

6.4 区間

直感的にいうと、区間とは隙間がない実数の集合のことである。その正確な定義は次のようになる。

[定義] 実数の集合 I が区間であるとは次の条件を満たすことである：任意の実数 x, y, z について、 $x \in I$ かつ $z \in I$ かつ $x < y < z$ ならば、 $y \in I$ 。

実数 a, b に対して, $a \leq x \leq b$ である実数 x の全体 $\{x \mid x \text{ は実数で } a \leq x \leq b\}$ は区間である; この区間を $[a, b]$ と表記する:

$$[a, b] = \{x \mid x \text{ は実数で } a \leq x \leq b\} .$$

実数 a, b に対して, $a \leq x \leq b$ である実数 x の全体 $\{x \mid x \text{ は実数で } a \leq x \leq b\}$ は区間である; この区間を $[a, b]$ と表記する:

$$[a, b] = \{x \mid x \text{ は実数で } a \leq x \leq b\} .$$

実数 x について,

$$x \text{ が区間 } [a, b] \text{ に属す} \iff x \in [a, b] \iff a \leq x \leq b .$$

$a > b$ のとき, $a \leq x \leq b$ である実数 x は無いので, 区間 $[a, b]$ は空集合 \emptyset である.

実数 a, b に対して, $a \leq x \leq b$ である実数 x の全体 $\{x \mid x \text{ は実数で } a \leq x \leq b\}$ は区間である; この区間を $[a, b]$ と表記する:

$$[a, b] = \{x \mid x \text{ は実数で } a \leq x \leq b\} .$$

実数 x について,

$$x \text{ が区間 } [a, b] \text{ に属す} \iff x \in [a, b] \iff a \leq x \leq b .$$

例 区間 $[2, 5]$ は, $2 \leq x \leq 5$ である実数 x の全体 $\{x \mid x \text{ は実数で } 2 \leq x \leq 5\}$ である:

$$[2, 5] = \{x \mid x \text{ は実数で } 2 \leq x \leq 5\} .$$

つまり, 実数 x について,

$$x \text{ が区間 } [2, 5] \text{ に属す} \iff x \in [2, 5] \iff 2 \leq x \leq 5 .$$

終

実数 a, b に対して, $a < x < b$ である実数 x の全体 $\{x \mid x \text{ は実数で } a < x < b\}$ は区間である; この区間を (a, b) と表記する:

$$(a, b) = \{x \mid x \text{ は実数で } a < x < b\} .$$

実数 a, b に対して, $a < x < b$ である実数 x の全体 $\{x \mid x \text{ は実数で } a < x < b\}$ は区間である; この区間を (a, b) と表記する:

$$(a, b) = \{x \mid x \text{ は実数で } a < x < b\}.$$

実数 x について,

$$x \text{ が区間 } (a, b) \text{ に属す} \iff x \in (a, b) \iff a < x < b.$$

$a \geq b$ のとき, $a < x < b$ である実数 x は無いので, 区間 (a, b) は空集合 \emptyset である.

実数 a, b に対して、 $a < x < b$ である実数 x の全体
 $\{x \mid x \text{ は実数で } a < x < b\}$ は区間である；この区間を (a, b) と表
記する：

$$(a, b) = \{x \mid x \text{ は実数で } a < x < b\} .$$

実数 x について、

$$x \text{ が区間 } (a, b) \text{ に属す} \iff x \in (a, b) \iff a < x < b .$$

例 区間 $(3, 7)$ は、 $3 < x < 7$ である実数 x の全体 $\{x \mid x \text{ は実数で } 3 < x < 7\}$
である；

$$(3, 7) = \{x \mid x \text{ は実数で } 3 < x < 7\} .$$

つまり、実数 x について、

$$x \text{ が区間 } (3, 7) \text{ に属す} \iff x \in (3, 7) \iff 3 < x < 7 .$$

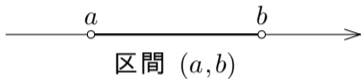
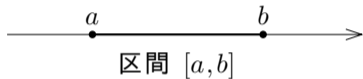
終

区間を表す記法 (a, b) は座標平面の点の座標を表す記法 (x, y) と同じであるが、意味は全く異なる。

実数 a, b に対して, 区間 $[a, b]$ には a と b との両方とも属すが. 区間 (a, b) には a と b との両方とも属さない.

実数 a, b に対して, 区間 $[a, b]$ には a と b との両方とも属すが. 区間 (a, b) には a と b との両方とも属さない.

