6.2 2次不等式の証明

変数 x に関する不等式が次の何れかの形に整理できるとき，その不等式を x に関する 2 次不等式という：

$$ax^2+bx+c<0\ ,\quad ax^2+bx+c\leq 0\ ,\quad ax^2+bx+c>0\ ,\quad ax^2+bx+c\geq 0\ ;$$

ここで定数 a,b,c は実数を表し $a\neq 0$ ．2 次不等式の証明とは目標の 2 次不等式を導くことである．

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $x^2-6x+11>0$.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $x^2-6x+11>0$ ．この不等式を導くために左辺の 2 次式を平方完成する．

$$x^2-6x+11 = (x^2-2\cdot 3x+9)-9+11 = (x-3)^2+2 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $x^2-6x+11>0$ ．この不等式を導くために左辺の 2 次式を平方完成する．

$$x^2-6x+11 = (x^2-2\cdot 3x+9)-9+11 = (x-3)^2+2 \ .$$

任意の実数 x について，定理 **2.5.10** により $(x-3)^2 \geq 0$ ，

[定理 **2.5.10**] 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$ ．

例 次のことを示す：任意の実数 x について $x^2-6x+11>0$ ．この不等式を導くために左辺の 2 次式を平方完成する．

$$x^2-6x+11 = (x^2-2\cdot 3x+9)-9+11 = (x-3)^2+2 \ .$$

任意の実数 x について，定理 **2.5.10** により $(x-3)^2 \geq 0$ ，定理 **2.5.7** により

$$(x-3)^2+2 \geq 2 \ ,$$

[定理 **2.5.7**] 任意の実数 a,b,c について， $a \geq b$ ならば $a+c \geq b+c$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $x^2-6x+11>0$ ．この不等式を導くために左辺の 2 次式を平方完成する．

$$x^2-6x+11 = (x^2-2\cdot 3x+9)-9+11 = (x-3)^2+2 \ .$$

任意の実数 x について，定理 **2.5.10** により $(x-3)^2 \geq 0$ ，定理 **2.5.7** により

$$(x-3)^2+2 \geq 2 \ ,$$

$2>0$ なので，定理 **6.1.1** により

$$(x-3)^2+2 > 0 \ ,$$

[定理 **6.1.1**] 任意の実数 a,b,c について， $a \geq b$ かつ $b>c$ ならば， $a>c$ ．

$\boxed{例}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $x^2-6x+11>0$ ．この不等式を導くために左辺の 2 次式を平方完成する．

$$x^2-6x+11=(x^2-2\cdot 3x+9)-9+11=(x-3)^2+2 \ .$$

任意の実数 x について，定理 **2.5.10** により $(x-3)^2\geq 0$ ，定理 **2.5.7** により

$$(x-3)^2+2\geq 2 \ ,$$

$2>0$ なので，定理 **6.1.1** により

$$(x-3)^2+2>0 \ ,$$

$(x-3)^2+2=x^2-6x+11$ なので

$$x^2-6x+11>0 \ .$$

$\boxed{終}$

実数 a と b とについて，$a-b\geq 0$ ならば，法則 **2.5.3** により $a-b+b\geq 0+b$ つまり $a\geq b$ ．

[法則 **2.5.3**] 任意の実数 a,b,c について，$a>b$ ならば $a+c>b+c$ ．

実数 a と b とについて，$a-b \geq 0$ ならば，法則**2.5.3**により $a-b+b \geq 0+b$ つまり $a \geq b$．同様に，$a-b>0$ ならば $a>b$．

