

5.11 関数のグラフの共有点

座標平面において、2つの関数のグラフの両方に属す点を、それらのグラフの共有点という。

例 変数 x の関数 $y = x^2$ のグラフと x の関数 $y = x + 2$ のグラフとの共有点を求める.

例 変数 x の関数 $y = x^2$ のグラフと x の関数 $y = x + 2$ のグラフとの共有点を求める．実数 u, v について，5.4節で述べたように，

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = x^2 \text{ のグラフに属す} \iff v = u^2 ,$$

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = x + 2 \text{ のグラフに属す} \iff v = u + 2 ;$$

例 変数 x の関数 $y = x^2$ のグラフと x の関数 $y = x + 2$ のグラフとの共有点を求める．実数 u, v について，5.4 節で述べたように，

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = x^2 \text{ のグラフに属す} \iff v = u^2 ,$$

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = x + 2 \text{ のグラフに属す} \iff v = u + 2 ;$$

これより，

点 (u, v) が $y = x^2$ のグラフと $y = x + 2$ のグラフとの共有点である

\iff 点 (u, v) が $y = x^2$ のグラフに属しかつ $y = x + 2$ のグラフにも属す

$\iff v = u^2$ かつ $v = u + 2$.

例 変数 x の関数 $y = x^2$ のグラフと x の関数 $y = x + 2$ のグラフとの共有点を求める. 実数 u, v について, 5.4 節で述べたように,

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = x^2 \text{ のグラフに属す} \iff v = u^2,$$

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = x + 2 \text{ のグラフに属す} \iff v = u + 2;$$

これより,

点 (u, v) が $y = x^2$ のグラフと $y = x + 2$ のグラフとの共有点である

\iff 点 (u, v) が $y = x^2$ のグラフに属しかつ $y = x + 2$ のグラフにも属す

$\iff v = u^2$ かつ $v = u + 2$.

従って, $y = x^2$ のグラフと $y = x + 2$ のグラフとの共有点 (u, v) を求めるには, 連立方程式 $v = u^2$ かつ $v = u + 2$ を解く.

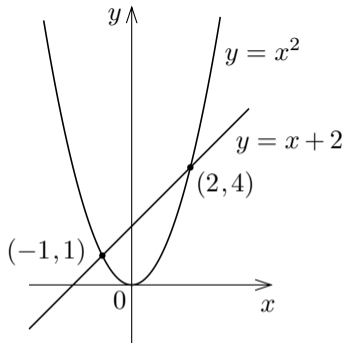
$y = x^2$ のグラフと $y = x + 2$ のグラフとの共有点 (u, v) を求めるには連立方程式 $v = u^2$ かつ $v = u + 2$ を解く.

$y = x^2$ のグラフと $y = x + 2$ のグラフとの共有点 (u, v) を求めるには連立方程式 $v = u^2$ かつ $v = u + 2$ を解く. この連立方程式より $u^2 = u + 2$ なので, $u^2 - u - 2 = 0$, $u = 2$ または $u = -1$.

$y = x^2$ のグラフと $y = x + 2$ のグラフとの共有点 (u, v) を求めるには連立方程式 $v = u^2$ かつ $v = u + 2$ を解く. この連立方程式より $u^2 = u + 2$ なので, $u^2 - u - 2 = 0$, $u = 2$ または $u = -1$. $v = u + 2$ なので, $u = 2$ のとき $v = 4$, $u = -1$ のとき $v = 1$.

$y = x^2$ のグラフと $y = x + 2$ のグラフとの共有点 (u, v) を求めるには連立方程式 $v = u^2$ かつ $v = u + 2$ を解く. この連立方程式より $u^2 = u + 2$ なので, $u^2 - u - 2 = 0$, $u = 2$ または $u = -1$. $v = u + 2$ なので, $u = 2$ のとき $v = 4$, $u = -1$ のとき $v = 1$. よって, $(u, v) = (2, 4)$ または $(u, v) = (-1, 1)$.

$y = x^2$ のグラフと $y = x + 2$ のグラフとの共有点 (u, v) を求めるには連立方程式 $v = u^2$ かつ $v = u + 2$ を解く. この連立方程式より $u^2 = u + 2$ なので, $u^2 - u - 2 = 0$, $u = 2$ または $u = -1$. $v = u + 2$ なので, $u = 2$ のとき $v = 4$, $u = -1$ のとき $v = 1$. よって, $(u, v) = (2, 4)$ または $(u, v) = (-1, 1)$. 故に, 関数 $y = x^2$ のグラフと関数 $y = x + 2$ のグラフとの共有点は $(2, 4)$ と $(-1, 1)$ とである.



