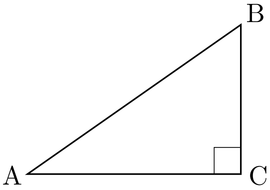
7.0　座標平面の線分の長さ

[ピタゴラスの定理(三平方の定理)]

相異なる3点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において角 ACB が直角であるとき,

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 \ .$$



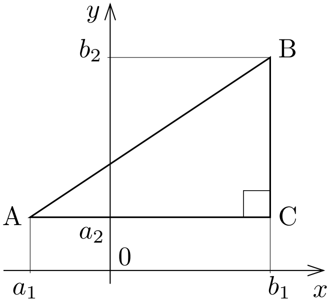
ピタゴラスの定理より次の定理が導かれる．

[定理 **7.0**] 座標平面において，点 $\mathrm{A}=(a_1,a_2)$ と点 $\mathrm{B}=(b_1,b_2)$ とを結ぶ線分 AB の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$ は

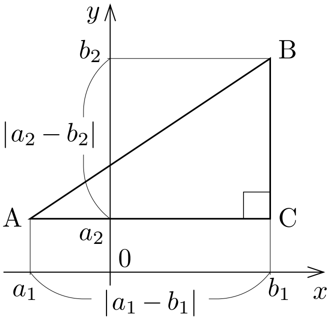
$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2 \ .$$

証明　点 $\mathrm{A}=(a_1,a_2)$ 及び点 $\mathrm{B}=(b_1,b_2)$ に対して，座標平面の点 $\mathrm{C}=(b_1,a_2)$ をとる．線分 AC は x 軸と平行であり，線分 BC は y 軸と平行である．x 軸と y 軸とは垂直に交わるので，三角形 ABC は ∠ACB を直角とする直角三角形である．従って，ピタゴラスの定理により，

$$\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 \ .$$



$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 \ .$$



$\mathrm{A} = (a_1, a_2)$ ，$\mathrm{C} = (b_1, a_2)$ なので，定理 **2.7.7** により $\overline{\mathrm{AC}} = |a_1 - b_1|$ ，定理 **2.7.5** により

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = |a_1 - b_1|^2 = (a_1 - b_1)^2 \ .$$

$\mathrm{B} = (b_1, b_2)$ ，$\mathrm{C} = (b_1, b_2)$ なので，定理 **2.7.7** により $\overline{\mathrm{BC}} = |a_2 - b_2|$ ，定理 **2.7.5** により

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = |a_2 - b_2|^2 = (a_2 - b_2)^2 \ .$$

故に，

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

[定理 **2.7.7**] 数直線上の任意の実数 a と b とについて，a と b との間の距離は $|a - b|$ である．

[定理 **2.7.5**] 任意の実数 a について $|a|^2 = a^2$ ．