6.8 2次不等式の解法

実数を表す定数 a,b,c（但し $a\neq 0$ ）に対して，実数を表す変数 x に関する 2 次不等式

$$ax^2+bx+c<0\ ,\quad ax^2+bx+c\leq 0\ ,\quad ax^2+bx+c>0\ ,\quad ax^2+bx+c\geq 0$$

を解くためには，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 b^2-4ac について，

$b^2-4ac\geq 0$ のときは 左辺 ax^2+bx+c を因数分解して，

$b^2-4ac<0$ のときは 左辺 ax^2+bx+c を平方完成する．

最初に 2 次不等式の左辺の 2 次式 ax^2+bx+c について $b^2-4ac>0$ のときを扱う．このとき，定理 **4.5** により，2 次式 ax^2+bx+c は係数が実数の範囲で 1 次式の積に因数分解できる．

[定理 **4.5**] 実数 a, b, c について，$a \neq 0$ のとき，x の 2 次式 ax^2+bx+c が係数が実数の範囲で 1 次式の積の形に因数分解できることと $b^2-4ac \geq 0$ であることとは同値である．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$x^2-5x+4<0\ ,\quad x^2-5x+4\leq 0\ ,\quad x^2-5x+4>0\ ,\quad x^2-5x+4\geq 0\ .$$

$\boxed{例}$ 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$x^2-5x+4<0\ ,\quad x^2-5x+4\leq 0\ ,\quad x^2-5x+4>0\ ,\quad x^2-5x+4\geq 0\ .$$

左辺の 2 次式を因数分解すると $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$ ．x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-1)(x-4)<0\,,\ (x-1)(x-4)\leq 0\,,\ (x-1)(x-4)>0\,,\ (x-1)(x-4)\geq 0\,.$$

例 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$x^2-5x+4<0\ ,\quad x^2-5x+4\leq 0\ ,\quad x^2-5x+4>0\ ,\quad x^2-5x+4\geq 0\ .$$

左辺の 2 次式を因数分解すると $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$ ． x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-1)(x-4)<0\ ,\ (x-1)(x-4)\leq 0\ ,\ (x-1)(x-4)>0\ ,\ (x-1)(x-4)\geq 0\ .$$

左辺の 2 次式の因数 $x-1$ ，$x-4$ の値の符号は次のようになる：

$x<1$ のとき $x-1<0$ ，$x=1$ のとき $x-1=0$ ，$x>1$ のとき $x-1>0$ ；
$x<4$ のとき $x-4<0$ ，$x=4$ のとき $x-4=0$ ，$x>4$ のとき $x-4>0$ ．

$\boxed{例}$ 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$x^2-5x+4<0\ ,\quad x^2-5x+4\leq 0\ ,\quad x^2-5x+4>0\ ,\quad x^2-5x+4\geq 0\ .$$

左辺の 2 次式を因数分解すると $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$．x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-1)(x-4)<0\,,\ (x-1)(x-4)\leq 0\,,\ (x-1)(x-4)>0\,,\ (x-1)(x-4)\geq 0\,.$$

左辺の 2 次式の因数 $x-1$，$x-4$ の値の符号は次のようになる：

$x<1$ のとき $x-1<0$，$x=1$ のとき $x-1=0$，$x>1$ のとき $x-1>0$ ；

$x<4$ のとき $x-4<0$，$x=4$ のとき $x-4=0$，$x>4$ のとき $x-4>0$．

不等式の左辺 $(x-1)(x-4)$ の値の符号は次のようになる：

$x<1$ のとき，$x-1<0$ かつ $x-4<0$ なので $(x-1)(x-4)>0$ ；

$x=1$ のとき，$x-1=0$ なので $(x-1)(x-4)=0$ ；

$1<x<4$ のとき，$x-1>0$ かつ $x-4<0$ なので $(x-1)(x-4)<0$ ；

$x=4$ のとき，$x-4=0$ なので $(x-1)(x-4)=0$ ；

$x>4$ のとき，$x-1>0$ かつ $x-4>0$ なので $(x-1)(x-4)>0$．

$x<1$ のとき，$x-1<0$ かつ $x-4<0$ なので $(x-1)(x-4)>0$ ；

$x=1$ のとき，$x-1=0$ なので $(x-1)(x-4)=0$ ；

$1<x<4$ のとき，$x-1>0$ かつ $x-4<0$ なので $(x-1)(x-4)<0$ ；

$x=4$ のとき，$x-4=0$ なので $(x-1)(x-4)=0$ ；

$x>4$ のとき，$x-1>0$ かつ $x-4>0$ なので $(x-1)(x-4)>0$ ．

$x<1$ のとき，$x-1<0$ かつ $x-4<0$ なので $(x-1)(x-4)>0$ ；

$x=1$ のとき，$x-1=0$ なので $(x-1)(x-4)=0$ ；

$1<x<4$ のとき，$x-1>0$ かつ $x-4<0$ なので $(x-1)(x-4)<0$ ；

$x=4$ のとき，$x-4=0$ なので $(x-1)(x-4)=0$ ；

$x>4$ のとき，$x-1>0$ かつ $x-4>0$ なので $(x-1)(x-4)>0$.

これらのことを次のような表で表す.

x の値	$x<1$	$x=1$	$1<x<4$	$x=4$	$4<x$
$x-1$ の値の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)(x-4)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$

x の値	$x<1$	$x=1$	$1<x<4$	$x=4$	$4<x$
$x-1$ の値の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)(x-4)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$

x の値	$x<1$	$x=1$	$1<x<4$	$x=4$	$4<x$
$x-1$ の値の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)(x-4)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$

この表から次のことが分かる：

$$(x-1)(x-4)<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) \text{ の符号は } - \Leftrightarrow 1<x<4\,;$$

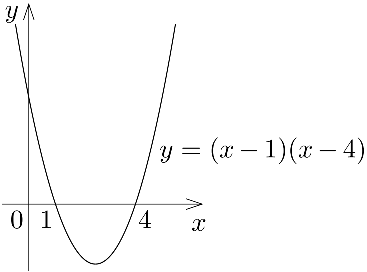
$$(x-1)(x-4)\leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) \text{ の符号は } - \text{ か } 0 \Leftrightarrow 1\leq x\leq 4\,;$$

$$(x-1)(x-4)>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) \text{ の符号は } + \Leftrightarrow x<1 \text{ または } x>4\,;$$

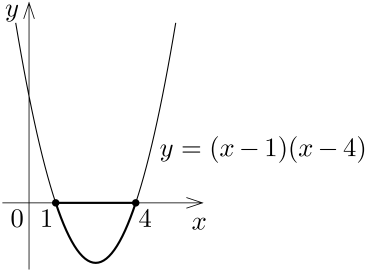
$$(x-1)(x-4)\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) \text{ の符号は } + \text{ か } 0 \Leftrightarrow x\leq 1 \text{ または } x\geq 4\,.$$

これらのことは x の関数 $y = (x-1)(x-4)$ のグラフを考えても分かる.

xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



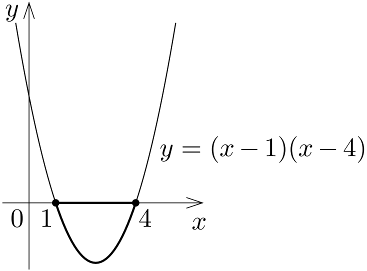
xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また， $y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



$y=(x-1)(x-4)$ について，

$$(x-1)(x-4) \leq 0 \iff y \leq 0 .$$

xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



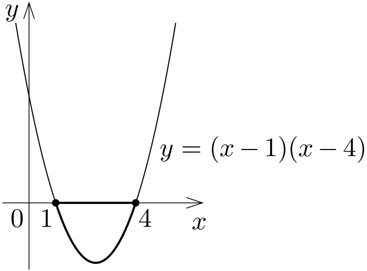
$y=(x-1)(x-4)$ について，

$$(x-1)(x-4) \leq 0 \iff y \leq 0 .$$

$y=(x-1)(x-4)$ のグラフにおいて，x 座標について $(x-1)(x-4) \leq 0$ となる部分は y 座標が 0 以下の部分である；この部分の x 座標の範囲は $1 \leq x \leq 4$ なので，

$$y=(x-1)(x-4) \leq 0 \iff 1 \leq x \leq 4 .$$

xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



$y=(x-1)(x-4)$ について，

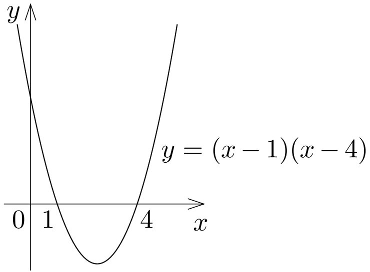
$$(x-1)(x-4) \leq 0 \iff y \leq 0 .$$

$y=(x-1)(x-4)$ のグラフにおいて，x 座標について $(x-1)(x-4) \leq 0$ となる部分は y 座標が 0 以下の部分である；この部分の x 座標の範囲は $1 \leq x \leq 4$ なので，

