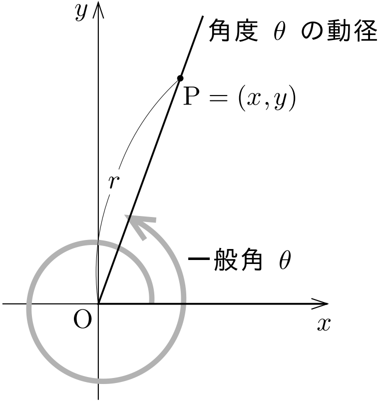
7.4 三角比の性質

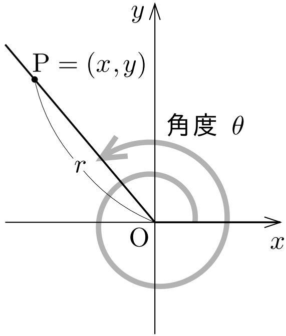
一般角 θ の正弦 $\sin\theta$, 余弦 $\cos\theta$, 正接 $\tan\theta$ を次のように定義した: xy 座標平面において, 原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ (但し $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$) に対して $r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおくとき,

$$\sin\theta=\frac{y}{r}\ ,\qquad \cos\theta=\frac{x}{r}\ ,$$

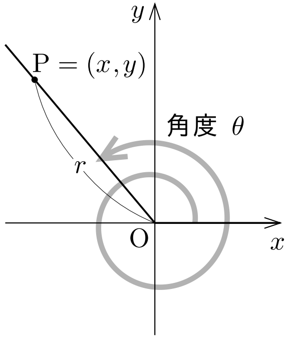
$$x\neq 0 \text{ のとき}\quad \tan\theta=\frac{y}{x}\ .$$



xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ ($\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$) をとり，$\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく.



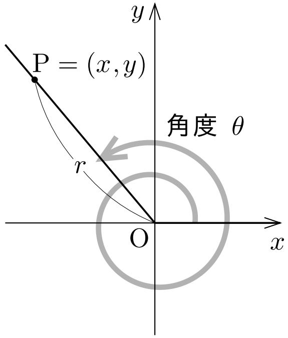
　xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P} = (x, y)$ （ $\mathrm{P} \neq \mathrm{O}$ ）をとり，$\overline{\mathrm{OP}} = r$ とおく．θ の正接 $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ は $x = 0$ のとき値が無い．



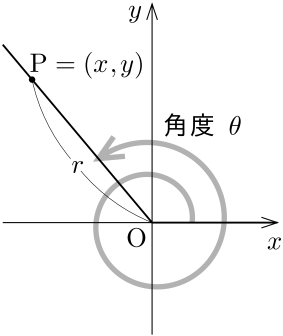
xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり，$\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく．

θ の正接 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ は $x=0$ のとき値が無い．

$x=0$ とすると θ は $\pm 90^\circ, \pm 270^\circ, \pm 450^\circ, \ldots$ などの 90° の奇数倍である．

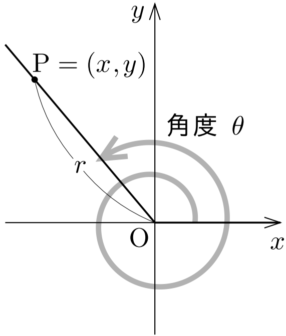


　xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり， $\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく．θ の正接 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ は $x=0$ のとき値が無い．



$x=0$ とすると θ は $\pm 90^\circ,\pm 270^\circ,\pm 450^\circ,\ldots$ などの 90° の奇数倍である．対偶をとると，θ が 90° の奇数倍でないとき $x\neq 0$ ．

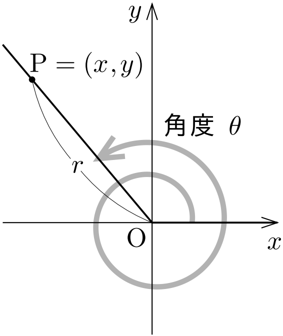
xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり，$\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく．



θ の正接 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ は $x=0$ のとき値が無い．

$x=0$ とすると θ は $\pm90°,\pm270°,\pm450°,\ldots$ などの $90°$ の奇数倍である．対偶をとると，θ が $90°$ の奇数倍でないとき $x\neq0$ ．このとき，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ の値があり，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}\neq0$ で，

xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり， $\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく．θ の正接 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ は $x=0$ のとき値が無い．$x=0$ とすると θ は $\pm 90°, \pm 270°, \pm 450°, \ldots$ などの $90°$ の奇数倍である．対偶をとると，θ が $90°$ の奇数倍でないとき $x\neq 0$ ．このとき， $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ の値があり， $\cos\theta=\dfrac{x}{r}\neq 0$ で，