一般的に述べる.

一般的に述べる．変数 x の関数 $y = f(x)$ と関数 $y = g(x)$ 及び実数 u, v について，5.4節で述べたように，

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = f(x) \text{ のグラフに属す} \iff f(u) = v ,$$

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = g(x) \text{ のグラフに属す} \iff g(u) = v ;$$

一般的に述べる．変数 x の関数 $y = f(x)$ と関数 $y = g(x)$ 及び実数 u, v について，5.4節で述べたように，

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = f(x) \text{ のグラフに属す} \iff f(u) = v ,$$

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = g(x) \text{ のグラフに属す} \iff g(u) = v ;$$

よって，

$$\begin{aligned} & \text{点 } (u, v) \text{ が } y = f(x) \text{ のグラフと } y = g(x) \text{ のグラフとの共有点である} \\ \iff & \text{点 } (u, v) \text{ は } y = f(x) \text{ のグラフに属しかつ } y = g(x) \text{ のグラフにも属す} \\ \iff & v = f(u) \text{ かつ } v = g(u) . \end{aligned}$$

一般的に述べる．変数 x の関数 $y = f(x)$ と関数 $y = g(x)$ 及び実数 u, v について，5.4節で述べたように，

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = f(x) \text{ のグラフに属す} \iff f(u) = v ,$$

$$\text{点 } (u, v) \text{ が } y = g(x) \text{ のグラフに属す} \iff g(u) = v ;$$

よって，

$$\begin{aligned} & \text{点 } (u, v) \text{ が } y = f(x) \text{ のグラフと } y = g(x) \text{ のグラフとの共有点である} \\ \iff & \text{点 } (u, v) \text{ は } y = f(x) \text{ のグラフに属しかつ } y = g(x) \text{ のグラフにも属す} \\ \iff & v = f(u) \text{ かつ } v = g(u) . \end{aligned}$$

このように，関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = g(x)$ のグラフとの共有点 (x, y) は，連立方程式 $y = f(x)$ かつ $y = g(x)$ の実数解の順序対である．

例 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - x - 3$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x$ のグラフとの共有点を求める.

例 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - x - 3$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x, y) について、 $y = x^2 - x - 3$ かつ $y = 2x^2 - 5x$ なので、

例 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - x - 3$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x$ のグラフとの共有点を求める。共有点 (x, y) について、 $y = x^2 - x - 3$ かつ $y = 2x^2 - 5x$ なので、

$$x^2 - x - 3 = 2x^2 - 5x ,$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 ,$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0 ,$$

$$x = 1 \text{ または } x = 3 .$$

例 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - x - 3$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x, y) について、 $y = x^2 - x - 3$ かつ $y = 2x^2 - 5x$ なので、

$$x^2 - x - 3 = 2x^2 - 5x ,$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 ,$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0 ,$$

$$x = 1 \text{ または } x = 3 .$$

更に、 $y = x^2 - x - 3$ より、 $x = 1$ のとき $y = -3$, $x = 3$ のとき $y = 3$.

例 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - x - 3$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x$ のグラフとの共有点を求める。共有点 (x, y) について、 $y = x^2 - x - 3$ かつ $y = 2x^2 - 5x$ なので、

$$x^2 - x - 3 = 2x^2 - 5x ,$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 ,$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0 ,$$

$$x = 1 \text{ または } x = 3 .$$

更に、 $y = x^2 - x - 3$ より、 $x = 1$ のとき $y = -3$, $x = 3$ のとき $y = 3$.
故に、関数 $y = x^2 - x - 3$ のグラフと関数 $y = 2x^2 - 5x$ のグラフとの共有点は $(1, -3)$ と $(3, 3)$ とである。 終

問5.11.1 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - 4x + 5$ のグラフと x の関数 $y = 3x^2 + x - 7$ のグラフとの共有点を求めよ.

共有点 (x, y) について、 $\quad = \quad$ かつ $\quad = \quad$ なので、

$$= \quad ,$$

$$= 0 ,$$

$$(\quad)(\quad) = 0 ,$$

$$x = \quad \text{または} \quad .$$

更に、 $y = \quad$ より、 $x = \quad$ のとき $y = \quad$, $x = \quad$ のとき

$y = \quad$. 故に、共有点は \quad と \quad とである.

問5.11.1 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - 4x + 5$ のグラフと x の関数 $y = 3x^2 + x - 7$ のグラフとの共有点を求めよ.

