

6.3 根号・絶対値記号が現れる不等式

[定理 6.1.5] 任意の実数 a, b について, $a^2 < b^2$ かつ $b \geq 0$ ならば, $a < b$.

例 3 と $\sqrt{7}$ との大小関係を調べる.

[定理 6.1.5] 任意の実数 a, b について, $a^2 < b^2$ かつ $b \geq 0$ ならば, $a < b$.

[例] 3 と $\sqrt{7}$ との大小関係を調べる. $3^2 = 9$, $\sqrt{7}^2 = 7$. $\sqrt{7}^2 < 3^2$ なので, 定理 6.1.5 により, $\sqrt{7} < 3$. [終]

問6.3.1 7 と $4\sqrt{3}$ との大小関係を調べよ.

$$7^2 = \quad . \quad (4\sqrt{3})^2 = \quad . \quad (\quad)^2 < \quad ^2 \quad \text{なので,} \quad < \quad .$$

問6.3.1 7 と $4\sqrt{3}$ との大小関係を調べよ.

$$7^2 = 49 . \quad (4\sqrt{3})^2 = 16 \cdot 3 = 48 . \quad (4\sqrt{3})^2 < 7^2 \quad \text{なので,} \quad 4\sqrt{3} < 7 . \quad \square \text{終}$$

問6.3.2 $\frac{13}{3}$ と $3\sqrt{2}$ との大小関係を調べよ.

$$\left(\frac{13}{3}\right)^2 = \quad , \quad (3\sqrt{2})^2 = \quad . \quad (\quad)^2 < (\quad)^2 \quad \text{なので,}$$
$$< \quad .$$

問6.3.2 $\frac{13}{3}$ と $3\sqrt{2}$ との大小関係を調べよ.

$$\left(\frac{13}{3}\right)^2 = \frac{169}{9}, \quad (3\sqrt{2})^2 = 18 = \frac{162}{9}. \quad (3\sqrt{2})^2 < \left(\frac{13}{3}\right)^2 \quad \text{なので,}$$
$$3\sqrt{2} < \frac{13}{3}.$$

終

[定理 6.3.1] 0 以上の任意の実数 a, b について,

$$a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b} ,$$

$$a \leq b \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b} .$$

証明 例として “ $a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}$ ” を証明する. 定理 2.6.2 により, $\sqrt{a} \geq 0$, $\sqrt{b} \geq 0$. また, 定理 2.6.3 により, $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{b^2} = b$. $a < b$ ならば, $\sqrt{a^2} < \sqrt{b^2}$, 定理 6.1.5 により $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. 逆に, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ならば, 定理 6.1.4 により $\sqrt{a^2} < \sqrt{b^2}$ よって $a < b$. (証明終了)

[定理 2.6.2] $a \geq 0$ である任意の実数 a に対して $\sqrt{a} \geq 0$.

[定理 2.6.3] $a \geq 0$ である任意の実数 a について, $\sqrt{a^2} = a$.

[定理 6.1.5] 任意の実数 a, b について, $a^2 < b^2$ かつ $b \geq 0$ ならば, $a < b$.

[定理 6.1.4] 任意の実数 a, b について, $0 \leq a < b$ ならば, $a^2 < b^2$.

[定理 2.6.4] $a \leq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2} = -a$.

[例] $(\sqrt{7} - 3)^2$ を計算する. その結果を用いて $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$ を計算する.

[定理 2.6.4] $a \leq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2} = -a$.

[例] $(\sqrt{7} - 3)^2$ を計算する. その結果を用いて $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$ を計算する.

$$(\sqrt{7} - 3)^2 = \sqrt{7}^2 - 2 \cdot 3\sqrt{7} + 3^2 = 7 - 6\sqrt{7} + 9 = 16 - 6\sqrt{7} .$$

[定理 2.6.4] $a \leq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2} = -a$.

[例] $(\sqrt{7} - 3)^2$ を計算する. その結果を用いて $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$ を計算する.

$$(\sqrt{7} - 3)^2 = \sqrt{7}^2 - 2 \cdot 3\sqrt{7} + 3^2 = 7 - 6\sqrt{7} + 9 = 16 - 6\sqrt{7} .$$

$7 < 3^2$ なので $\sqrt{7} < \sqrt{3^2} = 3$, よって $\sqrt{7} - 3 < 0$ なので,

[定理 2.6.4] $a \leq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2} = -a$.