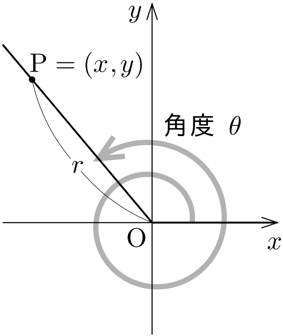


$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\dfrac{y}{r}}{\dfrac{x}{r}}=\frac{\dfrac{y}{r}\cdot r}{\dfrac{x}{r}\cdot r}=\frac{y}{x}=\tan\theta\ .$$

xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 $\mathrm{P}=(x,y)$ （ $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ ）をとり， $\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおく．

θ の正接 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ は $x=0$ のとき値が無い．

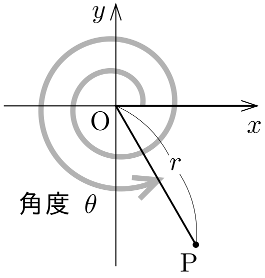
$x=0$ とすると θ は $\pm90^\circ,\pm270^\circ,\pm450^\circ,\ldots$ などの 90° の奇数倍である．対偶をとると，θ が 90° の奇数倍でないとき $x\neq0$ ．このとき， $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ の値があり， $\cos\theta=\dfrac{x}{r}\neq0$ で，



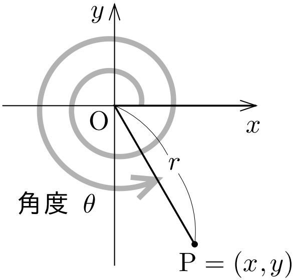
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\dfrac{y}{r}}{\dfrac{x}{r}}=\frac{\dfrac{y}{r}\cdot r}{\dfrac{x}{r}\cdot r}=\frac{y}{x}=\tan\theta\ .$$

[定理 7.4.1]　角度 90° の奇数倍でない任意の一般角 θ について $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ．

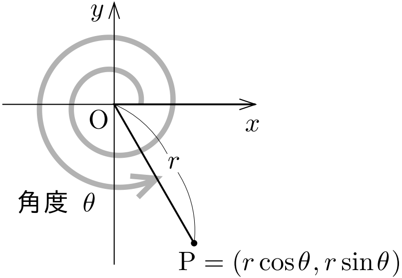
　xy 座標平面の点 P について，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であり $\overline{\mathrm{OP}} = r$ とする． $r = \overline{\mathrm{OP}}$ は線分の長さなので $r \geq 0$ ．



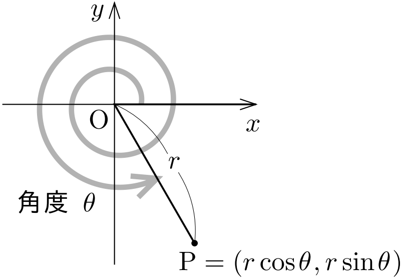
　xy 座標平面の点 P について，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であり $\overline{\mathrm{OP}} = r$ とする． $r = \overline{\mathrm{OP}}$ は線分の長さなので $r \geq 0$ ． $r > 0$ のとき，$\mathrm{P} = (x, y)$ とおくと，余弦と正弦の定義により $\dfrac{x}{r} = \cos\theta$ かつ $\dfrac{y}{r} = \sin\theta$ ，



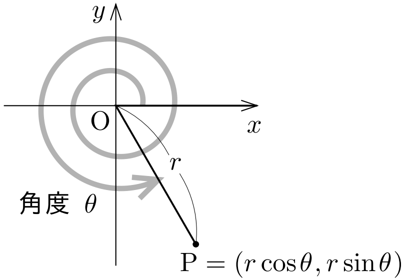
xy 座標平面の点 P について，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であり $\overline{\mathrm{OP}} = r$ とする． $r = \overline{\mathrm{OP}}$ は線分の長さなので $r \geq 0$ ． $r > 0$ のとき， $\mathrm{P} = (x, y)$ とおくと，余弦と正弦の定義により $\dfrac{x}{r} = \cos\theta$ かつ $\dfrac{y}{r} = \sin\theta$ ，よって $x = r\cos\theta$ かつ $y = r\sin\theta$ なので， $\mathrm{P} = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ．



