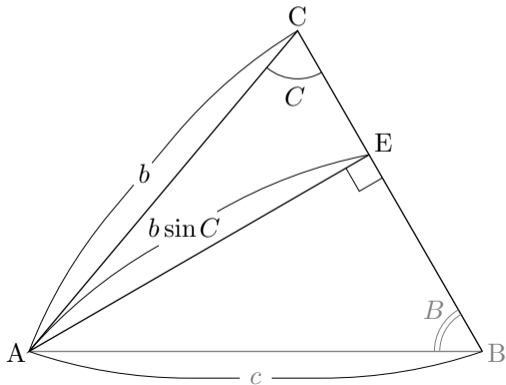
$$a \sin B = b \sin A .$$



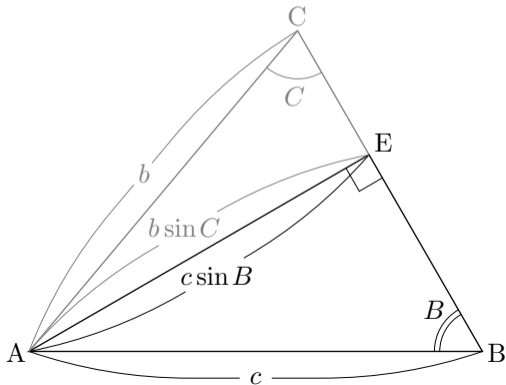
鋭角三角形 ABC において $B = \angle ABC$, $C = \angle ACB$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく. 頂点 A から辺 BC に下した垂線の足を E とおく.



鋭角三角形 ABC において $B = \angle ABC$, $C = \angle ACB$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく. 頂点 A から辺 BC に下した垂線の足を E とおく. 三角形 ACE において, 角 AEC が直角なので, $\overline{AE} = b \sin C$.

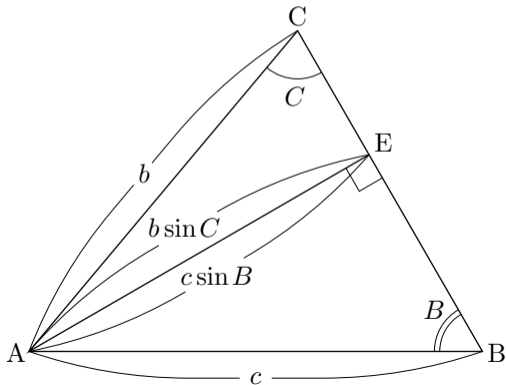


鋭角三角形 ABC において $B = \angle ABC$, $C = \angle ACB$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく. 頂点 A から辺 BC に下した垂線の足を E とおく. 三角形 ACE において, 角 AEC が直角なので, $\overline{AE} = b \sin C$. 三角形 ABE において, 角 AEB が直角なので, $\overline{AE} = c \sin B$.

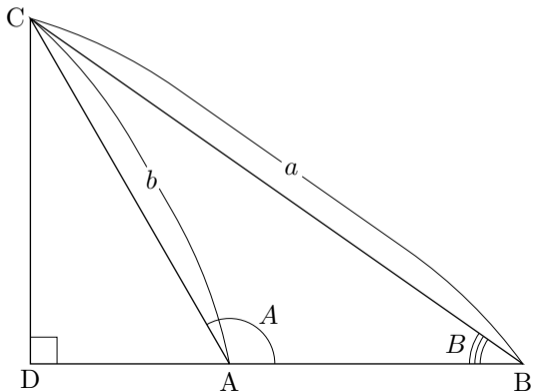


鋭角三角形 ABC において $B = \angle ABC$, $C = \angle ACB$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく．頂点 A から辺 BC に下した垂線の足を E とおく．三角形 ACE において，角 AEC が直角なので， $\overline{AE} = b \sin C$ ．三角形 ABE において，角 AEB が直角なので， $\overline{AE} = c \sin B$ ．よって，

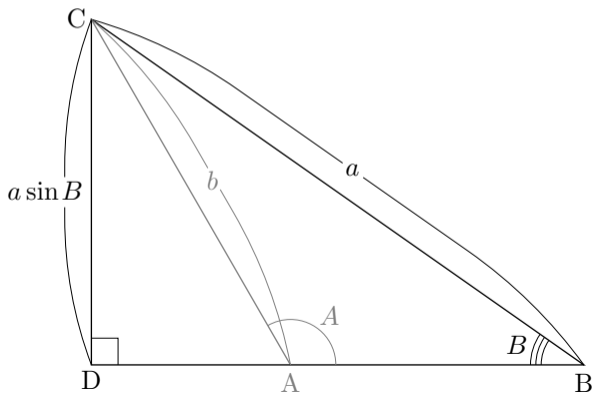
$$b \sin C = c \sin B .$$



三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ とおく. 角 BAC が鈍角であるとする. 頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D とおく.