[例] $(\sqrt{7} - 3)^2$ を計算する. その結果を用いて $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$ を計算する.

$$(\sqrt{7} - 3)^2 = \sqrt{7}^2 - 2 \cdot 3\sqrt{7} + 3^2 = 7 - 6\sqrt{7} + 9 = 16 - 6\sqrt{7} .$$

$7 < 3^2$ なので $\sqrt{7} < \sqrt{3^2} = 3$, よって $\sqrt{7} - 3 < 0$ なので,

$$\sqrt{16 - 6\sqrt{7}} = \sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2} = -(\sqrt{7} - 3) = 3 - \sqrt{7} .$$

終

問6.3.3 $(2 - \sqrt{5})^2$ を計算し, その結果を用いて $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$ を計算せよ.

問6.3.3 $(2 - \sqrt{5})^2$ を計算し、その結果を用いて $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$ を計算せよ.

$$(2 - \sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5} .$$

$2 < \sqrt{5}$ なので $2 - \sqrt{5} < 0$, よって

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = -(2 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2 .$$

終

実数 a について、例えば $a = 5$ のとき、 $|a| = |5| = 5$ なので $|a| = a$;
また例えば $a = -3$ のとき、 $|a| = |-3| = 3$ なので $|a| > a$.

実数 a について、例えば $a = 5$ のとき、 $|a| = |5| = 5$ なので $|a| = a$;
また例えば $a = -3$ のとき、 $|a| = |-3| = 3$ なので $|a| > a$. このように、
 $|a| = a$ となる場合と $|a| > a$ となる場合とがある ; 両方の場合を併せると
 $|a| \geq a$.

実数 a について、例えば $a = 5$ のとき、 $|a| = |5| = 5$ なので $|a| = a$;
また例えば $a = -3$ のとき、 $|a| = |-3| = 3$ なので $|a| > a$. このように、
 $|a| = a$ となる場合と $|a| > a$ となる場合とがある ; 両方の場合を併せると
 $|a| \geq a$.

[定理 6.3.2] 任意の実数 a について $a \leq |a|$.

証明 定理 2.7.5 により $|a|^2 = a^2$ なので、定理 2.5.1 により $|a|^2 \geq a^2$. 定理
2.7.1 により $|a| \geq 0$ なので、定理 6.1.5 により $|a| \geq a$. (証明終了)

[定理 2.7.5] 任意の実数 a について $|a|^2 = a^2$.

[定理 2.7.1] 任意の実数 a について $|a| \geq 0$.

[定理 2.5.1] 任意の実数 a, b について、 $a = b$ ならば $a \geq b$.

[定理 6.1.5] 任意の実数 a, b について、 $a^2 \geq b^2$ かつ $a \geq 0$ ならば、 $a \geq b$.

実数 a と b について,

例えば $a = 5$, $b = 3$ のとき $|a + b| = 8 = |a| + |b|$,

例えば $a = 5$, $b = -3$ のとき $|a + b| = 2 < |a| + |b|$,

例えば $a = -5$, $b = 3$ のとき $|a + b| = 2 < |a| + |b|$,

例えば $a = -5$, $b = -3$ のとき $|a + b| = 8 = |a| + |b|$.

実数 a と b について,

例えば $a = 5$, $b = 3$ のとき $|a + b| = 8 = |a| + |b|$,

例えば $a = 5$, $b = -3$ のとき $|a + b| = 2 < |a| + |b|$,

例えば $a = -5$, $b = 3$ のとき $|a + b| = 2 < |a| + |b|$,

例えば $a = -5$, $b = -3$ のとき $|a + b| = 8 = |a| + |b|$.

このように, $|a + b| = |a| + |b|$ または $|a + b| < |a| + |b|$ なので,

$|a + b| \leq |a| + |b|$.

実数 a と b について,

例えば $a = 5$, $b = 3$ のとき $|a + b| = 8 = |a| + |b|$,

例えば $a = 5$, $b = -3$ のとき $|a + b| = 2 < |a| + |b|$,

例えば $a = -5$, $b = 3$ のとき $|a + b| = 2 < |a| + |b|$,

例えば $a = -5$, $b = -3$ のとき $|a + b| = 8 = |a| + |b|$.