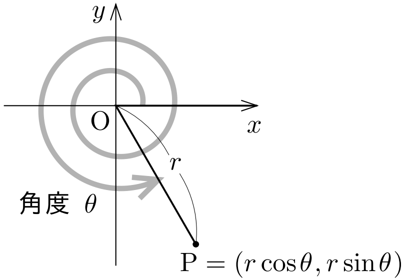
xy 座標平面の点 P について，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する線分 OP の角度が θ であり $\overline{\mathrm{OP}} = r$ とする． $r = \overline{\mathrm{OP}}$ は線分の長さなので $r \geq 0$ ． $r > 0$ のとき，$\mathrm{P} = (x, y)$ とおくと，余弦と正弦の定義により $\dfrac{x}{r} = \cos\theta$ かつ $\dfrac{y}{r} = \sin\theta$ ，よって $x = r\cos\theta$ かつ $y = r\sin\theta$ なので，$\mathrm{P} = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ． $r = 0$ のとき，$\overline{\mathrm{OP}} = 0$ なので $\mathrm{P} = \mathrm{O}$ ， $r = 0$ なので $(r\cos\theta, r\sin\theta) = (0, 0) = \mathrm{O}$ ，



xy 座標平面の点 P について，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であり $\overline{\mathrm{OP}}=r$ とする． $r=\overline{\mathrm{OP}}$ は線分の長さなので $r \geq 0$ ． $r>0$ のとき， $\mathrm{P}=(x,y)$ とおくと，余弦と正弦の定義により $\dfrac{x}{r}=\cos\theta$ かつ $\dfrac{y}{r}=\sin\theta$ ，よって $x=r\cos\theta$ かつ $y=r\sin\theta$ なので， $\mathrm{P}=(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ ． $r=0$ のとき， $\overline{\mathrm{OP}}=0$ なので $\mathrm{P}=\mathrm{O}$ ， $r=0$ なので $(r\cos\theta,r\sin\theta)=(0,0)=\mathrm{O}$ ，よって $\mathrm{P}=\mathrm{O}=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ ．



xy 座標平面の点 P について，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であり $\overline{\mathrm{OP}}=r$ とする． $r=\overline{\mathrm{OP}}$ は線分の長さなので $r \geq 0$ ． $r>0$ のとき，$\mathrm{P}=(x, y)$ とおくと，余弦と正弦の定義により $\dfrac{x}{r}=\cos\theta$ かつ $\dfrac{y}{r}=\sin\theta$ ，よって $x=r\cos\theta$ かつ $y=r\sin\theta$ なので，$\mathrm{P}=(x, y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ． $r=0$ のとき，$\overline{\mathrm{OP}}=0$ なので $\mathrm{P}=\mathrm{O}$ ， $r=0$ なので $(r\cos\theta, r\sin\theta)=(0,0)=\mathrm{O}$ ，よって $\mathrm{P}=\mathrm{O}=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ．



[定理 **7.4.2**] xy 座標平面の点 P について，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であるとき，$\overline{\mathrm{OP}}=r$ とおくと

$$\mathrm{P} = (r\cos\theta, r\sin\theta) .$$

$\boxed{例}$ 点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について，線分 OP の始線 Ox に対する角度が 30° で $\overline{\mathrm{OP}} = 5$ とする．点 P を求める．

$\boxed{\text{例}}$ 点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について，線分 OP の始線 Ox に対する角度が 30° で $\overline{\mathrm{OP}} = 5$ とする．点 P を求める． $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ なので，

例 点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について，線分 OP の始線 Ox に対する角度が 30° で $\overline{\mathrm{OP}} = 5$ とする．点 P を求める． $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ なので，

$$\mathrm{P} = (5\cos 30^\circ, 5\sin 30^\circ) = \left(5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, 5 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) .$$

終

$\boxed{\text{問}7.4.1}$ 点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について，線分 OP の始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度が 60° で $\overline{\mathrm{OP}} = \dfrac{4}{3}$ とする．点 P を求めよ．

$$\mathrm{P} = \left(\frac{4}{3} \qquad\qquad , \frac{4}{3} \qquad\qquad \right) = \left(\frac{4}{3} \cdot \quad , \frac{4}{3} \cdot \qquad \right) = \left(\quad , \qquad \right).$$

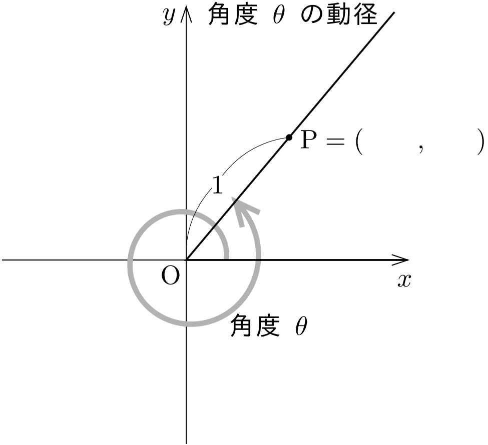
$\boxed{問7.4.1}$ 点 O を原点とする xy 座標平面の点 P について，線分 OP の始線 Ox に対する角度が 60° で $\overline{\mathrm{OP}} = \dfrac{4}{3}$ とする．点 P を求めよ．

$$\mathrm{P} = \left(\frac{4}{3}\cos 60^\circ, \frac{4}{3}\sin 60^\circ\right) = \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) .$$