実数 a と b とについて，$a-b \geq 0$ ならば，法則 **2.5.3** により $a-b+b \geq 0+b$ つまり $a \geq b$．同様に，$a-b>0$ ならば $a>b$．このように，任意の実数 a と b とについて次のようになる：

$$a-b \geq 0 \text{ ならば，} \quad a \geq b \text{ ，} b \leq a \text{ ；}$$

$$a-b>0 \text{ ならば，} \quad a>b \text{ ，} b<a \text{ ．}$$

実数 a と b とについて，$a-b \geq 0$ ならば，法則 **2.5.3** により $a-b+b \geq 0+b$ つまり $a \geq b$．同様に，$a-b>0$ ならば $a>b$．このように，任意の実数 a と b とについて次のようになる：

$$a-b \geq 0 \text{ ならば，} \quad a \geq b \text{，} b \leq a \quad ;$$

$$a-b>0 \text{ ならば，} \quad a>b \text{，} b<a \text{．}$$

このことより次のことが分かる：

不等式 $A \geq B$，$B \leq A$ を導くためには不等式 $A-B \geq 0$ を導けばよい；

不等式 $A>B$，$B<A$ を導くためには不等式 $A-B>0$ を導けばよい．

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ．不等式 $2x^2+14>12x-5$ を導くために不等式 $2x^2+14-(12x-5)>0$ を導く；

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ．不等式 $2x^2+14>12x-5$ を導くために不等式 $2x^2+14-(12x-5)>0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $2x^2+14-(12x-5)$ を平方完成する．

$\boxed{例}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ．不等式 $2x^2+14>12x-5$ を導くために不等式 $2x^2+14-(12x-5)>0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $2x^2+14-(12x-5)$ を平方完成する.

$$2x^2+14-(12x-5)=2x^2-12x+19=2(x^2-6x)+19$$

この式から始めること.

$\boxed{例}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ．不等式 $2x^2+14>12x-5$ を導くために不等式 $2x^2+14-(12x-5)>0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $2x^2+14-(12x-5)$ を平方完成する．

$$\begin{aligned}2x^2+14-(12x-5) &= 2x^2-12x+19 = 2(x^2-6x)+19\\ &= 2(x^2-6x+3^2-9)+19 = 2(x-3)^2-18+19\\ &= 2(x-3)^2+1\ .\end{aligned}$$

例 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ．不等式 $2x^2+14>12x-5$ を導くために不等式 $2x^2+14-(12x-5)>0$ を導く；そのために左辺の2次式 $2x^2+14-(12x-5)$ を平方完成する．

$$\begin{aligned}2x^2+14-(12x-5) &= 2x^2-12x+19 = 2(x^2-6x)+19 \\ &= 2(x^2-6x+3^2-9)+19 = 2(x-3)^2-18+19 \\ &= 2(x-3)^2+1\ .\end{aligned}$$

任意の実数 x について，$(x-3)^2 \geq 0$ なので $2(x-3)^2 \geq 0$ ，よって $2(x-3)^2+1 \geq 1$ ；

$\boxed{例}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ．不等式 $2x^2+14>12x-5$ を導くために不等式 $2x^2+14-(12x-5)>0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $2x^2+14-(12x-5)$ を平方完成する．

$$\begin{aligned} 2x^2+14-(12x-5) &= 2x^2-12x+19 = 2(x^2-6x)+19 \\ &= 2(x^2-6x+3^2-9)+19 = 2(x-3)^2-18+19 \\ &= 2(x-3)^2+1 \ . \end{aligned}$$

任意の実数 x について， $(x-3)^2 \geq 0$ なので $2(x-3)^2 \geq 0$ ，よって $2(x-3)^2+1 \geq 1$ ；更に $1>0$ なので

$$2(x-3)^2+1 > 0 \ ,$$

$\boxed{例}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ．不等式 $2x^2+14>12x-5$ を導くために不等式 $2x^2+14-(12x-5)>0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $2x^2+14-(12x-5)$ を平方完成する．

$$\begin{aligned}2x^2+14-(12x-5) &= 2x^2-12x+19 = 2(x^2-6x)+19\\ &= 2(x^2-6x+3^2-9)+19 = 2(x-3)^2-18+19\\ &= 2(x-3)^2+1\ .\end{aligned}$$