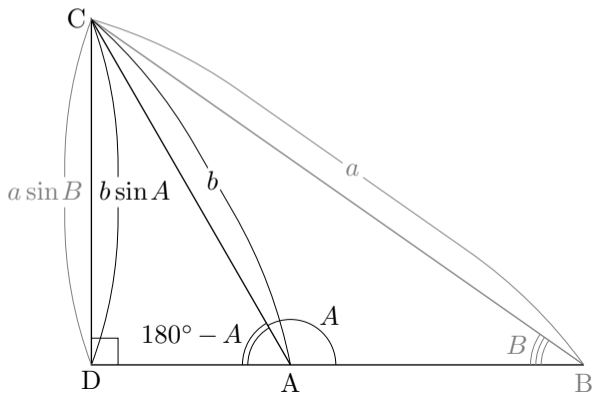


三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ とおく．角 BAC が鈍角であるとする．頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D とおく．三角形 BCD において，角 BDC が直角なので， $\overline{CD} = a \sin B$ ．



三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ とおく。角 BAC が鈍角であるとする。頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D とおく。三角形 BCD において、角 BDC が直角なので、 $\overline{CD} = a \sin B$ 。
 三角形 ACD において、角 ADC が直角で、 $\angle CAD = 180^\circ - A$ なので、

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= b \sin(180^\circ - A) \\ &= b \sin A . \end{aligned}$$

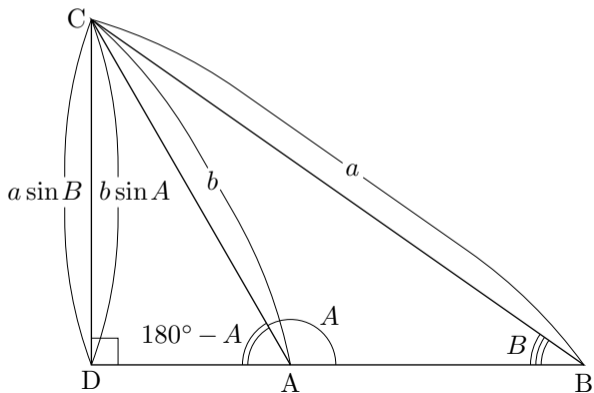


三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ とおく。角 BAC が鈍角であるとする。頂点 C から直線 AB に下した垂線の足を D とおく。三角形 BCD において、角 BDC が直角なので、 $\overline{CD} = a \sin B$ 。
 三角形 ACD において、角 ADC が直角で、 $\angle CAD = 180^\circ - A$ なので、

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= b \sin(180^\circ - A) \\ &= b \sin A . \end{aligned}$$

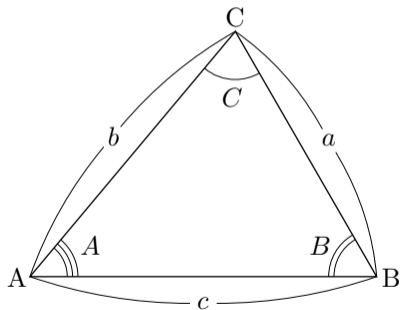
よって、

$$a \sin B = b \sin A .$$



三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$, $C = \angle ACB$, $a = \overline{BC}$,
 $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.

$$a \sin B = b \sin A , \quad b \sin C = c \sin B .$$



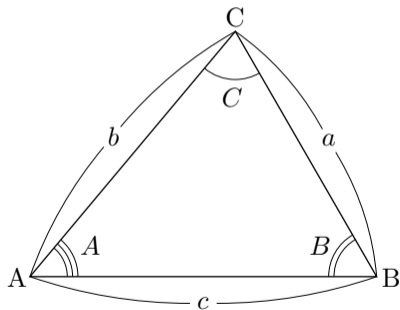
三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$, $C = \angle ACB$, $a = \overline{BC}$,
 $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.

$$a \sin B = b \sin A , \quad b \sin C = c \sin B .$$

$a \sin B = b \sin A$ より,

$$\frac{a \sin B}{\sin A \sin B} = \frac{b \sin A}{\sin A \sin B} ,$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} .$$



三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$, $C = \angle ACB$, $a = \overline{BC}$,
 $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.

$$a \sin B = b \sin A , \quad b \sin C = c \sin B .$$

$a \sin B = b \sin A$ より,

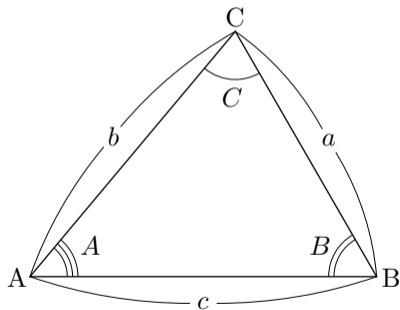
$$\frac{a \sin B}{\sin A \sin B} = \frac{b \sin A}{\sin A \sin B} ,$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} .$$