$\boxed{終}$

xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O} = (0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる．定理 **7.4.2** により

$$\mathrm{P} = (\qquad , \qquad).$$

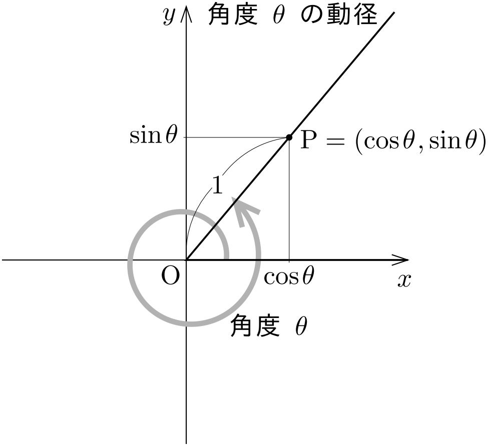


xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O} = (0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる．定理 **7.4.2** により

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

[定理 **7.4.2**] xy 座標平面の点 P について，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する線分 OP の角度が θ であるとき，$\overline{\mathrm{OP}} = r$ とおくと

$$\mathrm{P} = (r\cos\theta, r\sin\theta) \ .$$



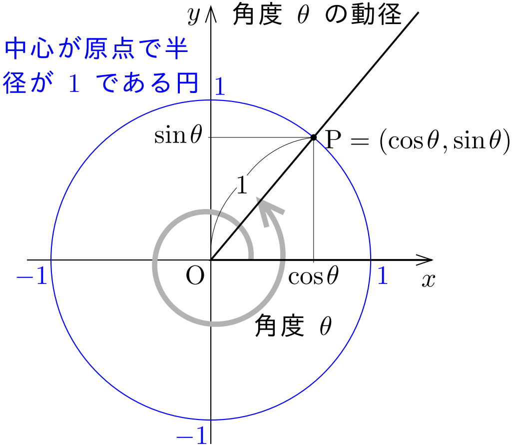
xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O} = (0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属する点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる．定理 **7.4.2** により

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

P は中心が原点 O で半径が 1 である円に属すので，

$$\quad \leq \sin\theta \leq \quad ,$$

$$\quad \leq \cos\theta \leq \quad .$$



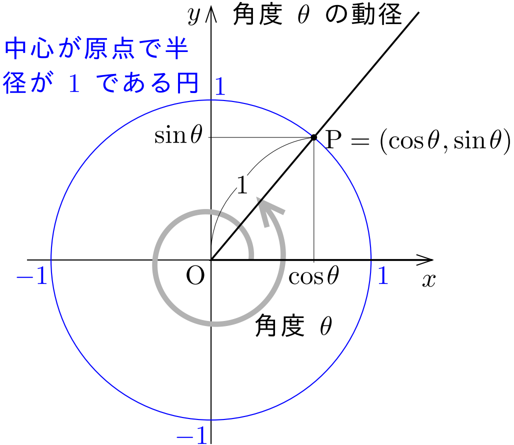
xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属する点 P で $\overline{\mathrm{OP}}=1$ である点をとる．定理 **7.4.2** により

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

P は中心が原点 O で半径が 1 である円に属すので，

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1 \ ,$$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1 \ .$$



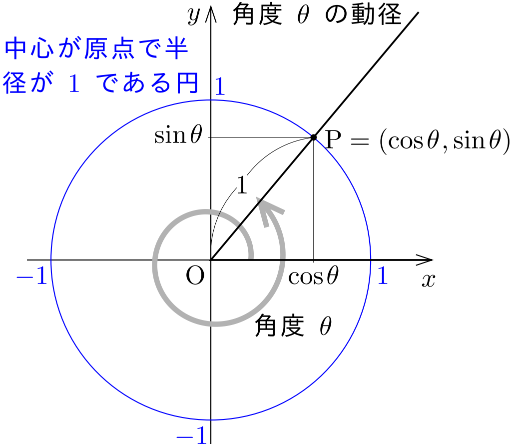
xy 座標平面において，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ を極として x 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}x$ に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}}=1$ である点をとる．定理 **7.4.2** により

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

P は中心が原点 O で半径が 1 である円に属すので，

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1 \ ,$$

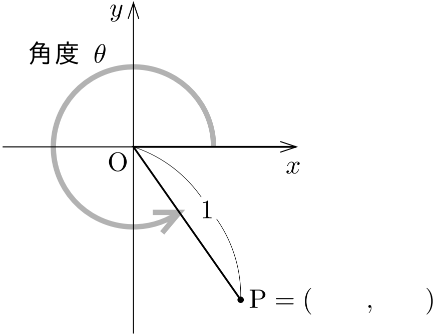
$$-1 \leq \cos\theta \leq 1 \ .$$



[定理 **7.4.3**]　任意の一般角 θ について，$-1 \leq \sin\theta \leq 1$ ，$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ ．