任意の実数 x について， $(x-3)^2 \geq 0$ なので $2(x-3)^2 \geq 0$ ，よって $2(x-3)^2+1 \geq 1$ ；更に $1>0$ なので

$$2(x-3)^2+1 > 0\ ,$$

$2(x-3)^2+1 = 2x^2+14-(12x-5)$ なので，

$$2x^2+14-(12x-5)>0\ ,$$

$$2x^2+14>12x-5\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ．不等式 $2x^2+14>12x-5$ を導くために不等式 $2x^2+14-(12x-5)>0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $2x^2+14-(12x-5)$ を平方完成する．

$$\begin{aligned} 2x^2+14-(12x-5) &= 2x^2-12x+19 = 2(x^2-6x)+19 \\ &= 2(x^2-6x+3^2-9)+19 = 2(x-3)^2-18+19 \\ &= 2(x-3)^2+1\ . \end{aligned}$$

任意の実数 x について，$(x-3)^2 \geq 0$ なので $2(x-3)^2 \geq 0$ ，よって $2(x-3)^2+1 \geq 1$ ；更に $1>0$ なので

$$2(x-3)^2+1 > 0\ ,$$

$2(x-3)^2+1 = 2x^2+14-(12x-5)$ なので，

$$2x^2+14-(12x-5)>0\ ,$$

$$2x^2+14>12x-5\ .$$

故に，任意の実数 x について $2x^2+14>12x-5$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}6.2.1}$ 次のことを示せ：任意の実数 x について $5x^2-8x+2>2x^2-5$.

$$5x^2-8x+2-(2x^2-5)=$$

$$=\ \left(x\qquad\right)^2+\qquad.$$

任意の実数 x について， $\left(x\qquad\right)^2\geq 0$ ， $\left(x\qquad\right)^2\geq 0$ なので，

$$\left(x\qquad\right)^2+\quad\geq\quad>0\ ,$$

よって $5x^2-8x+2-(2x^2-5)>0$ なので， $5x^2-8x+2>2x^2-5$.

$\boxed{問6.2.1}$ 次のことを示せ：任意の実数 x について $5x^2-8x+2>2x^2-5$.

$$5x^2-8x+2-(2x^2-5)=3x^2-8x+7=3\left\{x^2-\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right\}-\frac{16}{3}+7$$
$$=3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{5}{3}\ .$$

任意の実数 x について， $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\geq 0$ ， $3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\geq 0$ なので，

$$3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{5}{3}\geq\frac{5}{3}>0\ ,$$

よって $5x^2-8x+2-(2x^2-5)>0$ なので， $5x^2-8x+2>2x^2-5$. $\boxed{終}$

2 次式の平方完成によって次の定理が導かれる.

[定理 **6.2**]　定数 a, b, c は実数で $a \neq 0$ とする．
$a > 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ ならば，任意の実数 x について $ax^2 + bx + c > 0$．
$a < 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ ならば，任意の実数 x について $ax^2 + bx + c < 0$．

証明　“ $a > 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ ならば，任意の実数 x について $ax^2 + bx + c > 0$ ” であることを証明する．

　$a > 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ と仮定する．x の 2 次式 $ax^2 + bx + c$ を平方完成する：

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left\{x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\
&= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \ .
\end{aligned}
$$

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \ .$$

x を任意の実数とする． $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ なので，仮定 $a>0$ より

$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ ，よって

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \geq -\frac{b^2-4ac}{4a} \ .$$

仮定 $a>0$ かつ $b^2-4ac<0$ より $\dfrac{b^2-4ac}{4a}<0$ ，よって $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}>0$

なので，

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} > 0 \ .$$

故に，任意の実数 x について $ax^2+bx+c>0$ ． (証明終了)

　不等式 $A \geq B$ を証明したとき，等号が成り立つ（つまり $A = B$ となる）条件を調べることがある．

$\boxed{例}$ 任意の実数 y について $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ であることを示し，等号が成り立つ（つまり $3y^2-7y+8=5y-4$ となる）条件を調べる．

$\boxed{\text{例}}$ 任意の実数 y について $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ であることを示し，等号が成り立つ（つまり $3y^2-7y+8=5y-4$ となる）条件を調べる．不等式 $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ を導くために不等式 $3y^2-7y+8-(5y-4) \geq 0$ を導く；

$\boxed{例}$ 任意の実数 y について $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ であることを示し，等号が成り立つ（つまり $3y^2-7y+8=5y-4$ となる）条件を調べる．不等式 $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ を導くために不等式 $3y^2-7y+8-(5y-4) \geq 0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $3y^2-7y+8-(5y-4)$ を平方完成する．