共有点 (x, y) について、 $y = x^2 - 4x + 5$ かつ $y = 2x^2 + 5x - 12$ なので、

$$x^2 - 4x + 5 = 3x^2 + x - 7,$$

$$2x^2 + 5x - 12 = 0,$$

$$(x + 4)(2x - 3) = 0,$$

$$x = -4 \text{ または } \frac{3}{2}.$$

更に、 $y = x^2 - 4x + 5$ より、 $x = -4$ のとき $y = 37$ 、 $x = \frac{3}{2}$ のとき $y = \frac{5}{4}$. 故に、共有点は $(-4, 37)$ と $(\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$ とである.

終

関数 $y = f(x)$ のグラフと関数 $y = g(x)$ のグラフとの共有点 (x, y) は、連立方程式 $y = f(x)$ かつ $y = g(x)$ の実数解の順序対である。それ故、この連立方程式の実数解が無いときは、 $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフとの共有点も無い。

例 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - 2x - 5$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x - 1$ のグラフとの共有点を求める.

例 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - 2x - 5$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x - 1$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x, y) について、 $y = x^2 - 2x - 5$ かつ $y = 2x^2 - 5x - 1$ なので、

例 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - 2x - 5$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x - 1$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x, y) について、 $y = x^2 - 2x - 5$ かつ $y = 2x^2 - 5x - 1$ なので、

$$x^2 - 2x - 5 = 2x^2 - 5x - 1 ,$$

$$x^2 - 3x + 4 = 0 .$$

例 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - 2x - 5$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x - 1$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x, y) について、 $y = x^2 - 2x - 5$ かつ $y = 2x^2 - 5x - 1$ なので、

$$x^2 - 2x - 5 = 2x^2 - 5x - 1 ,$$

$$x^2 - 3x + 4 = 0 .$$

この x に関する 2 次方程式は、判別式の値が $(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0$ なので、実数解が無い．

例 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - 2x - 5$ のグラフと x の関数 $y = 2x^2 - 5x - 1$ のグラフとの共有点を求める．共有点 (x, y) について、 $y = x^2 - 2x - 5$ かつ $y = 2x^2 - 5x - 1$ なので、

$$x^2 - 2x - 5 = 2x^2 - 5x - 1 ,$$

$$x^2 - 3x + 4 = 0 .$$

この x に関する 2 次方程式は、判別式の値が $(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0$ なので、実数解が無い．従って、関数 $y = x^2 - 2x - 5$ のグラフと関数 $y = 2x^2 - 5x - 1$ のグラフとの共有点はない．

終

問5.11.2 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフと x の関数 $y = 3x^2 - 7x + 5$ のグラフとの共有点を求めよ.

共有点 (x, y) について、 $y = x^2 - 2x + 1$ かつ $y = 3x^2 - 7x + 5$ なので、
 $x^2 - 2x + 1 = 3x^2 - 7x + 5$,
 $0 = 2x^2 - 5x + 4$
 $2x^2 - 5x + 4 = 0$.

この2次方程式は、判別式の値が $\Delta = 25 - 32 = -7 < 0$ なので、
従って、関数 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフと関数 $y = 3x^2 - 7x + 5$ のグラフとの共有点は .

終

問5.11.2 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフと x の関数 $y = 3x^2 - 7x + 5$ のグラフとの共有点を求めよ.

共有点 (x, y) について、 $y = x^2 - 2x + 1$ かつ $y = 3x^2 - 7x + 5$ なので、

$$x^2 - 2x + 1 = 3x^2 - 7x + 5 ,$$

$$2x^2 - 5x + 4 = 0 .$$

この2次方程式は、判別式の値が $5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 < 0$ なので、実数解が無い。

従って、関数 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフと関数 $y = 3x^2 - 7x + 5$ のグラフとの共有点はない。

終

例 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = \frac{2x-6}{3x-1}$ ($x \neq \frac{1}{3}$) のグラフと x の関数 $y = \frac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める.

例 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = \frac{2x-6}{3x-1}$ ($x \neq \frac{1}{3}$) のグラフと

x の関数 $y = \frac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める。共有点 (x, y) について、

$y = \frac{2x-6}{3x-1}$ かつ $y = \frac{x+9}{4}$ なので、

例 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = \frac{2x-6}{3x-1}$ ($x \neq \frac{1}{3}$) のグラフと

x の関数 $y = \frac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める。共有点 (x, y) について、

$$y = \frac{2x-6}{3x-1} \quad \text{かつ} \quad y = \frac{x+9}{4} \quad \text{なので、}$$

$$\frac{2x-6}{3x-1} = \frac{x+9}{4},$$

$$4(2x-6) = (x+9)(3x-1),$$

$$3x^2 + 18x + 15 = 0,$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0,$$

$$(x+1)(x+5) = 0.$$

$$x = -1 \quad \text{または} \quad x = -5.$$

例 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = \frac{2x-6}{3x-1}$ ($x \neq \frac{1}{3}$) のグラフと

x の関数 $y = \frac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める。共有点 (x, y) について、

$$y = \frac{2x-6}{3x-1} \quad \text{かつ} \quad y = \frac{x+9}{4} \quad \text{なので、}$$

$$\frac{2x-6}{3x-1} = \frac{x+9}{4},$$

$$4(2x-6) = (x+9)(3x-1),$$

$$3x^2 + 18x + 15 = 0,$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0,$$

$$(x+1)(x+5) = 0.$$

$$x = -1 \quad \text{または} \quad x = -5.$$

どちらのときも $x \neq \frac{1}{3}$.

例 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = \frac{2x-6}{3x-1}$ ($x \neq \frac{1}{3}$) のグラフと

x の関数 $y = \frac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める。共有点 (x, y) について、

$$y = \frac{2x-6}{3x-1} \quad \text{かつ} \quad y = \frac{x+9}{4} \quad \text{なので、}$$

$$\frac{2x-6}{3x-1} = \frac{x+9}{4},$$

$$4(2x-6) = (x+9)(3x-1),$$

$$3x^2 + 18x + 15 = 0,$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0,$$

$$(x+1)(x+5) = 0.$$

$$x = -1 \quad \text{または} \quad x = -5.$$

どちらのときも $x \neq \frac{1}{3}$. $y = \frac{x+9}{4}$ より、 $x = -1$ のとき $y = 2$. $x = -5$

のとき $y = 1$.

例 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = \frac{2x-6}{3x-1}$ ($x \neq \frac{1}{3}$) のグラフと

x の関数 $y = \frac{x+9}{4}$ のグラフとの共有点を求める。共有点 (x, y) について、

$$y = \frac{2x-6}{3x-1} \quad \text{かつ} \quad y = \frac{x+9}{4} \quad \text{なので、}$$

$$\frac{2x-6}{3x-1} = \frac{x+9}{4},$$

$$4(2x-6) = (x+9)(3x-1),$$

$$3x^2 + 18x + 15 = 0,$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0,$$

$$(x+1)(x+5) = 0.$$

$$x = -1 \quad \text{または} \quad x = -5.$$

どちらのときも $x \neq \frac{1}{3}$. $y = \frac{x+9}{4}$ より、 $x = -1$ のとき $y = 2$. $x = -5$ のとき $y = 1$. 共有点は $(-1, 2)$ と $(-5, 1)$ とである。 終

問5.11.3 xy 座標平面において，変数 x の関数 $y = \frac{7x+3}{2x-3}$ ($x \neq \frac{3}{2}$) のグラフと x の関数 $y = \frac{x+9}{3}$ のグラフとの共有点を求めよ．

共有点 (x, y) について， $\frac{7x+3}{2x-3} = \frac{x+9}{3}$ かつ $x \neq \frac{3}{2}$ なので，

$$\frac{7x+3}{2x-3} = \frac{x+9}{3},$$

$$(7x+3) \cdot 3 = (2x-3)(x+9),$$

$$21x+9 = 2x^2+18x-3x-27,$$

$$2x^2-6x-36 = 0,$$

$$(x-6)(x+3) = 0,$$

$$x = 6 \quad \text{または} \quad x = -3.$$

どちらのときも $x \neq \frac{3}{2}$. $x = 6$ のとき $y = 5$. $x = -3$ のとき $y = -2$. 共有点は $(6, 5)$ と $(-3, -2)$ とである.

問5.11.3 xy 座標平面において、変数 x の関数 $y = \frac{7x+3}{2x-3}$ ($x \neq \frac{3}{2}$) のグラフと x の関数 $y = \frac{x+9}{3}$ のグラフとの共有点を求めよ.

共有点 (x, y) について、 $y = \frac{7x+3}{2x-3}$ かつ $y = \frac{x+9}{3}$ なので、

$$\frac{7x+3}{2x-3} = \frac{x+9}{3},$$

$$3(7x+3) = (x+9)(2x-3),$$

$$2x^2 - 6x - 36 = 0,$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0,$$

$$(x-6)(x+3) = 0,$$

$$x = 6 \text{ または } x = -3.$$

どちらのときも $x \neq \frac{3}{2}$. $x = 6$ のとき $y = 5$. $x = -3$ のとき $y = 2$. 共有点は $(6, 5)$ と $(-3, 2)$ とである.

終