このように, $|a + b| = |a| + |b|$ または $|a + b| < |a| + |b|$ なので,
 $|a + b| \leq |a| + |b|$.

[三角不等式] 任意の実数 a と b について $|a + b| \leq |a| + |b|$.

実数 a と b について, 三角不等式 $|a + b| \leq |a| + |b|$ を導く.

実数 a と b について，三角不等式 $|a + b| \leq |a| + |b|$ を導く．

$$(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2$$

[定理 2.7.5] 任意の実数 a について $|a|^2 = a^2$ ．

実数 a と b について，三角不等式 $|a + b| \leq |a| + |b|$ を導く．

$$\begin{aligned} (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) = 2|ab| - 2ab \\ &= 2(|ab| - ab) . \end{aligned}$$

実数 a と b について，三角不等式 $|a + b| \leq |a| + |b|$ を導く．

$$\begin{aligned} (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) = 2|ab| - 2ab \\ &= 2(|ab| - ab) . \end{aligned}$$

定理 6.3.2 により $|ab| \geq ab$ なので

[定理 6.3.2] 任意の実数 a について $|a| \geq a$.

実数 a と b について，三角不等式 $|a + b| \leq |a| + |b|$ を導く．

$$\begin{aligned} (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) = 2|ab| - 2ab \\ &= 2(|ab| - ab) . \end{aligned}$$

定理 6.3.2 により $|ab| \geq ab$ なので $|ab| - ab \geq 0$ ， よって $2(|ab| - ab) \geq 0$ なので，

$$(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \geq 0 ,$$

実数 a と b について、三角不等式 $|a+b| \leq |a|+|b|$ を導く.

$$\begin{aligned} (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) = 2|ab| - 2ab \\ &= 2(|ab| - ab) . \end{aligned}$$

定理 6.3.2 により $|ab| \geq ab$ なので $|ab| - ab \geq 0$, よって $2(|ab| - ab) \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned} (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 &\geq 0 , \\ (|a|+|b|)^2 &\geq |a+b|^2 . \end{aligned}$$

定理 2.7.1 により $|a| \geq 0$, $|b| \geq 0$ なので, 定理 6.1.2 により $|a|+|b| \geq 0$.

[定理 2.7.1] 任意の実数 a について $|a| \geq 0$.

[定理 6.1.2] 任意の実数 a, b, c, d について, $a \geq b$ かつ $c \geq d$ ならば, $a+c \geq b+d$.

実数 a と b について、三角不等式 $|a+b| \leq |a|+|b|$ を導く.

$$\begin{aligned} (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) = 2|ab| - 2ab \\ &= 2(|ab| - ab) . \end{aligned}$$

定理 6.3.2 により $|ab| \geq ab$ なので $|ab| - ab \geq 0$, よって $2(|ab| - ab) \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned} (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 &\geq 0 , \\ (|a|+|b|)^2 &\geq |a+b|^2 . \end{aligned}$$

定理 2.7.1 により $|a| \geq 0$, $|b| \geq 0$ なので, 定理 6.1.2 により $|a|+|b| \geq 0$.

$(|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2$ かつ $|a|+|b| \geq 0$ なので, 定理 6.1.5 により

$|a|+|b| \geq |a+b|$.

(証明終了)

[定理 6.1.5] 任意の実数 a, b について, $a^2 \geq b^2$ かつ $a \geq 0$ ならば, $a \geq b$.

問6.3.4 三角不等式の証明に倣って次のことを証明せよ：任意の実数 a と b

とについて $|a - b| \geq |a| - |b|$.

$$|a - b|^2 - (|a| - |b|)^2 =$$

$$= 2(\quad) .$$

$|ab| - ab$ なので $|ab| - ab \geq 0$, よって $2(\quad) \geq 0$ なので,

$$|a - b|^2 - (|a| - |b|)^2$$

$$\geq |a - b|^2 - (|a| - |b|)^2 .$$

なので $|a - b| \geq |a| - |b|$.

問6.3.4 三角不等式の証明に倣って次のことを証明せよ：任意の実数 a と b について $|a - b| \geq |a| - |b|$.

$$\begin{aligned} |a - b|^2 - (|a| - |b|)^2 &= (a - b)^2 - (|a|^2 - 2|a||b| + |b|^2) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2|ab| + b^2) = -2ab + 2|ab| \\ &= 2(|ab| - ab) . \end{aligned}$$

$|ab| \geq ab$ なので $|ab| - ab \geq 0$, よって $2(|ab| - ab) \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned} |a - b|^2 - (|a| - |b|)^2 &\geq 0 , \\ |a - b|^2 &\geq (|a| - |b|)^2 . \end{aligned}$$

$|a - b| \geq 0$ なので $|a - b| \geq |a| - |b|$.