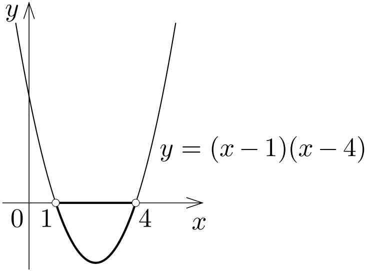
$$y=(x-1)(x-4) \leq 0 \iff 1 \leq x \leq 4 .$$

不等式 $(x-1)(x-4) \leq 0$ を解くと $1 \leq x \leq 4$ ．

　xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



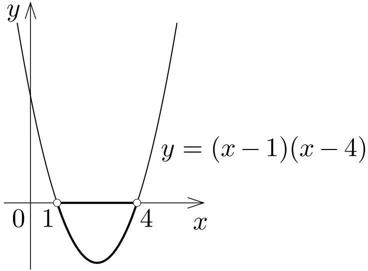
xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



$y=(x-1)(x-4)$ について，

$$(x-1)(x-4)<0 \iff y<0 \ .$$

xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また， $y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



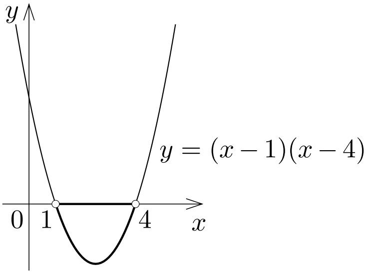
$y=(x-1)(x-4)$ について，

$$(x-1)(x-4) < 0 \iff y < 0 .$$

$y=(x-1)(x-4)$ のグラフにおいて，x 座標について $(x-1)(x-4)<0$ となる部分は y 座標が 0 より小さい部分である；この部分の x 座標の範囲は $1<x<4$ なので，

$$y=(x-1)(x-4) < 0 \iff 1 < x < 4 .$$

xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



$y=(x-1)(x-4)$ について，

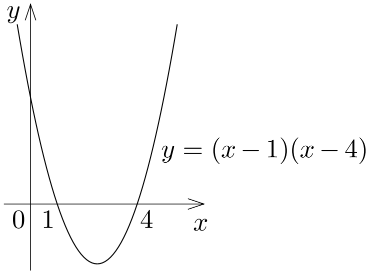
$$(x-1)(x-4)<0 \iff y<0 \ .$$

$y=(x-1)(x-4)$ のグラフにおいて，x 座標について $(x-1)(x-4)<0$ となる部分は y 座標が 0 より小さい部分である；この部分の x 座標の範囲は $1<x<4$ なので，

$$y=(x-1)(x-4)<0 \iff 1<x<4 \ .$$

不等式 $(x-1)(x-4)<0$ を解くと $1<x<4$ ．

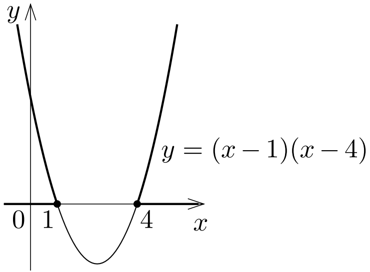
　xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



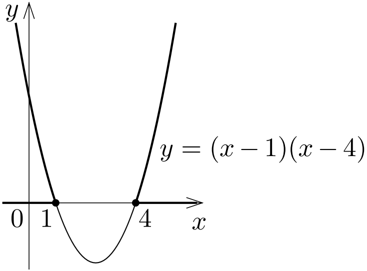
xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また， $y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．

$y=(x-1)(x-4)$ について，

$$(x-1)(x-4) \geq 0 \iff y \geq 0 \ .$$



xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



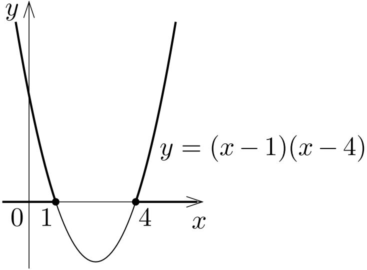
$y=(x-1)(x-4)$ について，

$$(x-1)(x-4) \geq 0 \iff y \geq 0 .$$

$y=(x-1)(x-4)$ のグラフにおいて，x 座標について $(x-1)(x-4) \geq 0$ となる部分は y 座標が 0 以上の部分である；この部分の x 座標の範囲は $x \leq 1$ と $x \geq 4$ なので，

$$y=(x-1)(x-4) \geq 0 \iff x \leq 1 \text{ または } x \geq 4 .$$

xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また， $y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



$y=(x-1)(x-4)$ について，

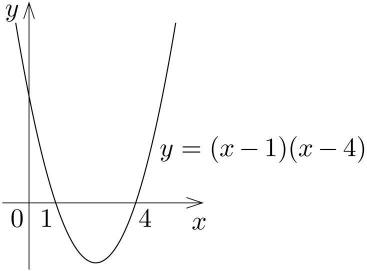
$$(x-1)(x-4) \geq 0 \iff y \geq 0 \ .$$

$y=(x-1)(x-4)$ のグラフにおいて，x 座標について $(x-1)(x-4) \geq 0$ となる部分は y 座標が 0 以上の部分である；この部分の x 座標の範囲は $x \leq 1$ と $x \geq 4$ なので，

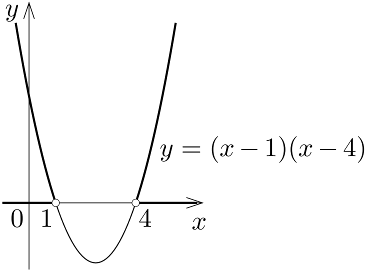
$$y=(x-1)(x-4) \geq 0 \iff x \leq 1 \text{ または } x \geq 4 \ .$$

不等式 $(x-1)(x-4) \geq 0$ を解くと， $x \leq 1$ または $x \geq 4$ ．

xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



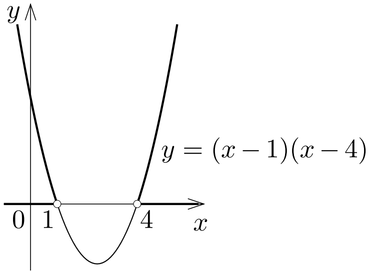
xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



$y=(x-1)(x-4)$ について，

$$(x-1)(x-4) > 0 \iff y > 0 .$$

xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1,0)$ と $(4,0)$ とである．また，$y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



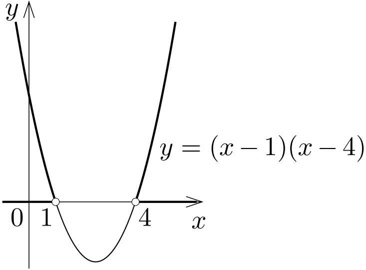
$y=(x-1)(x-4)$ について，

$$(x-1)(x-4)>0 \iff y>0 .$$

$y=(x-1)(x-4)$ のグラフにおいて，x 座標について $(x-1)(x-4)>0$ となる部分は y 座標が 0 より大きい部分である；この部分の x 座標の範囲は $x<1$ と $x>4$ なので，

$$y=(x-1)(x-4)>0 \iff x<1 \text{ または } x>4 .$$

xy 座標平面において，関数 $y=(x-1)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点は $(1{,}0)$ と $(4{,}0)$ とである．また， $y=(x-1)(x-4)$ のグラフは下に凸の放物線である．



$y=(x-1)(x-4)$ について，

$$(x-1)(x-4)>0 \iff y>0 .$$

$y=(x-1)(x-4)$ のグラフにおいて，x 座標について $(x-1)(x-4)>0$ となる部分は y 座標が 0 より大きい部分である；この部分の x 座標の範囲は $x<1$ と $x>4$ なので，

$$y=(x-1)(x-4)>0 \iff x<1 \text{ または } x>4 .$$

不等式 $(x-1)(x-4)>0$ を解くと， $x<1$ または $x>4$ ． 終

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $6-2x^2 \leq x$ を解く.