$b \sin C = c \sin B$ より,

$$\frac{b \sin C}{\sin B \sin C} = \frac{c \sin B}{\sin B \sin C} ,$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} .$$



三角形 ABC において $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$, $C = \angle ACB$, $a = \overline{BC}$,
 $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ とおく.

$$a \sin B = b \sin A , \quad b \sin C = c \sin B .$$

$a \sin B = b \sin A$ より,

$$\frac{a \sin B}{\sin A \sin B} = \frac{b \sin A}{\sin A \sin B} ,$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} .$$

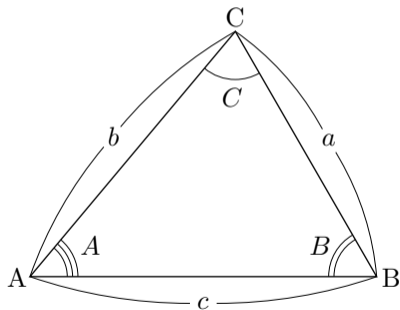
$b \sin C = c \sin B$ より,

$$\frac{b \sin C}{\sin B \sin C} = \frac{c \sin B}{\sin B \sin C} ,$$

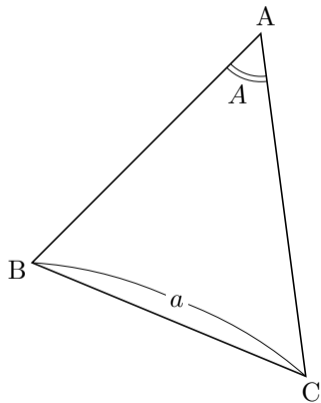
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} .$$

故に

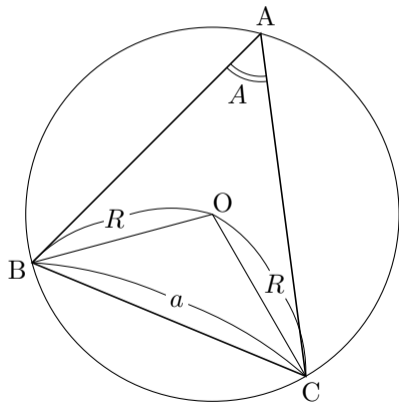
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} .$$



三角形 ABC の 3 個の角のうち少なくとも 2 個は鋭角である. 三角形 ABC の角 BAC が鋭角であるとする.

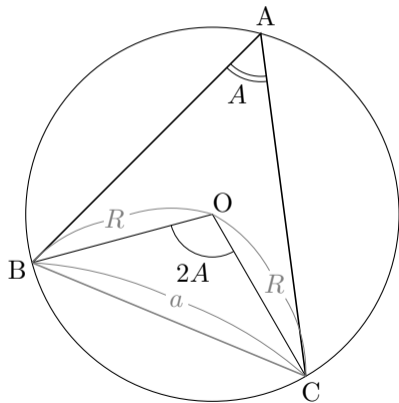


三角形 ABC の 3 個の角のうち少なくとも 2 個は鋭角である. 三角形 ABC の角 BAC が鋭角であるとする. 三角形 ABC の外接円の中心を O とおき, 外接円の半径を R とおく.



三角形 ABC の 3 個の角のうち少なくとも 2 個は鋭角である．三角形 ABC の角 BAC が鋭角であるとする．三角形 ABC の外接円の中心を O とおき，外接円の半径を R とおく．この外接円において，弧 BC に対する中心角の大きさ $\angle BOC$ は弧 BC に対する円周角の大きさ $\angle BAC = A$ の 2 倍である：

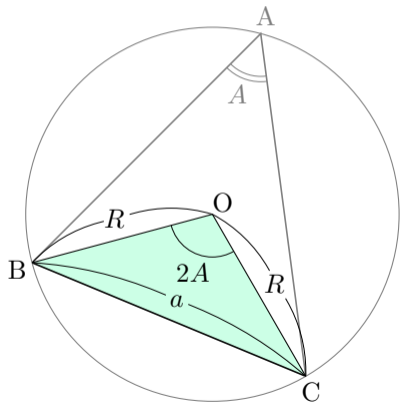
$$\angle BOC = 2\angle BAC = 2A .$$



三角形 ABC の 3 個の角のうち少なくとも 2 個は鋭角である．三角形 ABC の角 BAC が鋭角であるとする．三角形 ABC の外接円の中心を O とおき，外接円の半径を R とおく．この外接円において，弧 BC に対する中心角の大きさ $\angle BOC$ は弧 BC に対する円周角の大きさ $\angle BAC = A$ の 2 倍である：