終

例えば、実数 x について、 $|x| < 3$ となることは、 x の値が -3 より大きく 3 より小さいことつまり $-3 < x < 3$ となることである：

$$|x| < 3 \iff -3 < x < 3 .$$

例えば、実数 x について、 $|x| < 3$ となることは、 x の値が -3 より大きく 3 より小さいことつまり $-3 < x < 3$ となることである：

$$|x| < 3 \iff -3 < x < 3 .$$

また例えば、実数 x について、 $|x| > 3$ となることは、 x の値が -3 より小さいかまたは 3 より大きいことである：

$$|x| > 3 \iff x < -3 \text{ または } x > 3 .$$

例えば、実数 x について、 $|x| < 3$ となることは、 x の値が -3 より大きく 3 より小さいことつまり $-3 < x < 3$ となることである：

$$|x| < 3 \iff -3 < x < 3 .$$

また例えば、実数 x について、 $|x| > 3$ となることは、 x の値が -3 より小さいかまたは 3 より大きいことである：

$$|x| > 3 \iff x < -3 \text{ または } x > 3 .$$

一般的に次の定理が成り立つ。

[定理 6.3.3] 任意の実数 a と b について、

$$|a| < b \iff -b < a < b ,$$

$$|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b ,$$

$$|a| > b \iff a > b \text{ または } a < -b ,$$

$$|a| \geq b \iff a \geq b \text{ または } a \leq -b .$$

次のことを証明する: 任意の実数 a, b について, $|a| < b$ ならば $-b < a < b$.

実数 a, b について $|a| < b$ と仮定する. 定理 6.3.2 により $a \leq |a|$, 仮定 $|a| < b$ より, 定理 6.1.1 により $a < b$. また, 定理 6.3.2 と定理 2.7.6 とにより $-a \leq |-a| = |a|$, 仮定 $|a| < b$ より, 定理 6.1.1 により $-a < b$; よって定理 2.5.5 により $a > -b$. $a < b$ かつ $-b < a$ なので, $-b < a < b$.

[定理 6.3.2] 任意の実数 a について $a \leq |a|$.

[定理 6.1.1] 任意の実数 a, b, c について, $a \leq b$ かつ $b < c$ ならば, $a < c$.

[定理 2.7.6] 任意の実数 a について $|-a| = |a|$.

[定理 2.5.5] 任意の実数 a, b について, $a < b$ ならば $-a > -b$.

次のことを証明する：任意の実数 a, b について， $-b < a < b$ ならば

$$|a| < b .$$

実数 a, b について $-b < a < b$ と仮定する．定理 2.6.2 により， $a \geq 0$ または $a < 0$ ． $a \geq 0$ のとき，定理 2.7.2 により $a = |a|$ ，仮定より $a < b$ なので $|a| < b$ ． $a < 0$ のとき，定理 2.7.2 により $|a| = -a$ ，仮定より $a > -b$ なので定理 2.5.5 により $-a < b$ ，よって $|a| < b$ ．つまりどちらのときも $|a| < b$ ．

[定理 2.5.2] 任意の実数 a, b について， $a \geq b$ または $a < b$ ．

[定理 2.7.2] 任意の実数 a について， $a \geq 0$ のとき $|a| = a$ ， $a < 0$ のとき $|a| = -a$ ．

[定理 2.5.5] 任意の実数 a, b について， $a < b$ ならば $-a > -b$ ．

次のことを証明する：任意の実数 a, b について， $|a| > b$ ならば， $a < -b$ または $a > b$.

実数 a, b について $|a| > b$ と仮定する．定理 2.5.2 により， $a \geq 0$ または $a < 0$. $a \geq 0$ のとき，定理 2.7.2 により $a = |a|$ なので，仮定 $|a| > b$ より $a > b$. $a < 0$ のとき，定理 2.7.2 により $-a = |a|$ なので，仮定 $|a| > b$ より $-a > b$ よって定理 2.5.5 により $a < -b$. よって $a > b$ または $a < -b$.