$\boxed{\text{例}}$ 任意の実数 y について $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ であることを示し，等号が成り立つ（つまり $3y^2-7y+8=5y-4$ となる）条件を調べる．不等式 $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ を導くために不等式 $3y^2-7y+8-(5y-4) \geq 0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $3y^2-7y+8-(5y-4)$ を平方完成する．

$$3y^2-7y+8-(5y-4) = 3y^2-12y+12 = 3(y^2-4y)+12$$

この式から始めること．

$\boxed{\text{例}}$ 任意の実数 y について $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ であることを示し，等号が成り立つ（つまり $3y^2-7y+8=5y-4$ となる）条件を調べる．不等式 $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ を導くために不等式 $3y^2-7y+8-(5y-4) \geq 0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $3y^2-7y+8-(5y-4)$ を平方完成する．

$$\begin{aligned}3y^2-7y+8-(5y-4) &= 3y^2-12y+12 = 3(y^2-4y)+12 \\ &= 3(y^2-4y+2^2-4)+12 = 3(y-2)^2-12+12 \\ &= 3(y-2)^2 \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 任意の実数 y について $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ であることを示し，等号が成り立つ（つまり $3y^2-7y+8=5y-4$ となる）条件を調べる．不等式 $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ を導くために不等式 $3y^2-7y+8-(5y-4) \geq 0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $3y^2-7y+8-(5y-4)$ を平方完成する．

$$
\begin{aligned}
3y^2-7y+8-(5y-4) &= 3y^2-12y+12 = 3(y^2-4y)+12 \\
&= 3(y^2-4y+2^2-4)+12 = 3(y-2)^2-12+12 \\
&= 3(y-2)^2 \ .
\end{aligned}
$$

任意の実数 y について， $3(y-2)^2 \geq 0$ なので

$$3y^2-7y+8-(5y-4) \geq 0 \ ,$$

よって $3y^2-7y+8 \geq 5y-4$ ．

例 任意の実数 y について $3y^2-7y+8\geq 5y-4$ であることを示し，等号が成り立つ（つまり $3y^2-7y+8=5y-4$ となる）条件を調べる．不等式 $3y^2-7y+8\geq 5y-4$ を導くために不等式 $3y^2-7y+8-(5y-4)\geq 0$ を導く；そのために左辺の 2 次式 $3y^2-7y+8-(5y-4)$ を平方完成する．

$$\begin{aligned}3y^2-7y+8-(5y-4) &= 3y^2-12y+12=3(y^2-4y)+12\\ &= 3(y^2-4y+2^2-4)+12=3(y-2)^2-12+12\\ &= 3(y-2)^2\ .\end{aligned}$$

任意の実数 y について，$3(y-2)^2\geq 0$ なので

$$3y^2-7y+8-(5y-4)\ \geq\ 0\ ,$$

よって $3y^2-7y+8\geq 5y-4$ ．

　等号が成り立つ条件は，$3y^2-7y+8=5y-4$ ，$3y^2-7y+8-(5y-4)=0$ ，$3(y-2)^2=0$ ，$y-2=0$ ，$y=2$ ．故に $y=2$ のときに限り $3y^2-7y+8=5y-4$ ．

終

問6.2.2 任意の実数 t について $\frac{3}{4}t^2+t+2 \geq \frac{1}{2}t^2-2t-7$ となることを示し，等号が成り立つ条件を調べよ．

$$-\left(\qquad \qquad \right) =$$

任意の実数 x について， ≥ 0 ， ≥ 0 なので，

$$-\left(\qquad \qquad \right) \geq 0 \ ,$$

よって $\frac{3}{4}t^2+t+2 \geq \frac{1}{2}t^2-2t-7$ ．

　等号が成り立つ条件は， $\frac{3}{4}t^2+t+2 = \frac{1}{2}t^2-2t-7$ ， $-\left(\qquad \right) = 0$ ， $= 0$ ， $= 0$ ， $t =$ ．故に $t =$ 　のときに限り $\frac{3}{4}t^2+t+2 = \frac{1}{2}t^2-2t-7$ ．