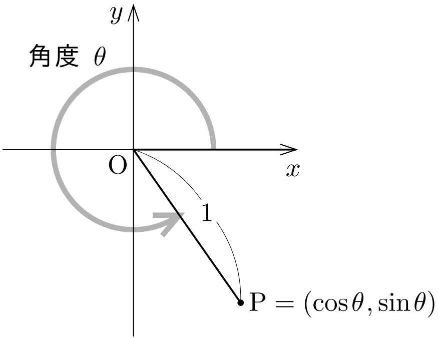
xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる．定理 **7.4.2** により

$$\mathrm{P} = (\qquad , \qquad).$$



xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる．定理 **7.4.2** により

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) .$$

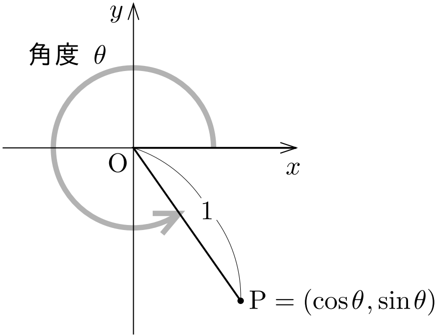


[定理 **7.4.2**] xy 座標平面の点 P について，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の角度が θ であるとき，$\overline{\mathrm{OP}} = r$ とおくと

$$\mathrm{P} = (r\cos\theta, r\sin\theta) .$$

xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる．定理 **7.4.2** により

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) .$$



$\mathrm{O} = (0, 0)$ なので，

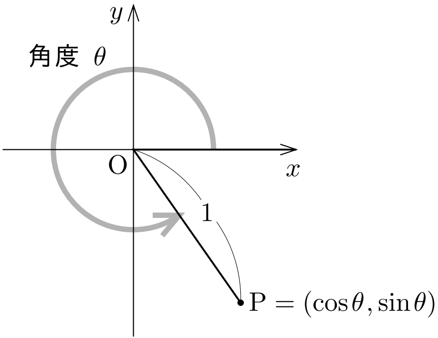
$$\overline{\mathrm{OP}}^2 =$$

xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる．定理 **7.4.2** により

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

$\mathrm{O} = (0,0)$ なので，定理 **7.0** により

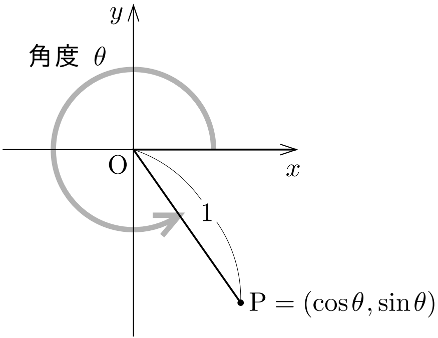
$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 \ ,$$



[定理 **7.0**] 座標平面において，点 $\mathrm{A} = (a_1, a_2)$ と点 $\mathrm{B} = (b_1, b_2)$ とを結ぶ線分 AB の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$ は

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \ .$$

xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる．定理 **7.4.2** により



$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

$\mathrm{O} = (0,0)$ なので，定理 **7.0** により

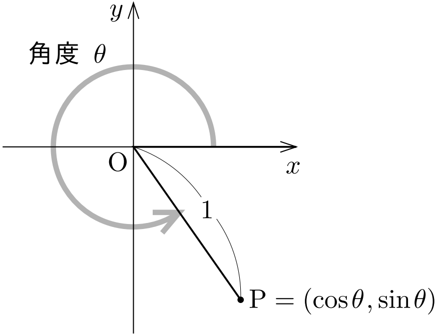
$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 \ ,$$

$\overline{\mathrm{OP}}^2 = 1$ なので

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1 \ .$$

xy 座標平面において，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる．定理 **7.4.2** により

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$



$\mathrm{O} = (0, 0)$ なので，定理 **7.0** により

$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 \ ,$$

$\overline{\mathrm{OP}}^2 = 1$ なので

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1 \ .$$

[定理 **7.4.4**]　任意の一般角 θ について

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \ .$$

例 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ かつ $\cos\theta \geq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求める．

例 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ かつ $\cos\theta \geq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求める． $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ ． $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ なので，

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49} \ ,$$

例 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ かつ $\cos\theta \geq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求める． $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ ． $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ なので，

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49} \ ,$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{24}{49}} = \pm\frac{\sqrt{24}}{7} \ ,$$

$\boxed{例}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ かつ $\cos\theta \geq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求める． $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ ． $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ なので，

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49} \ ,$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{24}{49}} = \pm\frac{\sqrt{24}}{7} \ ,$$

$\cos\theta \geq 0$ なので $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{24}}{7}$ ．

例 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ かつ $\cos\theta \geq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求める． $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ ． $\sin\theta = \dfrac{5}{7}$ なので，

