

6. 拡充2 絶対値が現れる不等式の解法

[定理 6.3.3] 任意の実数 a と b について,

$$|a| < b \iff -b < a < b ,$$

$$|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b ,$$

$$|a| > b \iff a > b \text{ または } a < -b ,$$

$$|a| \geq b \iff a \geq b \text{ または } a \leq -b .$$

この定理を用いると、絶対値記号が現れる不等式が比較的簡単に解けることがある。

例 変数 x に関する不等式 $|2x - 1| - 4 < x$ を解く.

例 変数 x に関する不等式 $|2x - 1| - 4 < x$ を解く.

$$|2x - 1| - 4 < x \iff |2x - 1| < x + 4$$

例 変数 x に関する不等式 $|2x - 1| - 4 < x$ を解く.

$$|2x - 1| - 4 < x \iff |2x - 1| < x + 4$$

$$\iff -(x + 4) < 2x - 1 < x + 4$$

任意の実数 a と b について, $|a| < b \iff -b < a < b$.

例 変数 x に関する不等式 $|2x - 1| - 4 < x$ を解く.

$$|2x - 1| - 4 < x \iff |2x - 1| < x + 4$$

$$\iff -(x + 4) < 2x - 1 < x + 4$$

$$\iff -(x + 4) < 2x - 1 \text{ かつ } 2x - 1 < x + 4$$

例 変数 x に関する不等式 $|2x - 1| - 4 < x$ を解く.

$$|2x - 1| - 4 < x \iff |2x - 1| < x + 4$$

$$\iff -(x + 4) < 2x - 1 < x + 4$$

$$\iff -(x + 4) < 2x - 1 \text{ かつ } 2x - 1 < x + 4$$

$$\iff -3x < 3 \text{ かつ } x < 5$$

$$\iff x > 1 \text{ かつ } x < 5$$

例 変数 x に関する不等式 $|2x - 1| - 4 < x$ を解く.

$$|2x - 1| - 4 < x \iff |2x - 1| < x + 4$$

$$\iff -(x + 4) < 2x - 1 < x + 4$$

$$\iff -(x + 4) < 2x - 1 \text{ かつ } 2x - 1 < x + 4$$

$$\iff -3x < 3 \text{ かつ } x < 5$$

$$\iff x > 1 \text{ かつ } x < 5$$

$$\iff 1 < x < 5 .$$

例 変数 x に関する不等式 $|2x - 1| - 4 < x$ を解く.

$$|2x - 1| - 4 < x \iff |2x - 1| < x + 4$$

$$\iff -(x + 4) < 2x - 1 < x + 4$$

$$\iff -(x + 4) < 2x - 1 \text{ かつ } 2x - 1 < x + 4$$

$$\iff -3x < 3 \text{ かつ } x < 5$$

$$\iff x > 1 \text{ かつ } x < 5$$

$$\iff 1 < x < 5 .$$

与えられた不等式を解くと $-1 < x < 5$.

しばしば次の様に同値記号を省いて記す：

$$|2x - 1| - 4 < x ,$$

$$|2x - 1| < x + 4 ,$$

$$-(x + 4) < 2x - 1 < x + 4 ,$$

$$-(x + 4) < 2x - 1 \text{ かつ } 2x - 1 < x + 4 ,$$

$$-3x < 3 \text{ かつ } x < 5 ,$$

$$x > -1 \text{ かつ } x < 5 ,$$

$$-1 < x < 5 .$$

同値記号を省いても同値変形であることに注意すること。

終

問6.拡充2.1 変数 x に関する不等式 $|3x - 4| + 2x \leq 5$ を解け.

不等式 $|3x - 4| + 2x \leq 5$ より,

$$\begin{aligned} |3x - 4| &\leq \quad , \\ &\leq 3x - 4 \leq \quad . \end{aligned}$$

不等式 $\leq 3x - 4$ を解く: \leq , x . 不等式 $3x - 4 \leq$
を解く: \leq , x . 故に. 与えられた不等式を解くと

問6.拡充2.1 変数 x に関する不等式 $|3x - 4| + 2x \leq 5$ を解け.

不等式 $|3x - 4| + 2x \leq 5$ より,

$$|3x - 4| \leq 5 - 2x ,$$

$$-(5 - 2x) \leq 3x - 4 \leq 5 - 2x .$$

不等式 $-(5 - 2x) \leq 3x - 4$ を解く: $-x \leq 1$, $x \geq -1$. 不等式 $3x - 4 \leq 5 - 2x$ を解く: $5x \leq 9$, $x \leq \frac{9}{5}$. 故に. 与えられた不等式を解くと $-1 \leq x \leq \frac{9}{5}$.

終

問6.拡充2.2 変数 x に関する不等式 $2|x-4| < 3x-5$ を解け.

不等式 $2|x-4| < 3x-5$ より,

$$|2x-8| < \quad .$$

$$< 2x-8 < \quad .$$

不等式 $\quad < 2x-8$ を解く: $\quad < \quad$, $x \quad$. 不等式

$2x-8 < \quad$ を解く: $\quad < \quad$, $x \quad$. 故に, 与えられた不等式を解く

と, $x \quad$ かつ $x \quad$, つまり

問6.拡充2.2 変数 x に関する不等式 $2|x-4| < 3x-5$ を解け.

