6. 拡充 3　　3 次不等式の解法

3 次不等式を解くためには，3 次式を実数係数の範囲で因数分解することが基本になります.

$\boxed{\text{例}}$　変数 y に関する 3 次不等式 $6y^3+y^2-10y+3>0$ 及び $6y^3+y^2-10y+3\geq 0$ を解く．$y=1$ のとき $6y^3+y^2-10y+3=0$ なので，因数定理より，整式 $6y^3+y^2-10y+3$ は $y-1$ で割り切れる：

$$6y^3+y^2-10y+3=(y-1)(6y^2+7y-3)\ .$$

y に関する 2 次方程式 $6y^2+7y-3=0$ を解くと $y=\dfrac{1}{3},-\dfrac{3}{2}$ ，従って，y の 2 次式 $6y^2+7y-3$ は実数係数の範囲で因数分解できて

$$6y^2+7y-3=6\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)\ .$$

故に，y の 3 次式 $6y^3+y^2-10y+3$ を実数係数の範囲で因数分解すると

$$6y^3+y^2-10y+3=6(y-1)\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)\ .$$

y の値について場合分けして，$6y^3+y^2-10y+3=6(y-1)\left(y-\dfrac{1}{3}\right)\left(y+\dfrac{3}{2}\right)$ の値の符号を調べる．

y の値	$\cdots$	$-\dfrac{3}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$y+\dfrac{3}{2}$ の値の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$y-\dfrac{1}{3}$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$y-1$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$6(y-1)\left(y-\dfrac{1}{3}\right)\left(y+\dfrac{3}{2}\right)$ の値の符号	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

この表より，

不等式 $6y^3+y^2-10y+3>0$ を解くと $-\dfrac{3}{2}<y<\dfrac{1}{3}$ または $y>1$，

不等式 $6y^3+y^2-10y+3\geq 0$ を解くと $-\dfrac{3}{2}\leq y\leq\dfrac{1}{3}$ または $y\geq 1$．

終

$\boxed{\text{問6.拡充3.1}}$ 変数 x に関する不等式 $x^3+3 \geq \dfrac{x}{2}(5x+1)$ を解け.

不等式 $x^3+3 \geq \dfrac{x}{2}(5x+1)$ を整理すると $2x^3-5x^2-x+6 \geq 0$ ，左辺を因数分解すると

$$(x+1)(x-2)(2x-3) \geq 0 \ .$$

x の値	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$x+1$ の値の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x-3$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)(x-2)(2x-3)$ の値の符号	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

与えられた不等式を解くと， $-1 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$ または $x \geq 2$.

$\boxed{\text{問6.拡充3.2}}$ 変数 x に関する不等式 $3x^2(x-3) < 2x(x+2)$ を解け.

不等式 $3x^2(x-3) < 2x(x+2)$ を整理すると $3x^3 - 11x^2 - 4x < 0$ ，左辺を因数分解すると

$$x(x-4)(3x+1) < 0 \ .$$

x の値	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$3x+1$ の値の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x-4)(3x+1)$ の符号	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

与えられた不等式を解くと, $x < -\dfrac{1}{3}$ または $0 < x < 4$.

例 変数 x に関する 3 次不等式 $x^3-3x-2>0$ 及び $x^3-3x-2\geq 0$ を解く． $x=-1$ のとき $x^3-3x-2=0$ なので，因数定理より，整式 x^3-3x-2 は $x+1$ で割り切れる：

$$x^3-3x-2=(x+1)(x^2-x-2)\ .$$

更に $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ なので，

$$x^3-3x-2=(x+1)(x-2)(x+1)=(x+1)^2(x-2)\ .$$

x の値について場合分けして， $x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$ の値の符号を調べる．この表より，

x の値	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$(x+1)^2$ の値の符号	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)^2(x-2)$ の値の符号	$-$	0	$-$	0	$+$

x に関する不等式 $x^3-3x-2>0$ を解くと $2<x$ ，

x に関する不等式 $x^3-3x-2\geq 0$ を解くと $x=-1$ または $2\leq x$ ． 終

$\boxed{\text{問}6.\text{拡充}3.2}$ 変数 x に関する不等式 $x(x^2-7)>(x+4)(x-3)$ を解け.

不等式 $x(x^2-7)>(x+4)(x-3)$ を整理すると

$$x^3-x^2-8x+12>0\ .$$

左辺を因数分解すると

$$(x-2)^2(x+3)>0\ .$$

この不等式を解くと, $x>-3$ かつ $x\neq 2$.

x の値	$\cdots$	-3	$\cdots$	2	$\cdots$
$x+3$ の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-2)^2$ の符号	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$(x-2)^2(x+3)$ の符号	$-$	0	$+$	0	$+$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 u に関する 3 次不等式 $u^3+2u>3(u-2)$ を解く.

与えられた不等式 $u^3+2u>3(u-2)$ を整理すると

$$u^3-u+6>0\ .$$

$u=-2$ のとき $u^3-u+6=0$ なので，因数定理より，整式 u^3-u+6 は $u+2$ で割り切れる： $u^3-u+6=(u+2)(u^2-2u+3)$ ．よって

$$(u+2)(u^2-2u+3)>0\ .$$

u に関する 2 次方程式 $u^2-2u+3=0$ の判別式の値は $2^2-4\cdot 3=-8<0$ なので，u の 2 次式 u^2-2u+3 を平方完成する：任意の実数 u について

$$u^2-2u+3=(u-1)^2+2>0\ .$$

つまり，u の値に関わらず u^2-2u+3 の値は常に正である．従って，不等式

$$(u+2)(u^2-2u+3)>0$$

の両辺を u^2-2u+3 で割ることができて，$u+2>0$ ，つまり $u>-2$ ．故に，与えられた不等式を解くと $u>-2$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問6.拡充3.2}}$ 変数 x に関する不等式 $\dfrac{x^2}{3}(x-2) \leq \dfrac{x-1}{2}$ を解きなさい.

不等式 $\dfrac{x^2}{3}(x-2) \leq \dfrac{x-1}{2}$ を整理すると $2x^3-4x^2-3x+3 \leq 0$ ，この不等式の左辺は

$$\begin{aligned} 2x^3-4x^2-3x+3 &= (x+1)(2x^2-6x+3) \\ &= 2(x+1)\left(x-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right) , \end{aligned}$$

よって $(x+1)\left(x-\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right) \leq 0$ ．この不等式を解くと，

$x \leq -1$ または $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ ．