6.1　不等式の性質

実数の大小関係に関関する次の法則が成り立つ..

[法則 **6.1.1**] 任意の実数 a, b, c について，$a < b$ かつ $b < c$ ならば，$a < c$.

[定理 6.1.1]　任意の実数 a,b,c について以下のことが成り立つ：

$$a<b \text{ かつ } b\le c \text{ ならば，} \quad a<c \quad ;$$
$$a\le b \text{ かつ } b<c \text{ ならば，} \quad a<c \quad ;$$
$$a\le b \text{ かつ } b\le c \text{ ならば，} \quad a\le c \quad .$$

証明　例として“ $a<b$ かつ $b\le c$ ならば $a<c$ ”を証明する．

　実数 a,b,c について $a<b$ かつ $b\le c$ と仮定する． $b\le c$ なので，法則 **2.5.1** により， $b<c$ または $b=c$ ． $a<b$ なので， $b<c$ のとき法則 **6.1.1** により $a<c$ ．また， $a<b$ なので， $b=c$ のとき $a<c$ ．このように， $b<c$ のときも $b=c$ のときも $a<c$ ． (証明終了)

[法則 **2.5.1**] 任意の実数 a,b について， $a\le b \iff a<b$ または $a=b$ ．

[法則 **6.1.1**] 任意の実数 a,b,c について， $a<b$ かつ $b<c$ ならば， $a<c$ ．

[定理 **6.1.2**]　任意の実数 a, b, c, d について，

$$a < b \text{ かつ } c < d \text{ ならば } a + c < b + d \ ,$$
$$a \leq b \text{ かつ } c \leq d \text{ ならば } a + c \leq b + d \ .$$

証明　例として“ $a < b$ かつ $c < d$ ならば $a + c < b + d$ ”を証明する．
$a < b$ かつ $c < d$ と仮定する． $a < b$ なので，法則 **2.5.3** により

$$a + c < b + c \ .$$

また， $c < d$ なので，法則 **2.5.3** により $c + b < d + b$ ，つまり

$$b + c < b + d \ .$$

このように， $a + c < b + c$ かつ $b + c < b + d$ なので，法則 **6.1.1** により
$a + c < b + d$ ．　(証明終了)

[法則 **2.5.3**] 任意の実数 a, b, c について， $a < b$ ならば $a + c < b + c$ ．
[法則 **6.1.1**] 任意の実数 a, b, c について， $a < b$ かつ $b < c$ ならば， $a < c$ ．

実数 a,b,c に対して，“ $a<b$ かつ $b<c$ ”ということを $a<b<c$ というように，“ $a\leq b$ かつ $b\leq c$ ”ということを $a\leq b\leq c$ というように書き表す．

[定理 **6.1.3**]　任意の実数 a, b, c, d について，

$$0 \le a < b \quad かつ \quad 0 \le c < d \quad ならば \quad ac < bd \quad ,$$

$$0 \le a \le b \quad かつ \quad 0 \le c \le d \quad ならば \quad ac \le bd \quad .$$

証明　例として“ $0 \le a \le b$ かつ $0 \le c \le d$ ならば $ac \le bd$ ”を証明する．

　$0 \le a \le b$ かつ $0 \le c \le d$ と仮定する． $a \le b$ かつ $c \ge 0$ なので，定理 **2.5.7** により $ac \le bc$ ． また， $c \le d$ かつ $b \ge 0$ なので，定理 **2.5.7** により $cb \le db$ ． このように， $ac \le bc$ かつ $bc \le bd$ なので，定理 **6.1.1** により $ac \le bd$ ．　(証明終了)

[定理 **2.5.7**] 任意の実数 a, b, c について， $a \le b$ かつ $c \ge 0$ ならば， $ac \le bc$ ．

[定理 **6.1.1**] 任意の実数 a, b, c について， $a \le b$ かつ $b \le c$ ならば， $a \le c$ ．

[定理 **6.1.4**]　任意の実数 a と b とについて，

$$0 \leq a < b \text{ ならば } a^2 < b^2 \ ,$$
$$0 \leq a \leq b \text{ ならば } a^2 \leq b^2 \ .$$

証明　例として“ $0 \leq a < b$ ならば $a^2 < b^2$ ”を証明する．

　定理 **6.1.3** により，任意の実数 a と b とについて，

$$0 \leq a < b \text{ かつ } 0 \leq a < b \text{ ならば，} aa < bb \ ;$$

つまり，$0 \leq a < b$ ならば $a^2 < b^2$ ．　(証明終了)

[定理 **6.1.3**] 任意の実数 a, b について，$0 \leq a < b$ かつ $0 \leq c < d$ ならば，$ac < bd$ ．

実数 a と b とについて，$a^2 < b^2$ であるなら $a < b$ であるとは限らない；例えば，$a = 2$ ，$b = -3$ とすると，$a^2 < b^2$ であるが $a \not< b$ である．