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 2A .$$

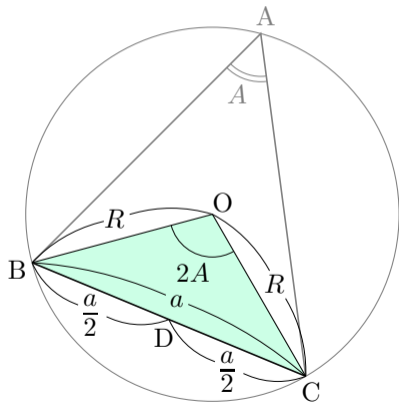
$\overline{OB} = \overline{OC} = R$ なので，三角形 OBC は二等辺三角形である．



三角形 ABC の 3 個の角のうち少なくとも 2 個は鋭角である．三角形 ABC の角 BAC が鋭角であるとする．三角形 ABC の外接円の中心を O とおき，外接円の半径を R とおく．この外接円において，弧 BC に対する中心角の大きさ $\angle BOC$ は弧 BC に対する円周角の大きさ $\angle BAC = A$ の 2 倍である：

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 2A .$$

$\overline{OB} = \overline{OC} = R$ なので，三角形 OBC は二等辺三角形である．線分 BC の中点を D とおく．



三角形 ABC の 3 個の角のうち少なくとも 2 個は鋭角である．三角形 ABC の角 BAC が鋭角であるとする．三角形 ABC の外接円の中心を O とおき，外接円の半径を R とおく．この外接円において，弧 BC に対する中心角の大きさ $\angle BOC$ は弧 BC に対する円周角の大きさ $\angle BAC = A$ の 2 倍である：

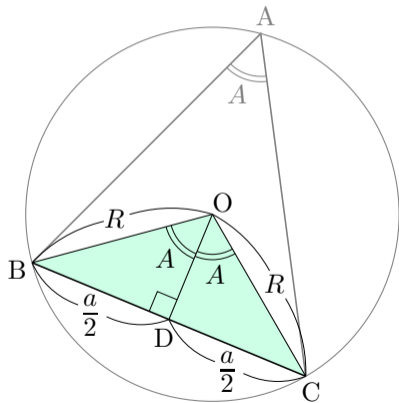
$$\angle BOC = 2\angle BAC = 2A .$$

$\overline{OB} = \overline{OC} = R$ なので，三角形 OBC は二等辺三角形である．線分 BC の中点を D とおく．

$$\angle BDO = 90^\circ .$$

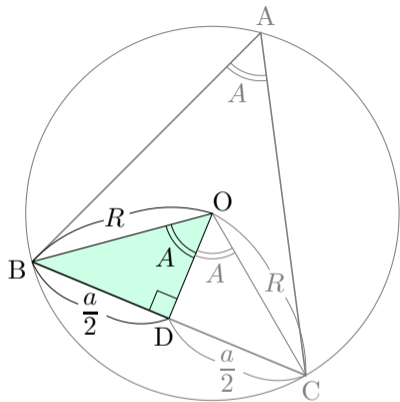
$$\overline{BD} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{a}{2} .$$

$$\angle BOD = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2} \cdot 2A = A .$$



$A = \angle BOD$ より

$$\sin A = \sin \angle BOD .$$

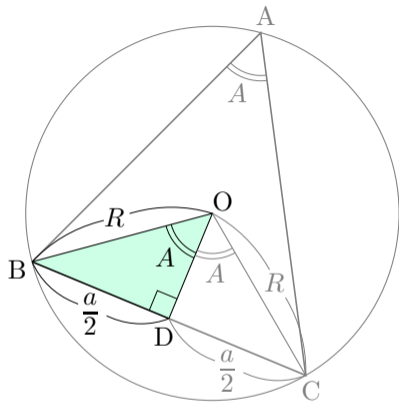


$A = \angle BOD$ より

$$\sin A = \sin \angle BOD .$$

$\angle BDO = 90^\circ$ 及び $\overline{BD} = \frac{a}{2}$ より

$$\sin \angle BOD = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R} .$$



$A = \angle BOD$ より

$$\sin A = \sin \angle BOD .$$

$\angle BDO = 90^\circ$ 及び $\overline{BD} = \frac{a}{2}$ より

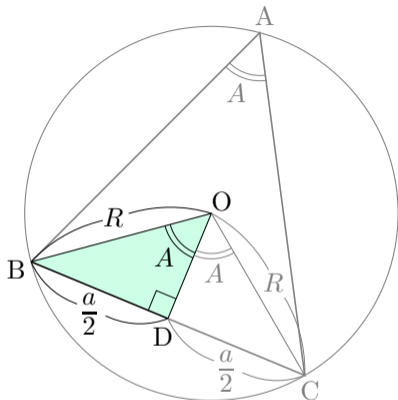
$$\sin \angle BOD = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R} .$$

よって $\sin A = \sin \angle BOD = \frac{a}{2R}$ なので,

$$\frac{a}{\sin A} = 2R .$$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ なので