$\boxed{例}$ 変数 x に関する不等式 $6-2x^2 \leq x$ を解く．不等式 $6-2x^2 \leq x$ より $-2x^2-x+6 \leq 0$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $6-2x^2 \leq x$ を解く．不等式 $6-2x^2 \leq x$ より $-2x^2-x+6 \leq 0$ ． x^2 の係数を正にする方が考え易いので，両辺に -1 を掛けて

$$2x^2+x-6 \geq 0 \ .$$

2 次方程式 $2x^2+x-6=0$ の判別式の値が正なので，2 次式を因数分解するタイプである．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $6-2x^2 \leq x$ を解く．不等式 $6-2x^2 \leq x$ より $-2x^2-x+6 \leq 0$ ． x^2 の係数を正にする方が考え易いので，両辺に -1 を掛けて

$$2x^2+x-6 \geq 0 \ .$$

左辺を因数分解すると $2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$ なので

$$(x+2)(2x-3) \geq 0 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$　変数 x に関する不等式 $6-2x^2 \leq x$ を解く．不等式 $6-2x^2 \leq x$ より $-2x^2-x+6 \leq 0$ ． x^2 の係数を正にする方が考え易いので，両辺に -1 を掛けて

$$2x^2+x-6 \geq 0 \ .$$

左辺を因数分解すると $2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$ なので

$$(x+2)(2x-3) \geq 0 \ .$$

符号を調べるためには x の係数が 1 の方が分かりやすいので，左辺の因数 $2x-3$ と右辺とを 2 で割る：

$$(x+2)\left(\frac{2x-3}{2}\right) \geq \frac{0}{2} \ ,$$

$$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0 \ .$$

$\boxed{例}$ 変数 x に関する不等式 $6-2x^2 \leq x$ を解く．不等式 $6-2x^2 \leq x$ より $-2x^2-x+6 \leq 0$ ．x^2 の係数を正にする方が考え易いので，両辺に -1 を掛けて

$$2x^2+x-6 \geq 0 \ .$$

左辺を因数分解すると $2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$ なので

$$(x+2)(2x-3) \geq 0 \ .$$

符号を調べるためには x の係数が 1 の方が分かりやすいので，左辺の因数 $2x-3$ と右辺とを 2 で割る：

$$(x+2)\left(\frac{2x-3}{2}\right) \geq \frac{0}{2} \ ,$$

$$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0 \ .$$

x の値について場合分けして，左辺の 2 次式の値の符号を調べる．

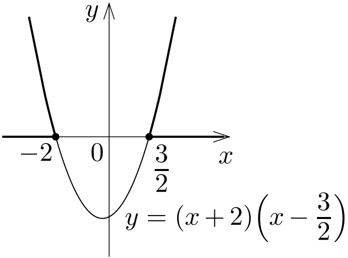
x の値	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < \frac{3}{2}$	$x = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x$
$x + 2$ の値の符号 $x - \frac{3}{2}$ の値の符号	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$
$(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$

x の値	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < \frac{3}{2}$	$x = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x$
$x+2$ の値の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{3}{2}$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$

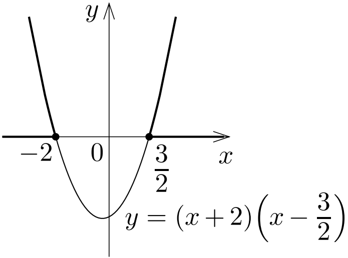
この表を次のように略す.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{3}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{3}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$



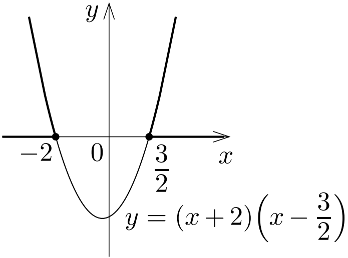
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{3}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$



この表より，

$$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0 \iff x \leq -2 \text{ または } x \geq \frac{3}{2} \ .$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{3}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$



この表より，

$$(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0 \iff x \leq -2 \text{ または } x \geq \frac{3}{2} .$$

故に，与えられた不等式を解くと， $x \leq -2$ または $x \geq \frac{3}{2}$ ． 終

$\boxed{問6.8.1}$ 変数 x に関する以不等式 $3x^2+7x>6$ を解け.

不等式 $3x^2+7x>6$ より,

$$\qquad\qquad > 0\ ,$$

$$(\qquad)(\qquad) > 0\ ,$$

$$(x\qquad)\Big(x\qquad\Big) > 0\ ,$$

よって, 与えられた不等式を解くと,

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
x x					
$(x\qquad)\Big(x\qquad\Big)$					

$\boxed{問6.8.1}$ 変数 x に関する以不等式 $3x^2+7x>6$ を解け.

不等式 $3x^2+7x>6$ より,

$$3x^2+7x-6>0\ ,$$

$$(x+3)(3x-2)>0\ ,$$

$$(x+3)\left(x-\frac{2}{3}\right)>0\ ,$$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{2}{3}$	$-$	0	$-$	0	$+$
$(x+3)\left(x-\frac{2}{3}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，与えられた不等式を解くと,

$x<-3$ または $x>\dfrac{2}{3}$.

$\boxed{終}$

$\boxed{問6.8.2}$ 変数 y に関する以不等式 $y+12 \geq 6y^2$ を解け.

不等式 $y+12 \geq 6y^2$ より,

$$\leq 0 \ ,$$

$$(\qquad)(\qquad) \leq 0 \ ,$$

$$\Big(y \qquad\Big)\Big(y \qquad\Big) \leq 0 \ ,$$

よって，与えられた不等式を解くと,

y	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y y					
$\Big(y \qquad\Big)\Big(y \qquad\Big)$					

$\boxed{問6.8.2}$ 変数 y に関する以不等式 $y+12 \geq 6y^2$ を解け.

不等式 $y+12 \geq 6y^2$ より,

$$6y^2 - y - 12 \leq 0 \ ,$$

$$(3y+4)(2y-3) \leq 0 \ ,$$

$$\left(y+\frac{4}{3}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right) \leq 0 \ ,$$

y	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$y+\frac{4}{3}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$y-\frac{3}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\left(y+\frac{4}{3}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)$	$-$	0	$-$	0	$+$

よって，与えられた不等式を解くと， $-\frac{4}{3} \leq y \leq \frac{3}{2}$.

$\boxed{終}$

4.5 節で述べた次の定理を用いることがある．

[2 次式の因数分解の公式] 定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 個の解を α と β とおくと，x の 2 次式 $ax^2 + bx + c$ は次のように因数分解できる：

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \ .$$

4.5 節で述べた次の定理を用いることがある．

[2 次式の因数分解の公式] 定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 個の解を α と β とおくと，x の 2 次式 $ax^2 + bx + c$ は次のように因数分解できる：

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 k に関する不等式 $k(6 - k) > 7$ を解く．

4.5 節で述べた次の定理を用いることがある.

[2 次式の因数分解の公式] 定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする. 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 個の解を α と β とおくと, x の 2 次式 $ax^2 + bx + c$ は次のように因数分解できる:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 k に関する不等式 $k(6 - k) > 7$ を解く. 不等式 $k(6 - k) > 7$ より, $6k - k^2 > 7$ なので

$$k^2 - 6k + 7 < 0 \ .$$

2 次方程式 $k^2 - 6k + 7 = 0$ の判別式の値が正なので, 2 次式を因数分解するタイプである.