　実数 a と b とについて，$a^2 < b^2$ であるなら $a < b$ であるとは限らない；例えば，$a = 2$ ，$b = -3$ とすると，$a^2 < b^2$ であるが $a \not< b$ である．しかし，$b \geq 0$ であれば，$a^2 < b^2$ であるなら $a < b$ である．

実数 a と b とについて，$a^2 < b^2$ であるなら $a < b$ であるとは限らない；例えば，$a = 2$ ，$b = -3$ とすると，$a^2 < b^2$ であるが $a \not< b$ である．しかし，$b \geq 0$ であれば，$a^2 < b^2$ であるなら $a < b$ である．

[定理 6.1.5] 任意の実数 a と b とについて以下のことが成り立つ：

$$a^2 < b^2 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ ならば，} \quad a < b \quad ;$$

$$a^2 \leq b^2 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ ならば，} \quad a \leq b \quad .$$

[定理 **6.1.5**] 任意の実数 a と b とについて以下のことが成り立つ：

$$a^2 < b^2 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ ならば，} a < b \text{ ；}$$

$$a^2 \leq b^2 \text{ かつ } b \geq 0 \text{ ならば，} a \leq b \text{ ．}$$

証明　例として“ $a^2 \leq b^2$ かつ $b \geq 0$ ならば， $a \leq b$ ”を証明する．

　$b \geq 0$ と仮定する． $a > b$ ならば，仮定 $0 \leq b$ より $0 \leq b < a$ なので，定理 **6.1.4** により $b^2 < a^2$ ；つまり， $a > b$ ならば $a^2 > b^2$ ．対偶をとると，

$$a^2 \not> b^2 \text{ ならば } a \not> b \text{ .}$$

法則 **2.5.2** により，

$$a^2 \not> b^2 \iff a^2 \leq b^2 , \qquad a \not> b \iff a \leq b ,$$

従って， $a^2 \leq b^2$ ならば $a \leq b$ ．

　つまり， $b \geq 0$ とすると， $a^2 \leq b^2$ ならば $a \leq b$ ．故に， $a^2 \leq b^2$ かつ $b \geq 0$ ならば， $a \leq b$ ． (証明終了)

[定理 **6.1.4**] 任意の実数 a, b について， $0 \leq a < b$ ならば $a^2 < b^2$ ．

[法則 **2.5.2**] 任意の実数 a, b について， $a \not> b \iff a \leq b$ ．

例えば，3 と 5 とについて $3<5$ であるが，それらの逆数 $\dfrac{1}{3}$ と $\dfrac{1}{5}$ とについては $\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{5}$ である．

例えば，3 と 5 とについて $3<5$ であるが，それらの逆数 $\dfrac{1}{3}$ と $\dfrac{1}{5}$ とについては $\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{5}$ である．一般的に次の定理が成り立つ．

[定理 6.1.6]　任意の実数 a と b とについて，

$$0<a<b \text{ ならば } \frac{1}{a}>\frac{1}{b}\ ,$$

$$0<a\leq b \text{ ならば } \frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}\ .$$

[定理 **6.1.6**] 任意の実数 a と b とについて,

$$0 < a < b \text{ ならば } \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \text{ ,}$$

$$0 < a \leq b \text{ ならば } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \text{ .}$$

証明　例として " $0 < a < b$ ならば $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ " を証明する.

$0 < a < b$ と仮定する. $a > 0$, 法則 **6.1.1** により $b > 0$, 定理 **2.5.8** により $ab > 0$, 従って定理 **2.5.14** により $\frac{1}{ab} > 0$. $a < b$ かつ $\frac{1}{ab} > 0$ なので, 法則 **2.5.3** により $a\frac{1}{ab} < b\frac{1}{ab}$, よって $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. (証明終了)

[法則 **6.1.1**] 任意の実数 a, b, c について, $a < b$ かつ $b < c$ ならば, $a < c$.

[定理 **2.5.8**] 任意の実数 a, b について, $a > 0$ かつ $b > 0$ ならば, $ab > 0$.

[定理 **2.5.14**] 任意の実数 a について, $a > 0$ ならば $\frac{1}{a} > 0$.

[法則 **2.5.3**] 任意の実数 a, b, c について, $a < b$ かつ $c > 0$ ならば, $ac < bc$.

変数 x に関する不等式とは，x の値に関する条件を表す不等式のことである．**2.9** 節で述べたように虚数には大小関係がないので，特に断りがない限り，不等式に表れる変数は実数を表す．それで，“実数を表す変数 x に関する不等式”というべきところを多くは“変数 x に関する不等式”と略す.