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R .$$



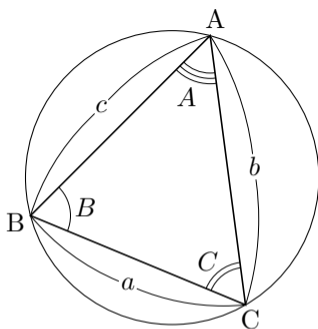
[正弦定理] 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において,

$$\angle BAC = A, \quad \angle ABC = B, \quad \angle ACB = C,$$

$$\overline{BC} = a, \quad \overline{CA} = b, \quad \overline{AB} = c$$

とおく; 更に, 三角形 ABC の外接円の半径を R とおく. このとき,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

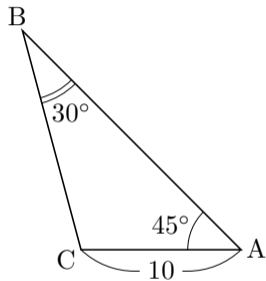


相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、正弦定理により、例えば $\frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} = \frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC}$. このように、正弦定理は三角形の 2 辺の長さ と 2 個の角の大きさとの間の関係を述べる.

相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において、正弦定理により、例えば $\frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} = \frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC}$. このように、正弦定理は三角形の 2 辺の長さ と 2 個の角の大きさとの間の関係を述べる. なので、正弦定理によって次のような計算ができる.

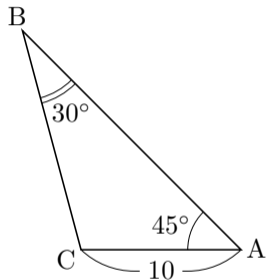
- ・ 三角形の 1 辺の長さ と 2 個の角の大きさ とから他の辺の長さを求める.
- ・ 三角形の 2 辺の長さ と 1 個の角の大きさ とから他の角の大きさを求める.

例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AC} = 10$ かつ $\angle BAC = 45^\circ$ かつ $\angle ABC = 30^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求める.



例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AC} = 10$ かつ $\angle BAC = 45^\circ$ かつ $\angle ABC = 30^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求める. 正弦定理により,

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} .$$

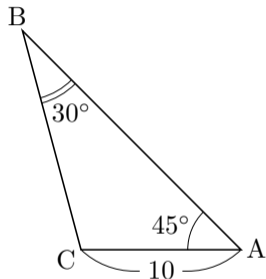


例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AC} = 10$ かつ $\angle BAC = 45^\circ$ かつ $\angle ABC = 30^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求める. 正弦定理により,

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} .$$

よって

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} \sin \angle BAC$$

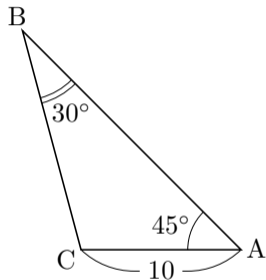


例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AC} = 10$ かつ $\angle BAC = 45^\circ$ かつ $\angle ABC = 30^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求める. 正弦定理により,

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} .$$

よって

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} \sin \angle BAC \\ &= \frac{10}{\sin 30^\circ} \sin 45^\circ = \frac{10}{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = 20 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 10\sqrt{2} . \end{aligned}$$



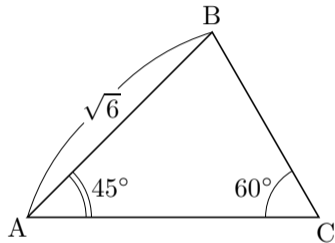
終

問7.7.2 相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = \sqrt{6}$ かつ $\angle BAC = 45^\circ$ かつ $\angle ACB = 60^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求めよ.

正弦定理により

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \angle A} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle C},$$

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AB} \sin \angle A}{\sin \angle C} =$$

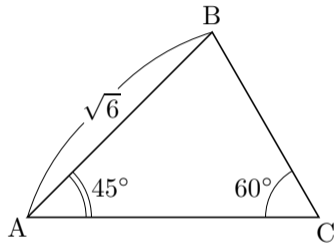


問7.7.2 相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AB} = \sqrt{6}$ かつ $\angle BAC = 45^\circ$ かつ $\angle ACB = 60^\circ$ とする. 辺 BC の長さを求めよ.

正弦定理により

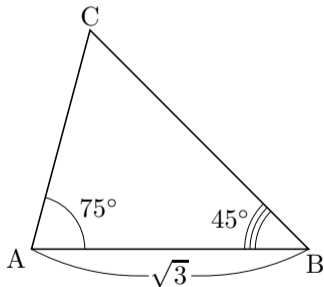
$$\frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB},$$

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\ &= 2.\end{aligned}$$



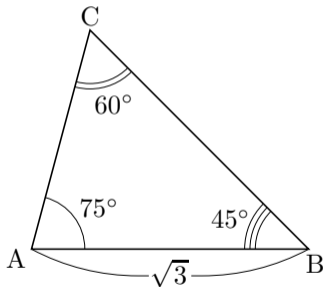
終

例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = \sqrt{3}$ かつ $\angle BAC = 75^\circ$ かつ $\angle ABC = 45^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求める.