[定理 2.5.2] 任意の実数 a, b について， $a \geq b$ または $a < b$.

[定理 2.7.2] 任意の実数 a について， $a \geq 0$ のとき $|a| = a$ ， $a < 0$ のとき $|a| = -a$.

[定理 2.5.5] 任意の実数 a, b について， $a > b$ ならば $-a < -b$.

次のことを証明する：任意の実数 a, b について、 $a < -b$ または $a > b$ ならば、 $|a| > b$.

実数 a, b について $a > b$ または $a < -b$ と仮定する. $a > b$ のとき、定理 6.3.2 により $|a| \geq a$ なので、定理 6.1.1 により $|a| > b$. $a < -b$ のとき、定理 2.5.5 により $-a > b$, 定理 2.7.6 と定理 6.3.2 とにより $|a| = |-a| \geq -a$ なので、定理 6.1.1 により $|a| > b$. よって、 $a > b$ のときも $a < -b$ のときも、 $|a| > b$.

[定理 6.3.2] 任意の実数 a について $|a| \geq a$.

[定理 6.1.1] 任意の実数 a, b について、 $a \geq b$ かつ $b > c$ ならば、 $a > c$.

[定理 2.7.6] 任意の実数 a について $|a| = |-a|$.

[定理 2.5.5] 任意の実数 a, b について、 $a > b$ ならば $-a < -b$.

0 以上の実数 a と b に対して, $\frac{a+b}{2}$ を a と b との相加平均といい,
 \sqrt{ab} を a と b との相乗平均という.

0 以上の実数 a と b に対して, $\frac{a+b}{2}$ を a と b との相加平均といい, \sqrt{ab} を a と b との相乗平均という.

相加平均と相乗平均の大小関係について次の定理が成り立つ.

[定理 6.3.4] $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ である任意の実数 a と b について $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$; 等号が成り立つのは $a = b$ のときに限る.

実数 a, b について $a \geq 0$, $b \geq 0$ とする. 不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ を導く.

定理 2.5.8 により $ab \geq 0$, よって定理 2.6.3 により $\sqrt{ab^2} = ab$ なので,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab}^2 &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - ab = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}(a-b)^2 . \end{aligned}$$

[定理 2.5.8] 任意の実数 a, b について, $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ ならば, $ab \geq 0$.

[定理 2.6.3] $a \geq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2} = a$.

実数 a, b について $a \geq 0$, $b \geq 0$ とする. 不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ を導く.

定理 2.5.8 により $ab \geq 0$, よって定理 2.6.3 により $\sqrt{ab^2} = ab$ なので,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab^2} &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - ab = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}(a-b)^2 . \end{aligned}$$

定理 2.5.10 により $(a-b)^2 \geq 0$, 定理 2.5.7 により $\frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$, よって

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab^2} \geq 0 , \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \sqrt{ab^2} .$$

[定理 2.5.10] 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$.

[定理 2.5.7] 任意の実数 a, b, c について, $a \geq b$ かつ $c \geq 0$ ならば, $ac \geq bc$.

実数 a, b について $a \geq 0, b \geq 0$ とする. 不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ を導く.

定理 2.5.8 により $ab \geq 0$, よって定理 2.6.3 により $\sqrt{ab^2} = ab$ なので,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab^2} &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - ab = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}(a-b)^2. \end{aligned}$$

定理 2.5.10 により $(a-b)^2 \geq 0$, 定理 2.5.7 により $\frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$, よって

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab^2} \geq 0, \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \sqrt{ab^2}. \quad \text{定理 6.1.2 と定理 2.5.7 とにより}$$
$$\frac{a+b}{2} \geq 0 \quad \text{なので,}$$

[定理 6.1.2] 任意の実数 a, b, c, d について, $a \geq b$ かつ $c \geq d$ ならば,
 $a+c \geq b+d$.

[定理 2.5.7] 任意の実数 a, b, c について, $a \geq b$ かつ $c \geq 0$ ならば, $ac \geq bc$.

実数 a, b について $a \geq 0, b \geq 0$ とする. 不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ を導く.