4.5 節で述べた次の定理を用いることがある．

[2 次式の因数分解の公式] 定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 個の解を α と β とおくと，x の 2 次式 $ax^2 + bx + c$ は次のように因数分解できる：

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 k に関する不等式 $k(6-k) > 7$ を解く．不等式 $k(6-k) > 7$ より，$6k - k^2 > 7$ なので

$$k^2 - 6k + 7 < 0 \ .$$

k に関する 2 次方程式 $k^2 - 6k + 7 = 0$ の解は $3 \pm \sqrt{2}$ なので，2 次式の因数分解の公式により

$$k^2 - 6 + 7 = \left(k - 3 + \sqrt{2}\right)\left(k - 3 - \sqrt{2}\right) \ .$$

4.5 節で述べた次の定理を用いることがある．

[2 次式の因数分解の公式] 定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 個の解を α と β とおくと，x の 2 次式 $ax^2 + bx + c$ は次のように因数分解できる：

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) \ .$$

例 変数 k に関する不等式 $k(6-k) > 7$ を解く．不等式 $k(6-k) > 7$ より，$6k - k^2 > 7$ なので

$$k^2 - 6k + 7 < 0 \ .$$

k に関する 2 次方程式 $k^2 - 6k + 7 = 0$ の解は $3 \pm \sqrt{2}$ なので，2 次式の因数分解の公式により

$$k^2 - 6 + 7 = \left(k - 3 + \sqrt{2}\right)\left(k - 3 - \sqrt{2}\right) \ .$$

この k の 2 次式の値の符号を調べる．

$$k^2 - 6 + 7 = \left(k - 3 + \sqrt{2}\right)\left(k - 3 - \sqrt{2}\right) \ .$$

この k の 2 次式の値の符号を調べる.

k	$\cdots$	$3-\sqrt{2}$	$\cdots$	$3+\sqrt{2}$	$\cdots$
$k-3+\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$k-3-\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\left(k-3+\sqrt{2}\right)\left(k-3-\sqrt{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$k^2-6+7 = \left(k-3+\sqrt{2}\right)\left(k-3-\sqrt{2}\right) \ .$$

この k の 2 次式の値の符号を調べる.

k	$\cdots$	$3-\sqrt{2}$	$\cdots$	$3+\sqrt{2}$	$\cdots$
$k-3+\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$k-3-\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\left(k-3+\sqrt{2}\right)\left(k-3-\sqrt{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

この表より

$$\begin{aligned} k^2-6k+7<0 &\iff \left(k-3+\sqrt{2}\right)\left(k-3-\sqrt{2}\right)<0 \\ &\iff 3-\sqrt{2}<k<3+\sqrt{2} \ . \end{aligned}$$

$$k^2-6+7 = \left(k-3+\sqrt{2}\right)\left(k-3-\sqrt{2}\right) \ .$$

この k の 2 次式の値の符号を調べる.

k	$\cdots$	$3-\sqrt{2}$	$\cdots$	$3+\sqrt{2}$	$\cdots$
$k-3+\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$k-3-\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\left(k-3+\sqrt{2}\right)\left(k-3-\sqrt{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

この表より

$$\begin{aligned} k^2-6k+7<0 \iff& \left(k-3+\sqrt{2}\right)\left(k-3-\sqrt{2}\right)<0 \\ \iff& 3-\sqrt{2}<k<3+\sqrt{2} \ . \end{aligned}$$

故に，与えられた不等式を解くと $3-\sqrt{2}<k<3+\sqrt{2}$. $\boxed{終}$

$\boxed{問6.8.3}$ 変数 a に関する不等式 $a^2+4 \geq 6a$ を解け.

不等式 $a^2+4 \geq 6a$ より

$$\geq 0 \ .$$

方程式 $\qquad\qquad = 0$ の解は $\qquad\qquad$ なので,

$$(a \qquad\qquad)(a \qquad\qquad) \geq 0 \ .$$

a	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
a a					
$(a \qquad\qquad)(a \qquad\qquad)$					

与えられた不等式を解くと,

問6.8.3 変数 a に関する不等式 $a^2+4 \geq 6a$ を解け.

不等式 $a^2+4 \geq 6a$ より

$$a^2-6a+4 \geq 0 \ .$$

方程式 $a^2-6a+4=0$ の解は $3 \pm \sqrt{5}$ なので,

$$\left(a-3+\sqrt{2}\right)\left(a-3-\sqrt{5}\right) \geq 0 \ .$$

a	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
a a					
$\left(a \qquad\qquad \right)\left(a \qquad\qquad \right)$					

与えられた不等式を解くと,

問6.8.3 変数 a に関する不等式 $a^2+4 \geq 6a$ を解け.

不等式 $a^2+4 \geq 6a$ より

$$a^2-6a+4 \geq 0 \ .$$

方程式 $a^2-6a+4=0$ の解は $3 \pm \sqrt{5}$ なので,

$$\left(a-3+\sqrt{2}\right)\left(a-3-\sqrt{5}\right) \geq 0 \ .$$

k	$\cdots$	$3-\sqrt{5}$	$\cdots$	$3+\sqrt{5}$	$\cdots$
$a-3+\sqrt{5}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$a-3-\sqrt{5}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\left(a-3+\sqrt{5}\right)\left(a-3-\sqrt{5}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

与えられた不等式を解くと, $a \leq 3-\sqrt{5}$ または $a \geq 3+\sqrt{5}$. 終

$\boxed{\text{問}6.8.4}$ 変数 t に関する不等式 $2t(t+2)<1$ を解け.

不等式 $2t(t+2)<1$ より $\qquad\qquad <0$, $t^2 \qquad\qquad <0$, 方程式

$t^2 \qquad\qquad =0$ の解は $\qquad\qquad$ なので,

$$\Big(t \qquad\qquad\Big)\Big(t \qquad\qquad\Big) < 0\ .$$

t	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
t t					
$\Big(t \qquad\qquad\Big)\Big(t \qquad\qquad\Big)$					

与えられた不等式を解くと,

$\boxed{問6.8.4}$ 変数 t に関する不等式 $2t(t+2)<1$ を解け.

不等式 $2t(t+2)<1$ より $2t^2+4t-1<0$, $t^2+2t-\frac{1}{2}<0$, 方程式 $t^2+2t-\frac{1}{2}=0$ の解は $-1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ なので,

$$\left(t+1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(t+1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)<0 .$$

t	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
t t					
$\Big(t \qquad\qquad \Big)\Big(t \qquad\qquad \Big)$					

与えられた不等式を解くと,

$\boxed{問6.8.4}$ 変数 t に関する不等式 $2t(t+2)<1$ を解け.

不等式 $2t(t+2)<1$ より $2t^2+4t-1<0$ ， $t^2+2t-\dfrac{1}{2}<0$ ，方程式 $t^2+2t-\dfrac{1}{2}=0$ の解は $-1\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ なので,

$$\left(t+1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(t+1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)<0\ .$$

t	$\cdots$	$-1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	$-1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
$t+1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$t+1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\left(t+1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(t+1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

与えられた不等式を解くと, $-1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}<t<-1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. $\boxed{終}$

次に 2 次不等式の左辺の 2 次式 ax^2+bx+c について $b^2-4ac=0$ のときを扱う．このとき，定理 **4.4** により，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ には実数の重解 α があり，**4.5** 節の **2** 次式の因数分解の公式により，2 次式 ax^2+bx+c は $a(x-\alpha)^2$ の形に因数分解できる．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$x^2 - 6x + 9 \geq 0\ ,\quad x^2 - 6x + 9 < 0\ ,\quad x^2 - 6x + 9 > 0\ ,\quad x^2 - 6x + 9 \leq 0\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$x^2-6x+9 \geq 0\ ,\quad x^2-6x+9 < 0\ ,\quad x^2-6x+9 > 0\ ,\quad x^2-6x+9 \leq 0\ .$$

左辺の 2 次式 x^2-6x+9 を因数分解すると

$$x^2-6x+9 = (x-3)^2\ .$$

$\boxed{例}$ 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$x^2-6x+9 \geq 0\ ,\quad x^2-6x+9 < 0\ ,\quad x^2-6x+9 > 0\ ,\quad x^2-6x+9 \leq 0\ .$$