例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AB} = \sqrt{3}$ かつ $\angle BAC = 75^\circ$ かつ $\angle ABC = 45^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求める.

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ .$$

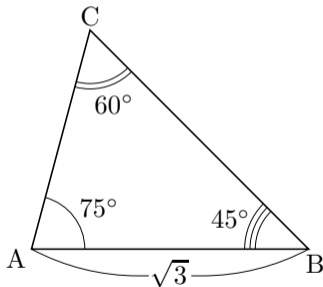


例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = \sqrt{3}$ かつ $\angle BAC = 75^\circ$ かつ $\angle ABC = 45^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求める.

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ .$$

正弦定理により,

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} ,$$



例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = \sqrt{3}$ かつ $\angle BAC = 75^\circ$ かつ $\angle ABC = 45^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求める.

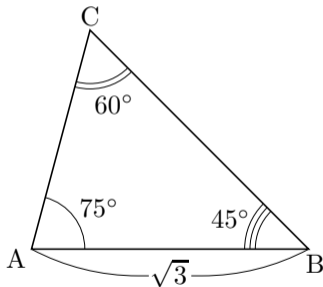
$$\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ .$$

正弦定理により,

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} ,$$

よって

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} \sin \angle ABC$$



例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = \sqrt{3}$ かつ $\angle BAC = 75^\circ$ かつ $\angle ABC = 45^\circ$ とする. 辺 AC の長さを求める.

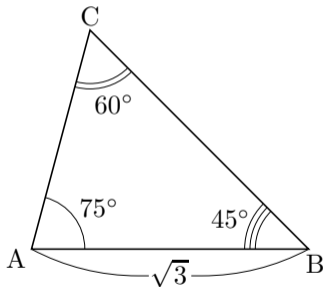
$$\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ .$$

正弦定理により,

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} ,$$

よって

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} . \end{aligned}$$



終

問7.7.3 相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AC} = 6$ かつ $\angle BAC = 15^\circ$ かつ $\angle ACB = 45^\circ$ とする. 辺 AB の長さを求めよ.

$$\angle ABC =$$

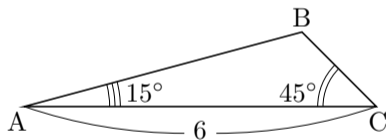
$$\sin 120^\circ =$$

正弦定理により,

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \angle C} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle B},$$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle B} \sin \angle C$$

=



問7.7.3 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AC} = 6$ かつ $\angle BAC = 15^\circ$ かつ $\angle ACB = 45^\circ$ とする. 辺 AB の長さを求めよ.

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 180^\circ - 15^\circ - 45^\circ = 120^\circ .$$

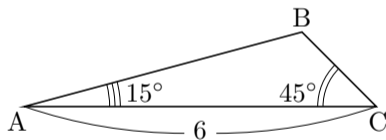
$$\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

正弦定理により,

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \angle C} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle B} ,$$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle B} \sin \angle C$$

=



問7.7.3 相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AC} = 6$ かつ $\angle BAC = 15^\circ$ かつ $\angle ACB = 45^\circ$ とする. 辺 AB の長さを求めよ.

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 180^\circ - 15^\circ - 45^\circ = 120^\circ .$$

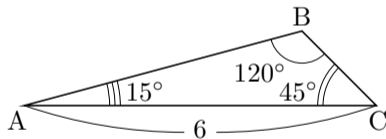
$$\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

正弦定理により,

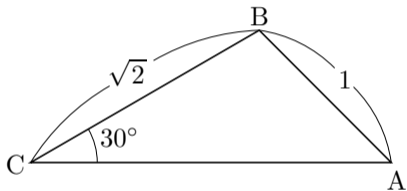
$$\frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} ,$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} \sin \angle ACB \\ &= \frac{6}{\sin 120^\circ} \sin 45^\circ = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 6}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{6} .$$

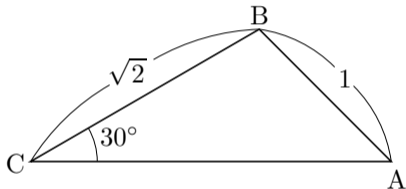


例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AB} = 1$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{2}$ かつ $\angle ACB = 30^\circ$ とする. 角 BAC の大きさを求める.