問6.2.2 任意の実数 t について $\frac{3}{4}t^2+t+2 \geq \frac{1}{2}t^2-2t-7$ となることを示し，等号が成り立つ条件を調べよ．

$$\frac{3}{4}t^2+t+2-\left(\frac{1}{2}t^2-2t-7\right) = \frac{1}{4}t^2+3t+9 = \frac{1}{4}(t^2+12x+6^2)-9+9$$
$$= \frac{1}{4}(t+6)^2 \ .$$

任意の実数 x について， $(t+6)^2 \geq 0$ ， $\frac{1}{4}(t+6)^2 \geq 0$ なので，

$$\frac{3}{4}t^2+t+2-\left(\frac{1}{2}t^2-2t-7\right) \geq 0 \ ,$$

よって $\frac{3}{4}t^2+t+2 \geq \frac{1}{2}t^2-2t-7$ ．

等号が成り立つ条件は， $\frac{3}{4}t^2+t+2 = \frac{1}{2}t^2-2t-7$ ， $\qquad -\Big($

$\qquad \Big) = 0$ ， $\qquad = 0$ ， $\qquad = 0$ ， $t =$ $\qquad$ ．故に $t =$ $\qquad$ のときに限り $\frac{3}{4}t^2+t+2 = \frac{1}{2}t^2-2t-7$ ．

$\boxed{\text{問}6.2.2}$ 任意の実数 t について $\dfrac{3}{4}t^2+t+2 \geq \dfrac{1}{2}t^2-2t-7$ となることを示し，等号が成り立つ条件を調べよ．

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}t^2+t+2-\left(\frac{1}{2}t^2-2t-7\right) &= \frac{1}{4}t^2+3t+9 = \frac{1}{4}(t^2+12x+6^2)-9+9 \\ &= \frac{1}{4}(t+6)^2 \ .\end{aligned}$$

任意の実数 x について， $(t+6)^2 \geq 0$ ， $\dfrac{1}{4}(t+6)^2 \geq 0$ なので，

$$\frac{3}{4}t^2+t+2-\left(\frac{1}{2}t^2-2t-7\right) \geq 0 \ ,$$

よって $\dfrac{3}{4}t^2+t+2 \geq \dfrac{1}{2}t^2-2t-7$ ．

等号が成り立つ条件は， $\dfrac{3}{4}t^2+t+2 = \dfrac{1}{2}t^2-2t-7$ ， $\dfrac{3}{4}t^2+t+2-\left(\dfrac{1}{2}t^2-2t-7\right)=0$ ， $\dfrac{1}{4}(t+6)^2=0$ ， $t+6=0$ ， $t=-6$ ．故に $t=-6$ のときに限り $\dfrac{3}{4}t^2+t+2 = \dfrac{1}{2}t^2-2t-7$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示せ： $3x^2+5 \leq 7x$ である実数 x は無い.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示せ：$3x^2+5 \leq 7x$ である実数 x は無い．“任意の実数 x について $3x^2+5 > 7x$”ならば，“任意の実数 x について $3x^2+5 \not\leq 7x$”なので，“$3x^2+5 \leq 7x$ である実数 x は無い”．

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示せ：$3x^2+5 \leq 7x$ である実数 x は無い．“任意の実数 x について $3x^2+5>7x$ ” ならば，“任意の実数 x について $3x^2+5 \not\leq 7x$ ” なので，“ $3x^2+5 \leq 7x$ である実数 x は無い ”．

$$\begin{aligned} 3x^2+5-7x &= 3\left(x^2-\frac{7}{3}x\right)+5 = 3\left\{x^2-2\cdot\frac{7}{6}x+\left(\frac{7}{6}\right)^2\right\}-\frac{49}{12}+5 \\ &= 3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{12} \ . \end{aligned}$$