左辺の 2 次式 x^2-6x+9 を因数分解すると

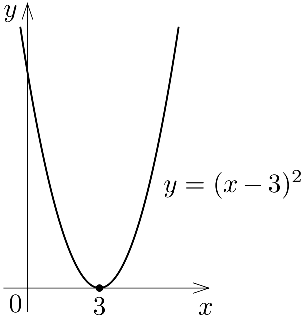
$$x^2-6x+9 = (x-3)^2\ .$$

x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-3)^2 \geq 0\ ,\quad (x-3)^2 < 0\ ,\quad (x-3)^2 > 0\ ,\quad (x-3)^2 \leq 0\ .$$

x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

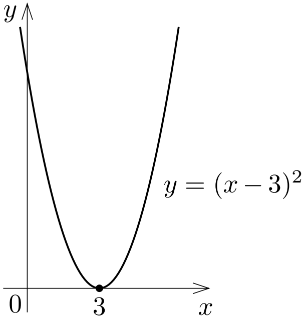
$$(x-3)^2 \geq 0 \ , \quad (x-3)^2 < 0 \ , \quad (x-3)^2 > 0 \ , \quad (x-3)^2 \leq 0 \ .$$



x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-3)^2 \geq 0 \ , \quad (x-3)^2 < 0 \ , \quad (x-3)^2 > 0 \ , \quad (x-3)^2 \leq 0 \ .$$

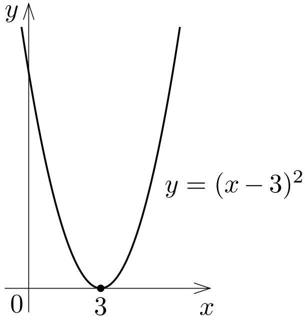
x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，総ての実数が不等式 $(x-3)^2 \geq 0$ の解ある．



x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-3)^2 \geq 0 \ , \quad (x-3)^2 < 0 \ , \quad (x-3)^2 > 0 \ , \quad (x-3)^2 \leq 0 \ .$$

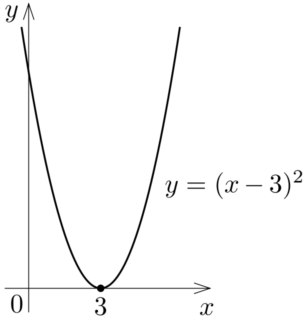
x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，総ての実数が不等式 $(x-3)^2 \geq 0$ の解ある．x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，$(x-3)^2 < 0$ である実数 x は無い；つまり，不等式 $(x-3)^2 < 0$ の解は無い．



x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-3)^2 \geq 0\ ,\quad (x-3)^2 < 0\ ,\quad (x-3)^2 > 0\ ,\quad (x-3)^2 \leq 0\ .$$

x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，総ての実数が不等式 $(x-3)^2 \geq 0$ の解ある．x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，$(x-3)^2 < 0$ である実数 x は無い；つまり，不等式 $(x-3)^2 < 0$ の解は無い．



$$(x-3)^2 \leq 0 \iff x-3=0 \iff x=3\ .$$

[定理 **2.5.11**] 任意の実数 a について

$$a^2 \leq 0 \iff a=0\ .$$

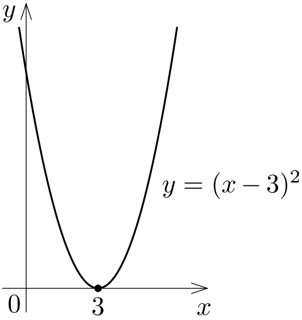
x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-3)^2 \geq 0 \ , \quad (x-3)^2 < 0 \ , \quad (x-3)^2 > 0 \ , \quad (x-3)^2 \leq 0 \ .$$

x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，総ての実数が不等式 $(x-3)^2 \geq 0$ の解ある．x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，$(x-3)^2 < 0$ である実数 x は無い；つまり，不等式 $(x-3)^2 < 0$ の解は無い．

$$(x-3)^2 \leq 0 \iff x-3=0 \iff x=3 \ .$$

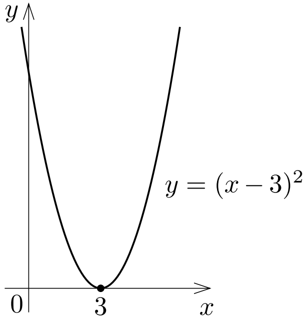
不等式 $(x-3)^2 \leq 0$ を解くと $x=3$ ．



x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-3)^2 \geq 0 \ , \quad (x-3)^2 < 0 \ , \quad (x-3)^2 > 0 \ , \quad (x-3)^2 \leq 0 \ .$$

x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，総ての実数が不等式 $(x-3)^2 \geq 0$ の解ある．x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，$(x-3)^2 < 0$ である実数 x は無い；つまり，不等式 $(x-3)^2 < 0$ の解は無い．



$$(x-3)^2 \leq 0 \iff x-3=0 \iff x=3 \ .$$

不等式 $(x-3)^2 \leq 0$ を解くと $x=3$．

$$(x-3)^2 > 0 \iff x-3 \neq 0 \iff x \neq 3 \ .$$

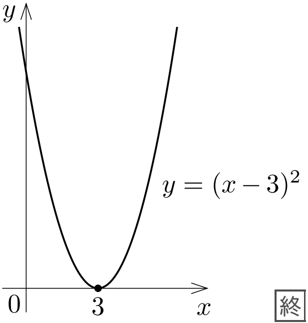
[定理 **2.5.12**] 任意の実数 a について

$$a^2 > 0 \iff a \neq 0 \ .$$

x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-3)^2 \geq 0\ ,\quad (x-3)^2 < 0\ ,\quad (x-3)^2 > 0\ ,\quad (x-3)^2 \leq 0\ .$$

x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，総ての実数が不等式 $(x-3)^2 \geq 0$ の解ある．x がどんな実数でも $(x-3)^2 \geq 0$ なので，$(x-3)^2 < 0$ である実数 x は無い；つまり，不等式 $(x-3)^2 < 0$ の解は無い．



$$(x-3)^2 \leq 0 \iff x-3=0 \iff x=3\ .$$

不等式 $(x-3)^2 \leq 0$ を解くと $x=3$ ．

$$(x-3)^2 > 0 \iff x-3 \neq 0 \iff x \neq 3\ .$$

不等式 $(x-3)^2 > 0$ を解くと $x \neq 3$ ．

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 変数 a に関する不等式 $a-\dfrac{a^2}{3} \geq \dfrac{3}{4}$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 a に関する不等式 $a-\dfrac{a^2}{3}\geq\dfrac{3}{4}$ を解く. 不等式 $a-\dfrac{a^2}{3}\geq\dfrac{3}{4}$ より

$$-\frac{a^2}{3}+a-\frac{3}{4}\geq 0\ .$$

2 次方程式 $-\dfrac{a^2}{3}+a-\dfrac{3}{4}=0$ の判別式の値が 0 なので, 2 次式を因数分解するタイプである.

$\boxed{例}$ 変数 a に関する不等式 $a-\dfrac{a^2}{3}\geq\dfrac{3}{4}$ を解く．不等式 $a-\dfrac{a^2}{3}\geq\dfrac{3}{4}$ より

$$-\frac{a^2}{3}+a-\frac{3}{4}\geq 0\ .$$

両辺に -3 を掛けて

$$a^2-3a+\frac{9}{4}\leq 0\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 a に関する不等式 $a-\dfrac{a^2}{3}\geq\dfrac{3}{4}$ を解く．不等式 $a-\dfrac{a^2}{3}\geq\dfrac{3}{4}$ より

$$-\frac{a^2}{3}+a-\frac{3}{4}\geq 0\ .$$

両辺に -3 を掛けて

$$a^2-3a+\frac{9}{4}\leq 0\ .$$

この不等式の左辺は $a^2-3a+\dfrac{9}{4}=\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2$ なので，

$$\left(a-\frac{3}{2}\right)^2\leq 0\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 a に関する不等式 $a-\dfrac{a^2}{3} \geq \dfrac{3}{4}$ を解く．不等式 $a-\dfrac{a^2}{3} \geq \dfrac{3}{4}$ より

$$-\frac{a^2}{3}+a-\frac{3}{4} \geq 0 \ .$$

両辺に -3 を掛けて

$$a^2-3a+\frac{9}{4} \leq 0 \ .$$

この不等式の左辺は $a^2-3a+\dfrac{9}{4}=\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2$ なので，

$$\left(a-\frac{3}{2}\right)^2 \leq 0 \ .$$

よって $a-\dfrac{3}{2}=0$ なので $a=\dfrac{3}{2}$ ．

例 変数 a に関する不等式 $a-\dfrac{a^2}{3} \geq \dfrac{3}{4}$ を解く．不等式 $a-\dfrac{a^2}{3} \geq \dfrac{3}{4}$ より

$$-\frac{a^2}{3}+a-\frac{3}{4} \geq 0 \ .$$

両辺に -3 を掛けて

$$a^2-3a+\frac{9}{4} \leq 0 \ .$$

この不等式の左辺は $a^2-3a+\dfrac{9}{4}=\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2$ なので，

$$\left(a-\frac{3}{2}\right)^2 \leq 0 \ .$$

よって $a-\dfrac{3}{2}=0$ なので $a=\dfrac{3}{2}$ ．故に，与えられた不等式を解くと $a=\dfrac{3}{2}$ ．

終

$\boxed{問6.8.5}$ 変数 k に関する不等式 $-3k^2-2k \geq \dfrac{1}{3}$ を解け.