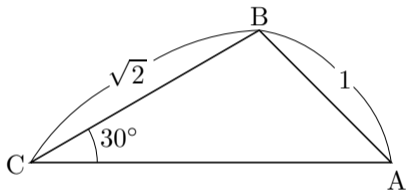
例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 1$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{2}$ かつ $\angle ACB = 30^\circ$ とする. 角 BAC の大きさを求める. 正弦定理により

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} ,$$



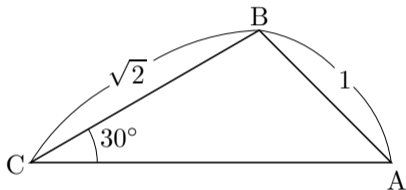
例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AB} = 1$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{2}$ かつ $\angle ACB = 30^\circ$ とする. 角 BAC の大きさを求める. 正弦定理により

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB},$$
$$\sin \angle BAC = \frac{\sin \angle ACB}{\overline{AB}} \cdot \overline{BC}$$



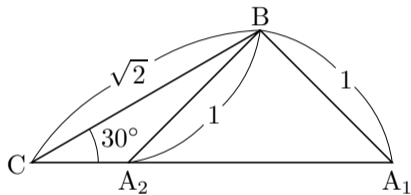
例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 1$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{2}$ かつ $\angle ACB = 30^\circ$ とする. 角 BAC の大きさを求める. 正弦定理により

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC} &= \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB}, \\ \sin \angle BAC &= \frac{\sin \angle ACB}{\overline{AB}} \cdot \overline{BC} \\ &= \frac{\sin 30^\circ}{1} \sqrt{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$



例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = 1$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{2}$ かつ $\angle ACB = 30^\circ$ とする．角 BAC の大きさを求める．正弦定理により

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC} &= \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB}, \\ \sin \angle BAC &= \frac{\sin \angle ACB}{\overline{AB}} \cdot \overline{BC} \\ &= \frac{\sin 30^\circ}{1} \sqrt{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$



これより $\angle BAC = 45^\circ$ または $\angle BAC = 135^\circ$. どちらの場合もあり得る. 終

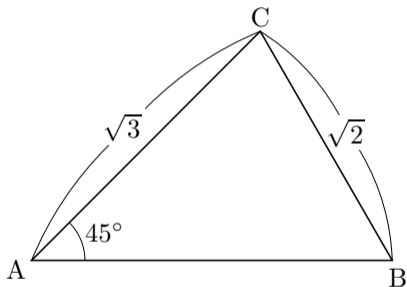
問7.7.4 相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AC} = \sqrt{3}$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{2}$ かつ $\angle BAC = 45^\circ$ とする. 角 ABC の大きさを
 求めよ.

正弦定理により

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} = \frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC},$$

$$\sin \angle ABC = \frac{\overline{BC} \cdot \sin \angle BAC}{\overline{AC}}.$$

=



従って $\angle ABC =$ または $\angle ABC =$.

問7.7.4 相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AC} = \sqrt{3}$ かつ $\overline{BC} = \sqrt{2}$ かつ $\angle BAC = 45^\circ$ とする. 角 ABC の大きさを求めよ.

正弦定理により

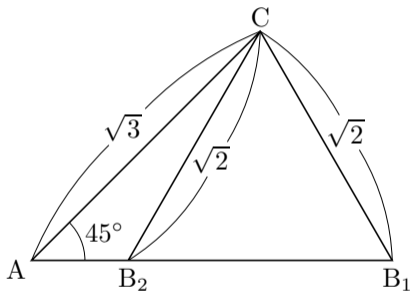
$$\frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} = \frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC},$$

$$\sin \angle ABC = \frac{\sin \angle BAC}{\overline{BC}} \cdot \overline{AC}$$

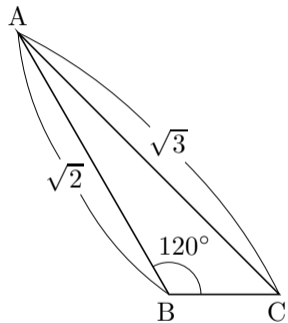
$$= \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

従って $\angle ABC = 60^\circ$ または $\angle ABC = 120^\circ$. どちらの場合もあり得る. 終



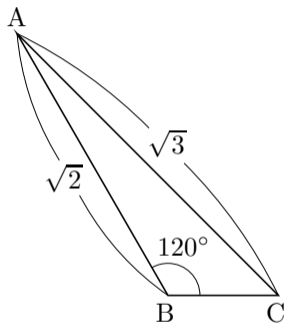
例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ かつ $\overline{AC} = \sqrt{3}$ かつ $\angle ABC = 120^\circ$ とする. 角 ACB の大きさを求める.