$\boxed{例}$ 次のことを示せ：$3x^2+5 \leq 7x$ である実数 x は無い．“任意の実数 x について $3x^2+5>7x$ ” ならば，“任意の実数 x について $3x^2+5 \not\leq 7x$ ” なので，“ $3x^2+5 \leq 7x$ である実数 x は無い ”．

$$\begin{aligned} 3x^2+5-7x &= 3\left(x^2-\frac{7}{3}x\right)+5 = 3\left\{x^2-2\cdot\frac{7}{6}x+\left(\frac{7}{6}\right)^2\right\}-\frac{49}{12}+5 \\ &= 3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{12} \ . \end{aligned}$$

任意の実数 x について，$\left(x-\frac{7}{6}\right)^2 \geq 0$ なので，$3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{12} \geq \frac{11}{12} > 0$ ，$3x^2+5-7x>0$ ，よって $3x^2+5>7x$ ．

$\boxed{例}$ 次のことを示せ：$3x^2+5\leq 7x$ である実数 x は無い．“任意の実数 x について $3x^2+5>7x$ ” ならば，“任意の実数 x について $3x^2+5\not\leq 7x$ ” なので，“ $3x^2+5\leq 7x$ である実数 x は無い ”．

$$
\begin{aligned}
3x^2+5-7x &= 3\left(x^2-\frac{7}{3}x\right)+5 = 3\left\{x^2-2\cdot\frac{7}{6}x+\left(\frac{7}{6}\right)^2\right\}-\frac{49}{12}+5 \\
&= 3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{12}\ .
\end{aligned}
$$

任意の実数 x について，$\left(x-\frac{7}{6}\right)^2\geq 0$ なので，$3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{12}\geq\frac{11}{12}>0$ ，$3x^2+5-7x>0$ ，よって $3x^2+5>7x$ ．故に $3x^2+5\leq 7x$ である実数 x は無い．

$\boxed{終}$

$\boxed{問6.2.3}$ 次のことを示せ：$3x^2+4 \leq 5x$ である実数 x は無い.

$$3x^2+4-5x=$$

任意の実数 x について，$\left(\qquad \right)^2 \geq 0$ なので，$\qquad \geq \qquad > 0$ ，$\qquad > 0$ ，よって $3x^2+4>5x$ ．故に $3x^2+4 \geq 5x$ である実数 x は無い. $\boxed{終}$

$\boxed{問6.2.3}$ 次のことを示せ： $3x^2+4 \leq 5x$ である実数 x は無い.

$$
\begin{aligned}
3x^2+4-5x &= 3\left(x^2-\frac{5}{3}x\right)+4 = 3\left\{x^2-2\cdot\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}-\frac{25}{12}+4 \\
&= 3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{11}{12}\ .
\end{aligned}
$$

任意の実数 x について， $\left(x-\frac{5}{6}\right)^2 \geq 0$ なので， $3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{11}{12} \geq \frac{11}{12} > 0$ ，$3x^2+4-5x > 0$ ，よって $3x^2+4 > 5x$ ．故に $3x^2+4 \geq 5x$ である実数 x は無い.

$\boxed{終}$

2 個の変数が現れる不等式を考える.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の実数 x と y とについて $2x^2+3y^2>3x+5y-4$.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを示す：任意の実数 x と y とについて $2x^2+3y^2>3x+5y-4$ ．

$2x^2+3y^2-(3x+5y-4)$ を x および y について平方完成する．

$\boxed{例}$ 次のことを示す：任意の実数 x と y とについて $2x^2+3y^2>3x+5y-4$.

$2x^2+3y^2-(3x+5y-4)$ を x および y について平方完成する.

$$
\begin{aligned}
2x^2+3y^2-(3x+5y-4) &= 2x^2-3x+3y^2-5y+4 \\
&= 2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+3\left(y^2-\frac{5}{3}y\right)+4 \\
&= 2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3^2}{4^2}\right\}+3\left\{y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{5^2}{6^2}\right\}+4 \\
&= 2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}-\frac{9}{8}+3\left\{y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}-\frac{25}{12}+4 \\
&= 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+3\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{19}{24}\ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{例}$ 次のことを示す：任意の実数 x と y とについて $2x^2+3y^2>3x+5y-4$.
$2x^2+3y^2-(3x+5y-4)$ を x および y について平方完成する.