不等式 $-3k^2-2k \geq \dfrac{1}{3}$ より,

$\boxed{\text{問}6.8.6}$ 変数 k に関する不等式 $-3k^2-2k \geq \dfrac{1}{3}$ を解け.

不等式 $-3k^2-2k \geq \dfrac{1}{3}$ より,

$$k^2+\frac{2}{3}k+\frac{1}{9} \leq 0 \ ,$$

$$\left(k+\frac{1}{3}\right)^2 \leq 0 \ ,$$

$$k+\frac{1}{3} = 0 \ ,$$

$$k = -\frac{1}{3} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

例 変数 t に関する不等式 $2t-\dfrac{3}{2}t^2<\dfrac{2}{3}$ を解く.

例 変数 t に関する不等式 $2t-\frac{3}{2}t^2<\frac{2}{3}$ を解く．不等式 $2t-\frac{3}{2}t^2<\frac{2}{3}$ より

$$-\frac{3}{2}t^2+2t-\frac{2}{3}<0\ .$$

2 次方程式 $-\frac{3}{2}t^2+2t-\frac{2}{3}=0$ の判別式の値が 0 なので，2 次式を因数分解するタイプである．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t に関する不等式 $2t-\frac{3}{2}t^2<\frac{2}{3}$ を解く. 不等式 $2t-\frac{3}{2}t^2<\frac{2}{3}$ より

$$-\frac{3}{2}t^2+2t-\frac{2}{3}<0\ .$$

両辺に $-\frac{2}{3}$ を掛けて

$$t^2-\frac{4}{3}t+\frac{4}{9}>0\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t に関する不等式 $2t-\dfrac{3}{2}t^2<\dfrac{2}{3}$ を解く．不等式 $2t-\dfrac{3}{2}t^2<\dfrac{2}{3}$ より

$$-\frac{3}{2}t^2+2t-\frac{2}{3}<0\ .$$

両辺に $-\dfrac{2}{3}$ を掛けて

$$t^2-\frac{4}{3}t+\frac{4}{9}>0\ .$$

この不等式の左辺は $t^2-\dfrac{4}{3}t+\dfrac{4}{9}=\left(t-\dfrac{2}{3}\right)^2$ なので，

$$\left(t-\frac{2}{3}\right)^2>0\ .$$

$\boxed{例}$ 変数 t に関する不等式 $2t-\dfrac{3}{2}t^2<\dfrac{2}{3}$ を解く．不等式 $2t-\dfrac{3}{2}t^2<\dfrac{2}{3}$ より

$$-\frac{3}{2}t^2+2t-\frac{2}{3}<0\ .$$

両辺に $-\dfrac{2}{3}$ を掛けて

$$t^2-\frac{4}{3}t+\frac{4}{9}>0\ .$$

この不等式の左辺は $t^2-\dfrac{4}{3}t+\dfrac{4}{9}=\left(t-\dfrac{2}{3}\right)^2$ なので，

$$\left(t-\frac{2}{3}\right)^2>0\ .$$

よって $t-\dfrac{2}{3}\neq 0$ なので $t\neq\dfrac{2}{3}$ ．

$\boxed{例}$ 変数 t に関する不等式 $2t - \dfrac{3}{2}t^2 < \dfrac{2}{3}$ を解く．不等式 $2t - \dfrac{3}{2}t^2 < \dfrac{2}{3}$ より

$$-\frac{3}{2}t^2 + 2t - \frac{2}{3} < 0 \ .$$

両辺に $-\dfrac{2}{3}$ を掛けて

$$t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9} > 0 \ .$$

この不等式の左辺は $t^2 - \dfrac{4}{3}t + \dfrac{4}{9} = \left(t - \dfrac{2}{3}\right)^2$ なので，

$$\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 > 0 \ .$$

よって $t - \dfrac{2}{3} \neq 0$ なので $t \neq \dfrac{2}{3}$ ．故に，与えられた不等式を解くと $t \neq \dfrac{2}{3}$ ．

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}6.8.7}$ 変数 y に関する不等式 $y-\dfrac{3}{5}y^2<\dfrac{5}{12}$ を解け.

不等式 $y-\dfrac{3}{5}y^2<\dfrac{5}{12}$ より,

$\boxed{問6.8.7}$ 変数 y に関する不等式 $y-\frac{3}{5}y^2<\frac{5}{12}$ を解け.

不等式 $y-\frac{3}{5}y^2<\frac{5}{12}$ より,

$$-\frac{3}{5}y^2+y-\frac{5}{12}<0\ .$$

$$y^2-\frac{5}{3}y+\frac{25}{36}>0\ ,$$

$$\left(y-\frac{5}{6}\right)^2>0\ ,$$

$$y-\frac{5}{6}\neq 0\ ,$$

$$y\neq\frac{5}{6}\ .$$

$\boxed{終}$

最後に 2 次不等式の左辺の 2 次式 ax^2+bx+c について $b^2-4ac<0$ のときを扱う.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$2x^2-8x+9<0\ ,\quad 2x^2-8x+9\leq 0\ ,\quad 2x^2-8x+9>0\ ,\quad 2x^2-8x+9\geq 0\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$2x^2 - 8x + 9 < 0 \ , \quad 2x^2 - 8x + 9 \leq 0 \ , \quad 2x^2 - 8x + 9 > 0 \ , \quad 2x^2 - 8x + 9 \geq 0 \ .$$

左辺の 2 次式の x^2 の係数を 1 にするために両辺を 2 で割る：

$$x^2 - 4x + \frac{9}{2} < 0 \ , \quad x^2 - 4x + \frac{9}{2} \leq 0 \ , \quad x^2 - 4x + \frac{9}{2} > 0 \ , \quad x^2 - 4x + \frac{9}{2} \geq 0 \ .$$

例　変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$2x^2-8x+9<0\ ,\quad 2x^2-8x+9\leq 0\ ,\quad 2x^2-8x+9>0\ ,\quad 2x^2-8x+9\geq 0\ .$$

左辺の 2 次式の x^2 の係数を 1 にするために両辺を 2 で割る：

$$x^2-4x+\frac{9}{2}<0\ ,\quad x^2-4x+\frac{9}{2}\leq 0\ ,\quad x^2-4x+\frac{9}{2}>0\ ,\quad x^2-4x+\frac{9}{2}\geq 0\ .$$

左辺の 2 次式 $2x^2-4x+\dfrac{9}{2}$ を平方完成する：

$$x^2-4x+\frac{9}{2}=x^2-4x+4-4+\frac{9}{2}=(x-2)^2+\frac{1}{2}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する以下の 2 次不等式を解く：

$$2x^2-8x+9<0\ ,\quad 2x^2-8x+9\leq 0\ ,\quad 2x^2-8x+9>0\ ,\quad 2x^2-8x+9\geq 0\ .$$

左辺の 2 次式の x^2 の係数を 1 にするために両辺を 2 で割る：

$$x^2-4x+\frac{9}{2}<0\ ,\quad x^2-4x+\frac{9}{2}\leq 0\ ,\quad x^2-4x+\frac{9}{2}>0\ ,\quad x^2-4x+\frac{9}{2}\geq 0\ .$$