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49} \ ,$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{24}{49}} = \pm\frac{\sqrt{24}}{7} \ ,$$

$\cos\theta \geq 0$ なので $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{24}}{7}$ ．更に，

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{\sqrt{24}}{7}} = \frac{5}{\sqrt{24}} \ .$$

終

$\boxed{\text{問}7.4.2}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求めよ．

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \Big(\quad\Big)^2 =$$

$\cos\theta \leq 0$ なので $\cos\theta =$ ．更に，

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} =$$

$\boxed{\text{問}7.4.2}$ 一般角 θ について $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする. $\cos\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求めよ.

$$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} ,$$

$\cos\theta \leq 0$ なので $\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{9}{25}} = -\dfrac{3}{5}$. 更に,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4}{5}\Big/\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{3} .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}7.4.3}$ 一般角 θ について $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ かつ $\sin\theta \geq 0$ とする．$\sin\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求めよ．

$$(\sin\theta)^2 = 1 - (\qquad)^2 = 1 - \left(\quad\right)^2 =$$

$\sin\theta \geq 0$ なので $\sin\theta =$ ．更に，

$$\tan\theta = \frac{\quad}{\quad} =$$

$\boxed{\text{問}7.4.3}$ 一般角 θ について $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ かつ $\sin\theta \geq 0$ とする. $\sin\theta$ 及び $\tan\theta$ の値を求めよ.

$$(\sin\theta)^2 = 1 - (\cos\theta)^2 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \ ,$$

$\sin\theta \geq 0$ なので $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$. 更に,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{8}}{3}\Big/\frac{1}{3} = \sqrt{8} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

一般角 θ は角度 90° の奇数倍でないとする．このとき $\cos\theta \neq 0$ ．

一般角 θ は角度 90° の奇数倍でないとする．このとき $\cos\theta \neq 0$ ．公式 $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ の両辺を $(\cos\theta)^2$ で割ると，

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2}+\frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \frac{1}{(\cos\theta)^2} \ ,$$

一般角 θ は角度 90° の奇数倍でないとする．このとき $\cos\theta \neq 0$ ．公式 $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$ の両辺を $(\cos\theta)^2$ で割ると，

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2}+\frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \frac{1}{(\cos\theta)^2} ,$$

この等式の左辺は

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2}+\frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+1 = (\tan\theta)^2+1 = 1+(\tan\theta)^2 ,$$

一般角 θ は角度 90° の奇数倍でないとする．このとき $\cos\theta \neq 0$ ．公式 $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ の両辺を $(\cos\theta)^2$ で割ると，

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2} + \frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \frac{1}{(\cos\theta)^2} \ ,$$

この等式の左辺は

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2} + \frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 = (\tan\theta)^2 + 1 = 1 + (\tan\theta)^2 \ ,$$

よって $1 + (\tan\theta)^2 = \dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$ ．

一般角 θ は角度 90° の奇数倍でないとする．このとき $\cos\theta \neq 0$ ．公式 $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ の両辺を $(\cos\theta)^2$ で割ると，

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2} + \frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \frac{1}{(\cos\theta)^2} ,$$

この等式の左辺は

$$\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2} + \frac{(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^2} = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 = (\tan\theta)^2 + 1 = 1 + (\tan\theta)^2 ,$$

よって $1 + (\tan\theta)^2 = \dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$ ．

[定理 7.4.5] 角度 90° の奇数倍でない任意の一般角 θ について，

$$1 + (\tan\theta)^2 = \frac{1}{(\cos\theta)^2} .$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 3$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする. $\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求める.

$\boxed{例}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 3$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求める． $1 + (\tan\theta)^2 = \dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$ ． $\tan\theta = 3$ なので，

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2} = 1 + (\tan\theta)^2 = 1 + 3^2 = 10 \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 3$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求める． $1 + (\tan\theta)^2 = \dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$ ． $\tan\theta = 3$ なので，

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2} = 1 + (\tan\theta)^2 = 1 + 3^2 = 10 \ ,$$

$$(\cos\theta)^2 = \frac{1}{10} \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 3$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求める． $1 + (\tan\theta)^2 = \dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$ ． $\tan\theta = 3$ なので，

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2} = 1 + (\tan\theta)^2 = 1 + 3^2 = 10 \ ,$$

$$(\cos\theta)^2 = \frac{1}{10} \ ,$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 一般角 θ について $\tan\theta = 3$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求める． $1 + (\tan\theta)^2 = \dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$ ． $\tan\theta = 3$ なので，

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2} = 1 + (\tan\theta)^2 = 1 + 3^2 = 10 \ ,$$

$$(\cos\theta)^2 = \frac{1}{10} \ ,$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \ ,$$