不等式 $2|x-4| < 3x-5$ より,

$$|2x-8| < 3x-5 .$$

$$-(3x-5) < 2x-8 < 3x-5 .$$

不等式 $-(3x-5) < 2x-8$ を解く: $-5x < -13$, $x > \frac{13}{5}$. 不等式
 $2x-8 < 3x-5$ を解く: $-x < 3$, $x > -3$. 故に, 与えられた不等式を解く
と, $x > \frac{13}{5}$ かつ $x > -3$, つまり $x > \frac{13}{5}$. 終

例 変数 x に関する不等式 $|3x - 10| - x \geq 2$ を解く.

例 変数 x に関する不等式 $|3x - 10| - x \geq 2$ を解く.

$$|3x - 10| - x \geq 2 \iff |3x - 10| \geq x + 2$$

例 変数 x に関する不等式 $|3x - 10| - x \geq 2$ を解く.

$$|3x - 10| - x \geq 2 \iff |3x - 10| \geq x + 2$$

$$\iff 3x - 10 \geq x + 2 \text{ または } 3x - 10 \leq -(x + 2)$$

任意の実数 a と b について, $|a| \geq b \iff a \geq b \text{ または } a \leq -b$.

例 変数 x に関する不等式 $|3x - 10| - x \geq 2$ を解く.

$$|3x - 10| - x \geq 2 \iff |3x - 10| \geq x + 2$$

$$\iff 3x - 10 \geq x + 2 \text{ または } 3x - 10 \leq -(x + 2)$$

$$\iff 2x \geq 12 \text{ または } 4x \leq 8$$

$$\iff x \geq 6 \text{ または } x \leq 2 .$$

例 変数 x に関する不等式 $|3x - 10| - x \geq 2$ を解く.

$$|3x - 10| - x \geq 2 \iff |3x - 10| \geq x + 2$$

$$\iff 3x - 10 \geq x + 2 \text{ または } 3x - 10 \leq -(x + 2)$$

$$\iff 2x \geq 12 \text{ または } 4x \leq 8$$

$$\iff x \geq 6 \text{ または } x \leq 2 .$$

故に、与えられた不等式を解くと、 $x \geq 6$ または $x \leq 2$.

しばしば次の様に同値記号を省いて記す：

$$|3x - 10| - x \geq 2 ,$$

$$|3x - 10| \geq x + 2 ,$$

$$3x - 10 \geq x + 2 \quad \text{または} \quad 3x - 10 \leq -(x + 2) ,$$

$$2x \geq 12 \quad \text{または} \quad 4x \leq 8 ,$$

$$x \geq 6 \quad \text{または} \quad x \leq 2 .$$

同値記号を省いても同値変形であることに注意すること。

終

問6.拡充2.3 変数 x に関する不等式 $|3x - 7| + 2x \geq 8$ を解け.

不等式 $|3x - 7| + 2x \geq 8$ より,

$$|3x - 7| \geq \quad ,$$

$$3x - 7 \geq \quad \text{または} \quad 3x - 7 \leq \quad .$$

不等式 $3x - 7 \geq \quad$ を解く: $\geq \quad$, $x \quad$. 不等式 $3x - 7 \leq \quad$ を解く: $x \quad$. 故に, 与えられた不等式を解くと,

終

問6.拡充2.3 変数 x に関する不等式 $|3x - 7| + 2x \geq 8$ を解け.

不等式 $|3x - 7| + 2x \geq 8$ より,

$$|3x - 7| \geq 8 - 2x ,$$

$$3x - 7 \geq 8 - 2x \quad \text{または} \quad 3x - 7 \leq -(8 - 2x) .$$

不等式 $3x - 7 \geq 8 - 2x$ を解く： $5x \geq 15$, $x \geq 3$. 不等式 $3x - 7 \leq -(8 - 2x)$ を解く： $x \leq -1$. 故に, 与えられた不等式を解くと, $x \leq -1$ または $x \geq 3$.

終

問6.拡充2.4 変数 x に関する不等式 $\frac{|x-7|}{2} > x-4$ を解け.

不等式 $\frac{|x-7|}{2} > x-4$ より,

$$|x-7| > 2(x-4),$$

$$x-7 > 2x-8 \quad \text{または} \quad x-7 < -2x+8.$$

不等式 $x-7 > 2x-8$ を解く: $x < 1$, x . 不等式 $x-7 < -2x+8$

を解く: $x < 5$, x . 故に, 与えられた不等式を解くと, $x < 1$ または

$x < 5$, つまり

問6.拡充2.4 変数 x に関する不等式 $\frac{|x-7|}{2} > x-4$ を解け.

不等式 $\frac{|x-7|}{2} > x-4$ より,

$$|x-7| > 2x-8,$$

$$x-7 > 2x-8 \text{ または } x-7 < -(2x-8).$$

不等式 $x-7 > 2x-8$ を解く: $-x > -1$, $x < 1$. 不等式 $x-7 < -(2x-8)$ を解く: $3x < 15$, $x < 5$. 故に, 与えられた不等式を解くと, $x < 1$ または $x < 5$, つまり $x < 5$. 終