例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AB} = \sqrt{2}$ かつ $\overline{AC} = \sqrt{3}$ かつ $\angle ABC = 120^\circ$ とする. 角 ACB の大きさを求める.

$$\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

$$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta$$

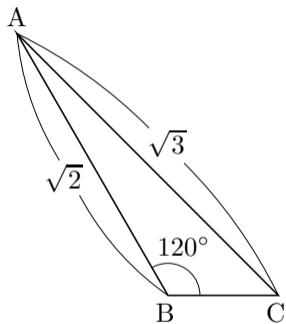


例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ かつ $\overline{AC} = \sqrt{3}$ かつ $\angle ABC = 120^\circ$ とする. 角 ACB の大きさを求める.

$$\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

正弦定理により,

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} ,$$



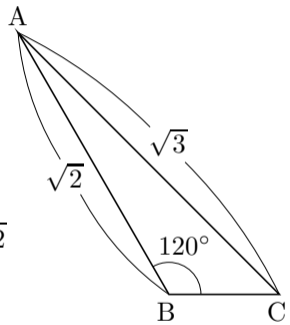
例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について, $\overline{AB} = \sqrt{2}$ かつ $\overline{AC} = \sqrt{3}$ かつ $\angle ABC = 120^\circ$ とする. 角 ACB の大きさを求める.

$$\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

正弦定理により,

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} ,$$

$$\begin{aligned} \sin \angle ACB &= \frac{\sin \angle ABC}{\overline{AC}} \cdot \overline{AB} = \frac{\sin 120^\circ}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} . \end{aligned}$$



例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ かつ $\overline{AC} = \sqrt{3}$ かつ $\angle ABC = 120^\circ$ とする. 角 ACB の大きさを求める.

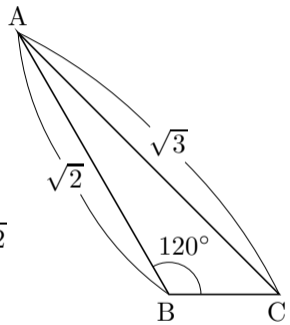
$$\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

正弦定理により,

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} ,$$

$$\begin{aligned} \sin \angle ACB &= \frac{\sin \angle ABC}{\overline{AC}} \cdot \overline{AB} = \frac{\sin 120^\circ}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} . \end{aligned}$$

これより $\angle ACB = 45^\circ$ または $\angle ACB = 135^\circ$.



例 相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ かつ $\overline{AC} = \sqrt{3}$ かつ $\angle ABC = 120^\circ$ とする. 角 ACB の大きさを求める.

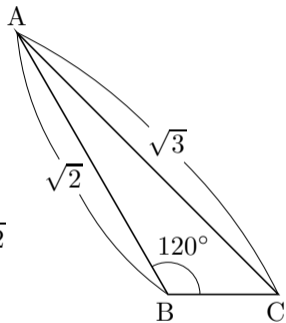
$$\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

正弦定理により,

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} ,$$

$$\begin{aligned} \sin \angle ACB &= \frac{\sin \angle ABC}{\overline{AC}} \cdot \overline{AB} = \frac{\sin 120^\circ}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} . \end{aligned}$$

これより $\angle ACB = 45^\circ$ または $\angle ACB = 135^\circ$. $\angle ABC + \angle ACB \leq 180^\circ$ より $\angle ACB \leq 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ$ なので, $\angle ACB = 45^\circ$.



終

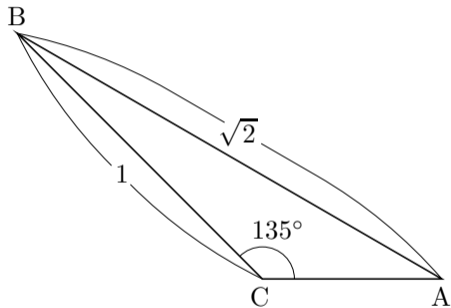
問7.7.5 相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について、 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ かつ $\overline{BC} = 1$ かつ $\angle ACB = 135^\circ$ とする. 角 BAC の大きさを求めよ.

正弦定理により

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB},$$

$$\sin \angle BAC = \frac{\overline{BC} \cdot \sin \angle ACB}{\overline{AB}}.$$

$$=$$

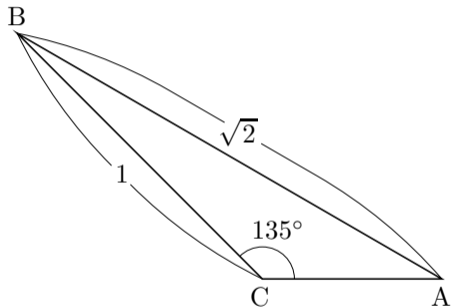


従って $\angle BAC =$ または $\angle BAC =$. $\angle BAC \leq 180^\circ - \angle ACB =$
 なので, $\angle BAC =$.

問7.7.5 相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC について,
 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ かつ $\overline{BC} = 1$ かつ $\angle ACB = 135^\circ$ とする. 角 BAC の大きさを求めよ.

正弦定理により

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC} &= \frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB}, \\ \sin \angle BAC &= \frac{\sin \angle ACB}{\overline{AB}} \cdot \overline{BC} \\ &= \frac{\sin 135^\circ}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$



従って $\angle BAC = 30^\circ$ または $\angle BAC = 150^\circ$. $\angle BAC \leq 180^\circ - \angle ACB = 45^\circ$ なので, $\angle BAC = 30^\circ$.