$\cos\theta \leq 0$ なので $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ ．

例 一般角 θ について $\tan\theta = 3$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求める． $1 + (\tan\theta)^2 = \dfrac{1}{(\cos\theta)^2}$ ． $\tan\theta = 3$ なので，

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2} = 1 + (\tan\theta)^2 = 1 + 3^2 = 10 \ ,$$

$$(\cos\theta)^2 = \frac{1}{10} \ ,$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \ ,$$

$\cos\theta \leq 0$ なので $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ ．更に， $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので，

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{10}} \ .$$

終

$\boxed{\text{問}7.4.4}$ 一般角 θ について $\tan\theta = \dfrac{3}{2}$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求めよ．

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2} = 1 + (\qquad)^2 = 1 + \left(\quad\right)^2 =$$

$$(\cos\theta)^2 =$$

$\cos\theta \leq 0$ なので $\cos\theta =$ 　　　　　　　　　　．更に，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので，

$$\sin\theta =$$

$\boxed{問 7.4.4}$ 一般角 θ について $\tan\theta = \dfrac{3}{2}$ かつ $\cos\theta \leq 0$ とする．$\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の値を求めよ．

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2} = 1 + (\tan\theta)^2 = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \ ,$$

$$(\cos\theta)^2 = \frac{4}{13} \ ,$$

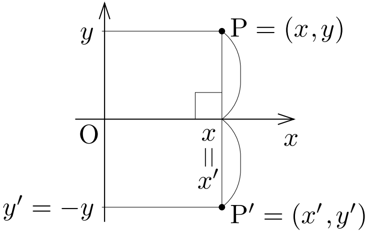
$\cos\theta \leq 0$ なので $\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{4}{13}} = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ ．更に， $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ なので，

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{13}} \ .$$

$\boxed{終}$

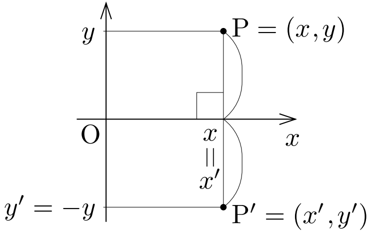
xy 座標平面の原点を O とおく．点 $\mathrm{P}' = (x', y')$ が点 $\mathrm{P} = (x, y)$ と x 軸に関して対称であるとき，

$$x' = x\ , \qquad y' = -y\ .$$



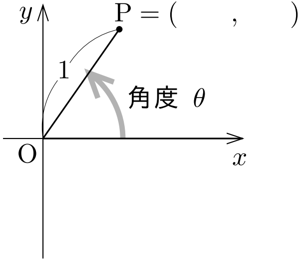
xy 座標平面の原点を O とおく. 点 $\mathrm{P}' = (x', y')$ が点 $\mathrm{P} = (x, y)$ と x 軸に関して対称であるとき,

$$x' = x \ , \qquad y' = -y \ .$$



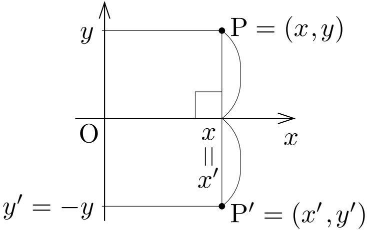
始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる.

$$\mathrm{P} = (\qquad , \qquad) \ .$$



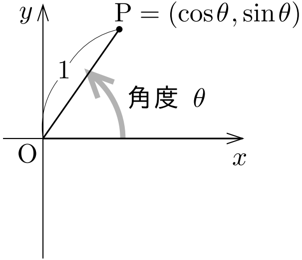
xy 座標平面の原点を O とおく．点 $\mathrm{P}' = (x', y')$ が点 $\mathrm{P} = (x, y)$ と x 軸に関して対称であるとき，

$$x' = x \ , \qquad y' = -y \ .$$



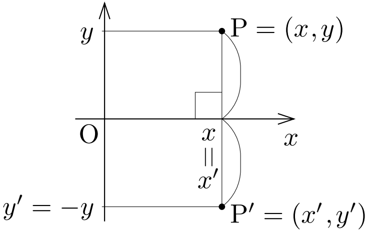
始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる．

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$



xy 座標平面の原点を O とおく．点 $\mathrm{P}'=(x',y')$ が点 $\mathrm{P}=(x,y)$ と x 軸に関して対称であるとき，

$$x'=x\ ,\qquad y'=-y\ .$$

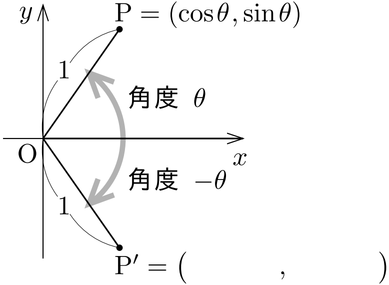


始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}}=1$ である点をとる．

$$\mathrm{P}=(\cos\theta,\sin\theta)\ .$$

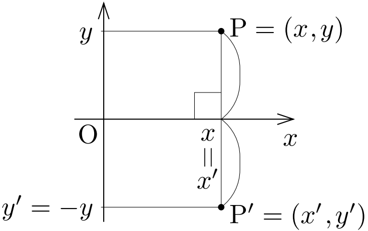
始線 Ox に対する角度 $-\theta$ の動径に属す点 P' で $\overline{\mathrm{OP}'}=1$ である点をとる．