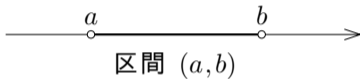
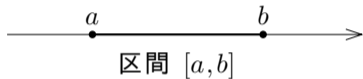
実数 a と b について $a < b$ とする. 数直線において, 区間 $[a, b]$ 及び区間 (a, b) を次のように図示する.



中黒の点 \bullet はその点を含めることを意味し, 中抜きの点 \circ はその点を含めないことを意味する.

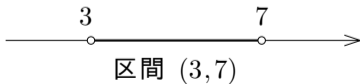
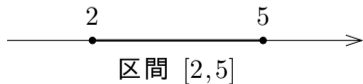
実数 a, b に対して、区間 $[a, b]$ には a と b との両方とも属すが、区間 (a, b) には a と b との両方とも属さない。

実数 a と b について $a < b$ とする。数直線において、区間 $[a, b]$ 及び区間 (a, b) を次のように図示する。



中黒の点 \bullet はその点を含めることを意味し、中抜き点 \circ はその点を含めないことを意味する。

例 数直線において、区間 $[2, 5]$ 及び区間 $(3, 7)$ を次のように図示する。



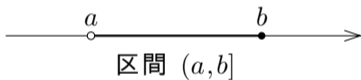
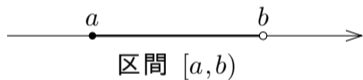
終

次のような区間もある：実数 a と b に対して、

$$[a, b) = \{ x \mid x \text{ は実数で } a \leq x < b \} ,$$

$$(a, b] = \{ x \mid x \text{ は実数で } a < x \leq b \} .$$

区間 $[a, b)$ には、 a は属すが b は属さない。区間 $(a, b]$ には、 a は属さないが b は属す。



区間 I について, I に属す実数を I の点ということがある. 例えば, 区間 $[2,5]$ の点 x とは, 区間 $[2,5]$ に属す実数 x のこと, つまり $-2 \leq x \leq 5$ である実数 x のことである.

解析学では、議論の便宜のために、2個の仮想的な数 $+\infty$ と $-\infty$ とを用いる。 $+\infty$ は正の無限大とよばれ、 $-\infty$ は負の無限大とよばれる。 $+\infty$ も $-\infty$ も実数ではない。大小関係について、 $+\infty$ はどんな実数よりも大きく、 $-\infty$ はどんな実数よりも小さいものと約束する。つまり、

$$\text{任意の実数 } x \text{ について } -\infty < x < +\infty .$$

正の無限大 $+\infty$ を ∞ と略記する。

実数 a に対して,

a 以下の実数の全体 $\{x \mid x \text{ は実数で } x \leq a\}$,

a より大きい実数の全体 $\{x \mid x \text{ は実数で } x > a\}$

等も区間である.

実数 a に対して,

a 以下の実数の全体 $\{x \mid x \text{ は実数で } x \leq a\}$,

a より大きい実数の全体 $\{x \mid x \text{ は実数で } x > a\}$

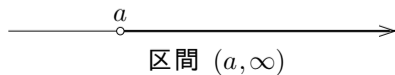
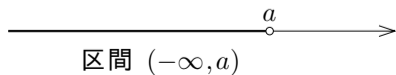
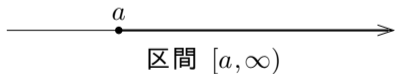
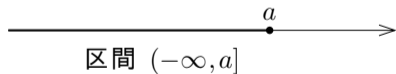
等も区間である. このような区間を, $\infty, -\infty$ を用いて以下のように表記する:

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \text{ は実数で } -\infty < x \leq a\} = \{x \mid x \text{ は実数で } x \leq a\},$$

$$[a, \infty) = \{x \mid x \text{ は実数で } a \leq x < \infty\} = \{x \mid x \text{ は実数で } x \geq a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid x \text{ は実数で } -\infty < x < a\} = \{x \mid x \text{ は実数で } x < a\},$$

$$(a, \infty) = \{x \mid x \text{ は実数で } a < x < \infty\} = \{x \mid x \text{ は実数で } x > a\}.$$



区間とは実数の集合である. ∞ と $-\infty$ とは実数ではないので, 区間に属さない.

例えば，区間 $[0, \infty)$ は 0 以上の実数全体であり，区間 $(0, \infty)$ は正の実数全体である．

更に，実数全体 \mathbf{R} も一つの区間である．