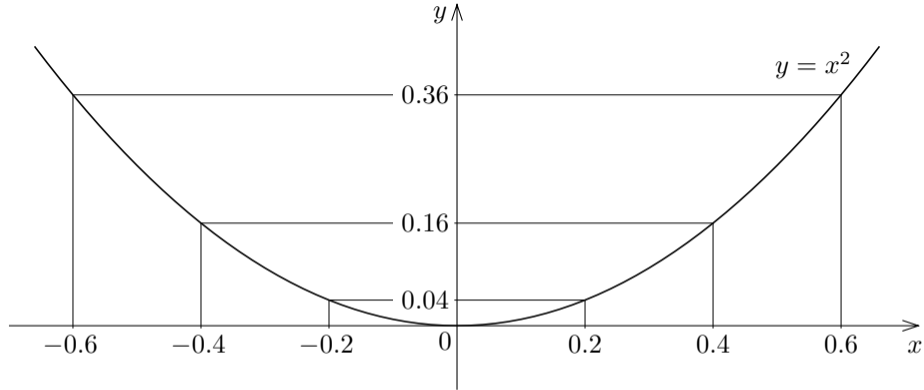
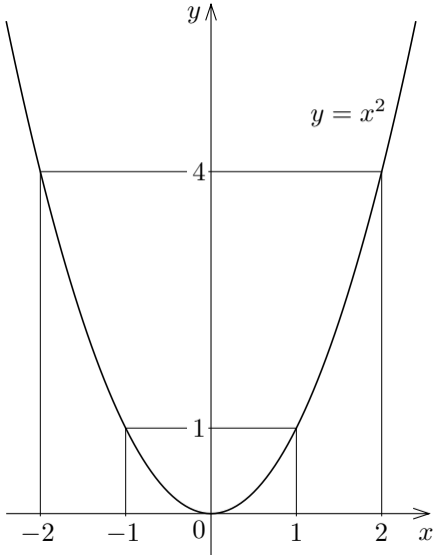
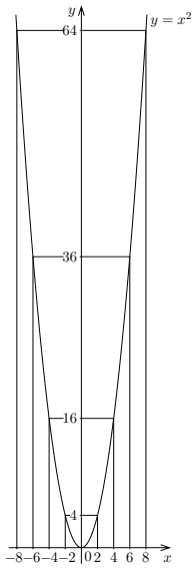


## 5.8 2次関数のグラフ

まず、尺度が異なる3通りの  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の2次関数  $y = x^2$  のグラフを描く。



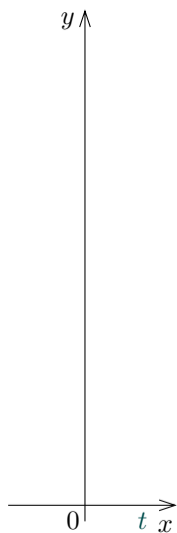




**例**  $xy$  座標平面において変数  $x$  の関数

$y = 3x^2$  のグラフを考える.

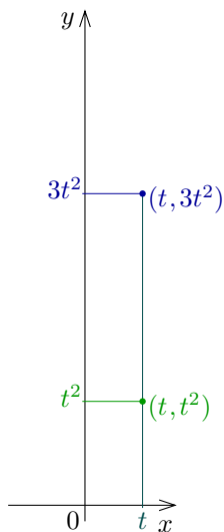
**例**  $xy$  座標平面において変数  $x$  の関数  
 $y = 3x^2$  のグラフを考える.  $x$  座標を実数  $t$   
とするときの,



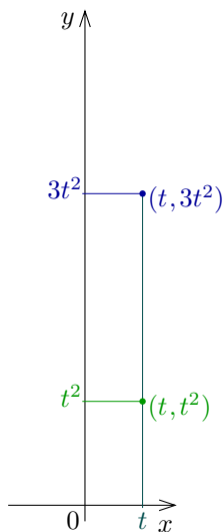
**例**  $xy$  座標平面において変数  $x$  の関数  $y = 3x^2$  のグラフを考える.  $x$  座標を実数  $t$  とするときの,  $x$  の関数  $y = x^2$  のグラフの点は  $(t, t^2)$  であり,



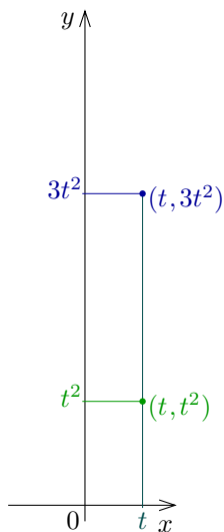
例  $xy$  座標平面において変数  $x$  の関数  $y = 3x^2$  のグラフを考える.  $x$  座標を実数  $t$  とするときの,  $x$  の関数  $y = x^2$  のグラフの点は  $(t, t^2)$  であり,  $y = 3x^2$  のグラフの点は  $(t, 3t^2)$  である.