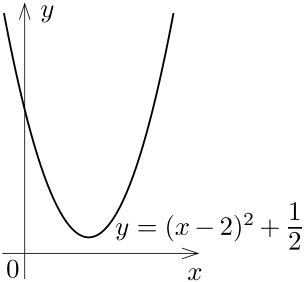
左辺の 2 次式 $2x^2-4x+\dfrac{9}{2}$ を平方完成する：

$$x^2-4x+\frac{9}{2}=x^2-4x+4-4+\frac{9}{2}=(x-2)^2+\frac{1}{2}\ .$$

x に関する以下の 2 次不等式を解けばよい：

$$(x-2)^2+\frac{1}{2}<0\ ,\quad (x-2)^2+\frac{1}{2}\leq 0\ ,\quad (x-2)^2+\frac{1}{2}>0\ ,\quad (x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0\ .$$

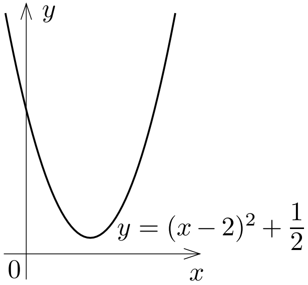
2 次不等式 $(x-2)^2+\dfrac{1}{2}<0$ ，$(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\leq 0$ ，$(x-2)^2+\dfrac{1}{2}>0$ ，$(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\geq 0$ を解けばよい.



2 次不等式 $(x-2)^2+\dfrac{1}{2}<0$ ， $(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\leq 0$ ，$(x-2)^2+\dfrac{1}{2}>0$ ，$(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\geq 0$ を解けばよい．

任意の実数 x について， $(x-2)^2\geq 0$ なので，

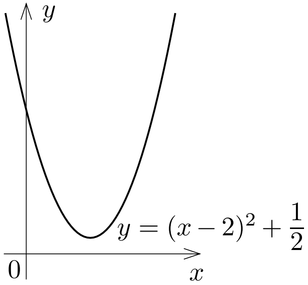
$$(x-2)^2+\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} > 0 .$$



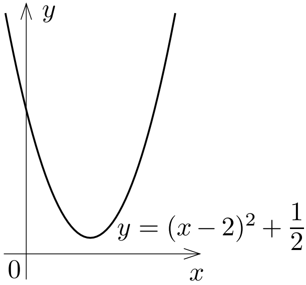
2 次不等式 $(x-2)^2+\dfrac{1}{2}<0$ ，$(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\leq 0$ ，$(x-2)^2+\dfrac{1}{2}>0$ ，$(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\geq 0$ を解けばよい.
任意の実数 x について，$(x-2)^2\geq 0$ なので，

$$(x-2)^2+\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} > 0 .$$

よって総ての実数が不等式 $(x-2)^2+\dfrac{1}{2}>0$ の解である.



2 次不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}<0$ ， $(x-2)^2+\frac{1}{2}\leq 0$ ，
$(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ ，$(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$ を解けばよい．

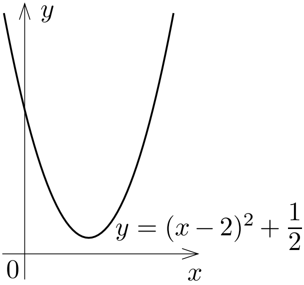


任意の実数 x について， $(x-2)^2\geq 0$ なので，

$$(x-2)^2+\frac{1}{2}\ \geq\ \frac{1}{2}\ >\ 0\ .$$

よって総ての実数が不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ の解である．任意の実数 x について， $(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ なので $(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$ ；よって総ての実数が不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$ の解である．

2 次不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}<0$ ，$(x-2)^2+\frac{1}{2}\leq 0$ ，$(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ ，$(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$ を解けばよい.

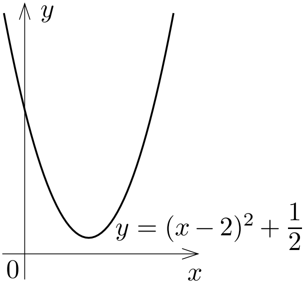


任意の実数 x について，$(x-2)^2\geq 0$ なので，

$$(x-2)^2+\frac{1}{2}\ \geq\ \frac{1}{2}\ >\ 0\ .$$

よって総ての実数が不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ の解である．任意の実数 x について，$(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ なので $(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$ ；よって総ての実数が不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$ の解である．任意の実数 x について $(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ なので，$(x-2)^2+\frac{1}{2}\leq 0$ である実数 x は無い；つまり不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}\leq 0$ の解無い.

2 次不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}<0$ ，$(x-2)^2+\frac{1}{2}\leq 0$ ，$(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ ，$(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$ を解けばよい．



任意の実数 x について，$(x-2)^2\geq 0$ なので，

$$(x-2)^2+\frac{1}{2}\ \geq\ \frac{1}{2}\ >\ 0\ .$$

よって総ての実数が不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ の解である．任意の実数 x について，$(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ なので $(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$ ；よって総ての実数が不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$ の解である．任意の実数 x について $(x-2)^2+\frac{1}{2}>0$ なので，$(x-2)^2+\frac{1}{2}\leq 0$ である実数 x は無い；つまり不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}\leq 0$ の解無い．任意の実数 x について $(x-2)^2+\frac{1}{2}\geq 0$ なので，$(x-2)^2+\frac{1}{2}<0$ である実数 x は無い；つまり不等式 $(x-2)^2+\frac{1}{2}<0$ の解は無い．

終

$\boxed{\text{例}}$ 変数 u に関する不等式 $2u^2 > 6u - 5$ を解く.

例 変数 u に関する不等式 $2u^2 > 6u - 5$ を解く．不等式 $2u^2 > 6u - 5$ より，

$$2u^2 - 6u + 5 > 0 \ ,$$

2 次方程式 $2u^2 - 6u + 5 = 0$ の判別式の値が負なので，2 次式を平方完成するタイプである．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 u に関する不等式 $2u^2 > 6u-5$ を解く．不等式 $2u^2 > 6u-5$ より，

$$2u^2 - 6u + 5 > 0 \ ,$$

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} > 0 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 u に関する不等式 $2u^2 > 6u - 5$ を解く．不等式 $2u^2 > 6u - 5$ より，

$$2u^2 - 6u + 5 > 0 \ ,$$

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} > 0 \ .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} = u^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}u + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{2} = \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 u に関する不等式 $2u^2 > 6u - 5$ を解く．不等式 $2u^2 > 6u - 5$ より，

$$2u^2 - 6u + 5 > 0 \ ,$$

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} > 0 \ .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} = u^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}u + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{2} = \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \ ,$$

よって

$$\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0 \ .$$

例 変数 u に関する不等式 $2u^2 > 6u - 5$ を解く. 不等式 $2u^2 > 6u - 5$ より,

$$2u^2 - 6u + 5 > 0 \ ,$$

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} > 0 \ .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} = u^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}u + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{2} = \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \ ,$$

よって

$$\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0 \ .$$

任意の実数 u について $\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} > 0$.

$\boxed{例}$ 変数 u に関する不等式 $2u^2 > 6u - 5$ を解く．不等式 $2u^2 > 6u - 5$ より，

$$2u^2 - 6u + 5 > 0 \ ,$$

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} > 0 \ .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$u^2 - 3u + \frac{5}{2} = u^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} u + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{2} = \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \ ,$$

よって

$$\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0 \ .$$

任意の実数 u について $\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} > 0$ ．故に総ての実数が与えられた不等式の解である． $\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t に関する不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ を解く.