定理 2.5.8 により $ab \geq 0$, よって定理 2.6.3 により $\sqrt{ab^2} = ab$ なので,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab^2} &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - ab = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}(a-b)^2. \end{aligned}$$

定理 2.5.10 により $(a-b)^2 \geq 0$, 定理 2.5.7 により $\frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$, よって

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab^2} \geq 0, \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \sqrt{ab^2}. \quad \text{定理 6.1.2 と定理 2.5.7 とにより}$$
$$\frac{a+b}{2} \geq 0 \quad \text{なので, 定理 6.1.5 により } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

[定理 6.1.5] 任意の実数 a, b について, $a^2 \geq b^2$ かつ $a > 0$ ならば, $a \geq b$.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab}^2 = \frac{1}{4}(a-b)^2 \text{ より, } \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \text{ のとき, } \frac{1}{4}(a-b)^2 = 0 ,$$

よって $a = b$. 逆に $a = b$ のとき, $\frac{a+b}{2} = \frac{a+a}{2} = a$, $a \geq 0$ なの

で $\sqrt{ab} = \sqrt{a^2} = a$, よって $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$. 故に, $a = b$ のときに限り

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} .$$

例 任意の正の実数 x について $\frac{x}{5} + \frac{45}{x} \geq 6$ となることを示し，等号が成り立つ条件を調べる．相加平均と相乗平均との大小関係を用いる．

例 任意の正の実数 x について $\frac{x}{5} + \frac{45}{x} \geq 6$ となることを示し、等号が成り立つ条件を調べる．相加平均と相乗平均との大小関係を用いる． $x > 0$ なので、 $\frac{x}{5} \geq 0$ かつ $\frac{45}{x} \geq 0$ ．相加平均と相乗平均との大小関係により

$$\frac{\frac{x}{5} + \frac{45}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{5} \cdot \frac{45}{x}} = \sqrt{9} = 3 .$$

例 任意の正の実数 x について $\frac{x}{5} + \frac{45}{x} \geq 6$ となることを示し、等号が成り立つ条件を調べる．相加平均と相乗平均との大小関係を用いる． $x > 0$ なので、 $\frac{x}{5} \geq 0$ かつ $\frac{45}{x} \geq 0$ ．相加平均と相乗平均との大小関係により

$$\frac{\frac{x}{5} + \frac{45}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{5} \cdot \frac{45}{x}} = \sqrt{9} = 3 .$$

よって $\frac{x}{5} + \frac{45}{x} \geq 6$ ．

例 任意の正の実数 x について $\frac{x}{5} + \frac{45}{x} \geq 6$ となることを示し、等号が成り立つ条件を調べる．相加平均と相乗平均との大小関係を用いる． $x > 0$ なので、 $\frac{x}{5} \geq 0$ かつ $\frac{45}{x} \geq 0$ ．相加平均と相乗平均との大小関係により

$$\frac{\frac{x}{5} + \frac{45}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{5} \cdot \frac{45}{x}} = \sqrt{9} = 3 .$$

よって $\frac{x}{5} + \frac{45}{x} \geq 6$ ．等号が成り立つ条件は、 $\frac{x}{5} = \frac{45}{x}$ ，つまり $x = \sqrt{5 \cdot 45} = \sqrt{5^2 \cdot 3^2} = 15$ ．

終

問6.3.5 任意の正の実数 x について $\frac{x}{45} + \frac{20}{x} \geq \frac{4}{3}$ となることを示し, 等号が成り立つ条件を調べよ.

$x > 0$ なので, $\frac{x}{45} \geq 0$ かつ $\frac{20}{x} \geq 0$. 相加平均と相乗平均との大小関係により

$$\frac{\frac{x}{45} + \frac{20}{x}}{2} \geq$$

よって $\frac{x}{45} + \frac{20}{x} \geq$. 等号が成り立つ条件は, $=$, つまり $x =$.

問6.3.5 任意の正の実数 x について $\frac{x}{45} + \frac{20}{x} \geq \frac{4}{3}$ となることを示し、等号が成り立つ条件を調べよ.

$x > 0$ なので、 $\frac{x}{45} \geq 0$ かつ $\frac{20}{x} \geq 0$. 相加平均と相乗平均との大小関係により

$$\frac{\frac{x}{45} + \frac{20}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{45} \cdot \frac{20}{x}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

よって $\frac{x}{45} + \frac{20}{x} \geq \frac{4}{3}$. 等号が成り立つ条件は、 $\frac{x}{45} = \frac{20}{x}$, つまり $x = \sqrt{45 \cdot 20} = 30$.

終