$$
\begin{aligned}
&2x^2+3y^2-(3x+5y-4)=2x^2-3x+3y^2-5y+4\\
&=2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+3\left(y^2-\frac{5}{3}y\right)+4\\
&=2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3^2}{4^2}\right\}+3\left\{y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{5^2}{6^2}\right\}+4\\
&=2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}-\frac{9}{8}+3\left\{y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}-\frac{25}{12}+4\\
&=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+3\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{19}{24}\ .
\end{aligned}
$$

任意の実数 x と y とについて, $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\geq 0$ かつ $\left(y-\frac{5}{6}\right)^2\geq 0$ なので,

$$
2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+3\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{19}{24}\geq\frac{19}{24}>0\ ,
$$

$\boxed{例}$ 次のことを示す：任意の実数 x と y とについて $2x^2+3y^2>3x+5y-4$.

$2x^2+3y^2-(3x+5y-4)$ を x および y について平方完成する.

$$
\begin{aligned}
&2x^2+3y^2-(3x+5y-4)=2x^2-3x+3y^2-5y+4\\
&=2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+3\left(y^2-\frac{5}{3}y\right)+4\\
&=2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3^2}{4^2}\right\}+3\left\{y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{5^2}{6^2}\right\}+4\\
&=2\left\{x^2-2\cdot\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}-\frac{9}{8}+3\left\{y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}-\frac{25}{12}+4\\
&=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+3\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{19}{24}\ .
\end{aligned}
$$

任意の実数 x と y とについて， $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\geq 0$ かつ $\left(y-\frac{5}{6}\right)^2\geq 0$ なので，

$$2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+3\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{19}{24}\geq\frac{19}{24}>0\ ,$$

よって $2x^2+3y^2-(3x+5y-4)>0$ なので， $2x^2+3y^2>3x+5y-4$. $\boxed{終}$

$\boxed{問6.2.4}$ 次のことを示せ：任意の実数 x, y について $3x^2+4y^2 > 5x-3y-3$.

$$3x^2+4y^2-(5x-3y-3) =$$

$$= \left(x \qquad\right)^2 + \left(y \qquad\right)^2 +$$

任意の実数 x, y について，$\left(x \qquad\right)^2 \geq 0$ かつ $\left(y \qquad\right)^2 \geq 0$ なので，

$$\left(x \qquad\right)^2 + \left(y \qquad\right)^2 + \qquad \geq \qquad > 0 \ ,$$

よって $3x^2+4y^2-(5x-3y-3) > 0$ なので，$3x^2+4y^2 > 5x+3y-3$.

問6.2.4 次のことを示せ：任意の実数 x, y について $3x^2+4y^2>5x-3y-3$ ．

$$
\begin{aligned}
&3x^2+4y^2-(5x-3y-3)=3x^2-5x+4y^2+3y+3\\
&=3\left(x^2-\frac{5}{3}x\right)+4\left(y^2+\frac{3}{4}y\right)+3\\
&=3\left\{x^2-2\cdot\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{5^2}{6^2}\right\}+4\left\{y^2+2\cdot\frac{3}{8}y+\left(\frac{3}{8}\right)^2-\frac{3^2}{8^2}\right\}+3\\
&=3\left\{x^2-2\cdot\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}-\frac{25}{12}+4\left\{y^2+2\cdot\frac{3}{8}y+\left(\frac{3}{8}\right)^2\right\}-\frac{9}{16}+3\\
&=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+4\left(y+\frac{3}{8}\right)^2+\frac{17}{48}\ .
\end{aligned}
$$

任意の実数 x, y について， $\left(x-\frac{5}{6}\right)^2\geq 0$ かつ $\left(y+\frac{3}{8}\right)^2\geq 0$ なので，

$$3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+4\left(y+\frac{3}{8}\right)^2+\frac{17}{48}\ \geq\ \frac{17}{48}\ >\ 0\ ,$$

よって $3x^2+4y^2-(5x-3y-3)>0$ なので， $3x^2+4y^2>5x+3y-3$ ． 終