$\boxed{例}$ 変数 t に関する不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ を解く．不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ より，

$$3t^2+5t+4 \leq 0\ ,$$

2 次方程式 $3t^2+5t+4=0$ の判別式の値が負なので，2 次式を平方完成するタイプである．

例 変数 t に関する不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ を解く．不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ より，

$$3t^2 + 5t + 4 \leq 0 \ ,$$

$$t^2 + \frac{5}{3}t + \frac{4}{3} \leq 0 \ .$$

$\boxed{例}$ 変数 t に関する不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ を解く．不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ より，

$$3t^2+5t+4 \leq 0 \ ,$$

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} \leq 0 \ .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} = t^2+2\cdot\frac{5}{6}t+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{4}{3} = \left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \ ,$$

$\boxed{例}$ 変数 t に関する不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ を解く．不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ より，

$$3t^2+5t+4 \leq 0 \ ,$$

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} \leq 0 \ .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} = t^2+2\cdot\frac{5}{6}t+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{4}{3} = \left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \ ,$$

よって

$$\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \leq 0 \ .$$

例 変数 t に関する不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ を解く．不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ より，

$$3t^2+5t+4 \leq 0 \ ,$$

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} \leq 0 \ .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} = t^2+2\cdot\frac{5}{6}t+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{4}{3} = \left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \ ,$$

よって

$$\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \leq 0 \ .$$

任意の実数 t について $\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \geq \frac{23}{36} > 0$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t に関する不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ を解く. 不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ より,

$$3t^2+5t+4 \leq 0 \ ,$$

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} \leq 0 \ .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} = t^2+2\cdot\frac{5}{6}t+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{4}{3} = \left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \ ,$$

よって

$$\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \leq 0 \ .$$

任意の実数 t について $\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \geq \frac{23}{36} > 0$. よって $\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \leq 0$ である実数 t は無い.

例 変数 t に関する不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ を解く．不等式 $3t^2 \leq -5t-4$ より，

$$3t^2+5t+4 \leq 0 \ ,$$

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} \leq 0 \ .$$

左辺の 2 次式を平方完成すると

$$t^2+\frac{5}{3}t+\frac{4}{3} = t^2+2\cdot\frac{5}{6}t+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{4}{3} = \left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \ ,$$

よって

$$\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \leq 0 \ .$$

任意の実数 t について $\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \geq \frac{23}{36} > 0$ ．よって $\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36} \leq 0$ である実数 t は無い．故に与えられた不等式の解は無い． 終

$\boxed{\text{問}6.8.8}$ 変数 x に関する不等式 $\dfrac{2x^2+1}{5} > \dfrac{x}{2}$ を解け.

不等式 $\dfrac{2x^2+1}{5} > \dfrac{x}{2}$ より,

$$\qquad > \qquad ,$$

$$x^2 \qquad\qquad 0 \ .$$

この不等式の左辺は

$$x^2 \qquad\qquad = x^2 \qquad\qquad = \left(x \qquad\right)^2 \qquad .$$

よって

$$\left(x \qquad\right)^2 \qquad\qquad 0 \ .$$

任意の実数 x について, $\left(x \qquad\right)^2 \qquad\qquad 0$. 故に

$\boxed{問6.8.8}$ 変数 x に関する不等式 $\dfrac{2x^2+1}{5} > \dfrac{x}{2}$ を解け.

不等式 $\dfrac{2x^2+1}{5} > \dfrac{x}{2}$ より,

$$2x^2+1 > \frac{5}{2}x \ ,$$

$$x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2} > 0 \ .$$

この不等式の左辺は

$$x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2} = x^2 - 2\cdot\frac{5}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 - \frac{25}{64} + \frac{1}{2} = \left(x-\frac{5}{8}\right)^2 + \frac{7}{64} \ .$$

よって

$$\left(x-\frac{5}{8}\right)^2 + \frac{7}{64} > 0 \ .$$

任意の実数 x について, $\left(x-\frac{5}{8}\right)^2 + \frac{7}{64} > 0$. 故に総ての実数が与えられた不等式の解である. $\boxed{終}$

問6.8.9 変数 x に関する不等式 $2(x+1)^2 \leq x$ を解け.

不等式 $2(x+1)^2 \leq x$ より,

$$\leq \quad ,$$

$$x^2 \qquad .$$

この不等式の左辺は

$$x^2 \qquad = x^2 \qquad = \left(x \quad\right)^2 \qquad ,$$

よって

$$\left(x \quad\right)^2 \qquad 0 \; .$$

任意の実数 x について $\left(x \quad\right)^2 \qquad 0$, よって $\left(x \quad\right)^2$

故に

$\boxed{\text{問}6.8.9}$ 変数 x に関する不等式 $2(x+1)^2 \leq x$ を解け.

不等式 $2(x+1)^2 \leq x$ より,

$$2x^2 + 4x + 2 \leq x \ ,$$
$$x^2 + \frac{3}{2}x + 1 \leq 0 \ .$$

この不等式の左辺は

$$x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 1 = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} \ ,$$

よって

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} \leq 0 \ .$$

任意の実数 x について $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} > 0$, よって $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} \leq 0$ である実数 x は無い. 故に与えられた不等式の解は無い. $\boxed{\text{終}}$

　定数 a,b,c は実数で $a>0$ とする．変数 x に関する 2 次不等式

$$ax^2+bx+c<0\ ,\quad ax^2+bx+c\leq 0\ ,\quad ax^2+bx+c>0\ ,\quad ax^2+bx+c\geq 0$$

の解法をまとめる．

$b^2-4ac>0$ とする．定理 **4.4** により 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ には異なる 2 個の実数解 α, β とがある．**4.5** 節の 2 次式の因数分解の公式により

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta) \ .$$

この因数分解された 2 次式 $a(x-\alpha)(x-\beta)$ の値の符号を調べる． $\alpha<\beta$ とする． $a>0$ とした．

x の値	$x<\alpha$	$x=\alpha$	$\alpha<x<\beta$	$x=\beta$	$\beta<x$
$x-\alpha$ の値の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\beta$ の値の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$a(x-\alpha)(x-\beta)$ の値の符号	$+$	0	$-$	0	$+$

この表から次のことが分かる：実数 a, α, β について， $a>0$ ， $\alpha<\beta$ のとき，

x に関する不等式 $a(x-\alpha)(x-\beta)<0$ を解くと $\alpha<x<\beta$ ，

x に関する不等式 $a(x-\alpha)(x-\beta)\leq 0$ を解くと $\alpha\leq x\leq\beta$ ，

x に関する不等式 $a(x-\alpha)(x-\beta)>0$ を解くと $x<\alpha$ または $x>\beta$ ，

x に関する不等式 $a(x-\alpha)(x-\beta)\geq 0$ を解くと $x\leq\alpha$ または $x\geq\beta$ ．

$b^2-4ac=0$ とする．定理 **4.4** により x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解 α は実数の重解である．**4.5** 節の 2 次式の因数分解の公式により

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2 \ .$$

$a>0$ なので，総ての実数 x について $a(x-\alpha)^2 \geq 0$ ；従って更に，$a(x-\alpha)^2<0$ である実数 x は無い．よって，

総ての実数が x に関する不等式 $a(x-\alpha)^2 \geq 0$ の解である；
x に関する不等式 $a(x-\alpha)^2<0$ の解は無い．

また，$a>0$ なので，

$$a(x-\alpha)^2 \leq 0 \iff (x-\alpha)^2 \leq 0 \iff x-\alpha=0 \iff x=\alpha \ ,$$

$$a(x-\alpha)^2 > 0 \iff (x-\alpha)^2 > 0 \iff x-\alpha \neq 0 \iff x \neq \alpha \ ;$$

故に，

x に関する不等式 $a(x-\alpha)^2 \leq 0$ を解くと $x=\alpha$ ，
x に関する不等式 $a(x-\alpha)^2 > 0$ を解くと $x \neq \alpha$ ．

$b^2-4ac<0$ とする．加えて $a>0$ とする．定理 **6.2** により，

$$\text{任意の実数 } x \text{ について} \quad ax^2+bx+c>0 \ ,$$
$$\text{任意の実数 } x \text{ について} \quad ax^2+bx+c\geq 0 \ ;$$

従ってまた，

$$ax^2+bx+c\leq 0 \ \text{となる実数 } x \text{ は無い，}$$
$$ax^2+bx+c<0 \ \text{となる実数 } x \text{ は無い．}$$

故に，

$$\text{総ての実数が } x \text{ に関する不等式 } ax^2+bx+c>0 \text{ の解である；}$$
$$\text{総ての実数が } x \text{ に関する不等式 } ax^2+bx+c\geq 0 \text{ の解である；}$$
$$x \text{ に関する不等式 } ax^2+bx+c\leq 0 \text{ の解は無い；}$$
$$x \text{ に関する不等式 } ax^2+bx+c<0 \text{ の解は無い．}$$