$$\mathrm{P}'=(\qquad\quad,\qquad\quad)\ .$$



xy 座標平面の原点を O とおく．点 $\mathrm{P}' = (x', y')$ が点 $\mathrm{P} = (x, y)$ と x 軸に関して対称であるとき，

$$x' = x \ , \qquad y' = -y \ .$$

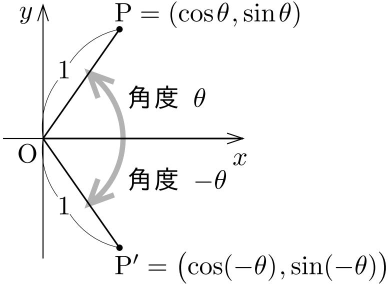


始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ である点をとる．

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

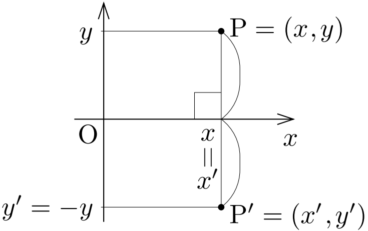
始線 Ox に対する角度 $-\theta$ の動径に属す点 P' で $\overline{\mathrm{OP}'} = 1$ である点をとる．

$$\mathrm{P}' = \bigl(\cos(-\theta), \sin(-\theta)\bigr) \ .$$



xy 座標平面の原点を O とおく．点 $\mathrm{P}'=(x',y')$ が点 $\mathrm{P}=(x,y)$ と x 軸に関して対称であるとき，

$$x' = x \ , \qquad y' = -y \ .$$

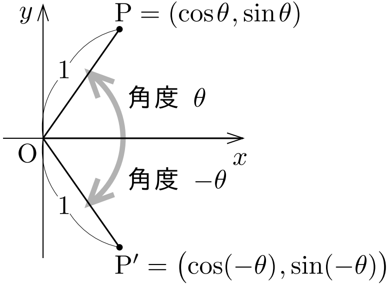


始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}}=1$ である点をとる．

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

始線 Ox に対する角度 $-\theta$ の動径に属す点 P' で $\overline{\mathrm{OP}'}=1$ である点をとる．

$$\mathrm{P}' = \big(\cos(-\theta), \sin(-\theta)\big) \ .$$

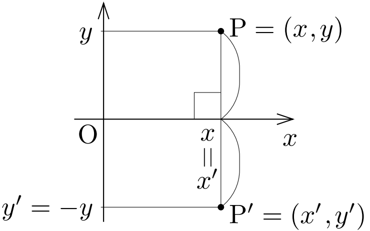


点 P' は点 P と x 軸に関して対称なので，

$$\cos(-\theta) = \qquad\qquad , \qquad \sin(-\theta) = \qquad\qquad .$$

xy 座標平面の原点を O とおく．点 $\mathrm{P}'=(x',y')$ が点 $\mathrm{P}=(x,y)$ と x 軸に関して対称であるとき，

$$x' = x \ , \qquad y' = -y \ .$$

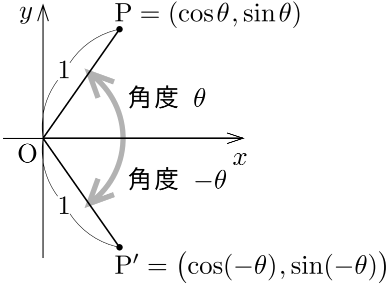


始線 Ox に対する角度 θ の動径に属す点 P で $\overline{\mathrm{OP}}=1$ である点をとる．

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

始線 Ox に対する角度 $-\theta$ の動径に属す点 P' で $\overline{\mathrm{OP}'}=1$ である点をとる．

$$\mathrm{P}' = \big(\cos(-\theta), \sin(-\theta)\big) \ .$$



点 P' は点 P と x 軸に関して対称なので，

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \ , \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta \ .$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \ , \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta \ .$$

更に，θ が 90° の奇数倍でないとき，

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta \ .$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \ , \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta \ .$$

更に，θ が 90° の奇数倍でないとき，

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta \ .$$

このように次の定理が成り立つ．

[定理 **7.4.6**]　任意の一般角 θ について，

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \ , \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \ ,$$

$$\theta \text{ が } 90^\circ \text{ の奇数倍でないとき} \quad \tan(-\theta) = -\tan\theta \ .$$