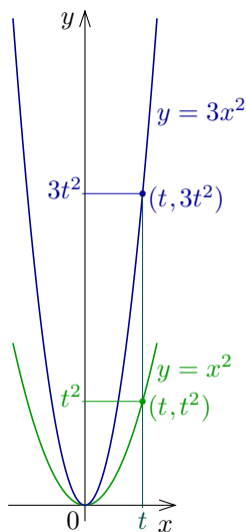
例  $xy$  座標平面において変数  $x$  の関数  $y = 3x^2$  のグラフを考える.  $x$  座標を実数  $t$  とするときの,  $x$  の関数  $y = x^2$  のグラフの点は  $(t, t^2)$  であり,  $y = 3x^2$  のグラフの点は  $(t, 3t^2)$  である.  $y = 3x^2$  のグラフの点  $(t, 3t^2)$  は  $y = x^2$  のグラフの点  $(t, t^2)$  の座標だけを倍した点である.



**例**  $xy$  座標平面において変数  $x$  の関数  $y = 3x^2$  のグラフを考える.  $x$  座標を実数  $t$  とするときの,  $x$  の関数  $y = x^2$  のグラフの点は  $(t, t^2)$  であり,  $y = 3x^2$  のグラフの点は  $(t, 3t^2)$  である.  $y = 3x^2$  のグラフの点  $(t, 3t^2)$  は  $y = x^2$  のグラフの点  $(t, t^2)$  の  $y$  座標だけを 3 倍した点である.

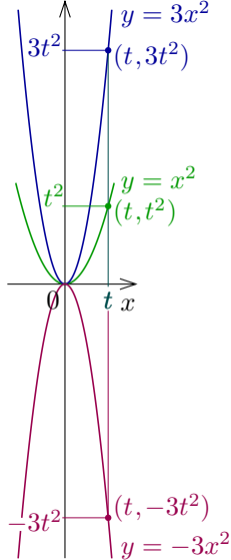


**例**  $xy$  座標平面において変数  $x$  の関数  $y = 3x^2$  のグラフを考える.  $x$  座標を実数  $t$  とするときの,  $x$  の関数  $y = x^2$  のグラフの点は  $(t, t^2)$  であり,  $y = 3x^2$  のグラフの点は  $(t, 3t^2)$  である.  $y = 3x^2$  のグラフの点  $(t, 3t^2)$  は  $y = x^2$  のグラフの点  $(t, t^2)$  の  $y$  座標だけを 3 倍した点である. よって  $y = 3x^2$  のグラフは  $y = x^2$  のグラフの各点の  $y$  座標だけを 3 倍した点の全体である.

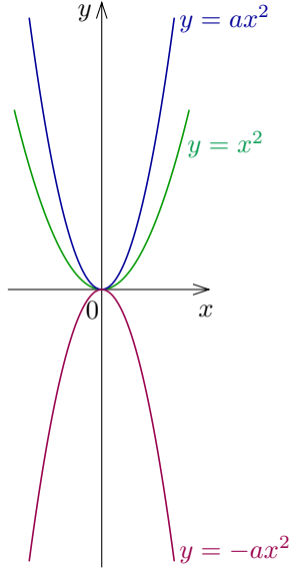


例  $xy$  座標平面において変数  $x$  の関数  $y = 3x^2$  のグラフを考える.  $x$  座標を実数  $t$  とするときの,  $x$  の関数  $y = x^2$  のグラフの点は  $(t, t^2)$  であり,  $y = 3x^2$  のグラフの点は  $(t, 3t^2)$  である.  $y = 3x^2$  のグラフの点  $(t, 3t^2)$  は  $y = x^2$  のグラフの点  $(t, t^2)$  の  $y$  座標だけを 3 倍した点である. よって  $y = 3x^2$  のグラフは  $y = x^2$  のグラフの各点の  $y$  座標だけを 3 倍した点の全体である.

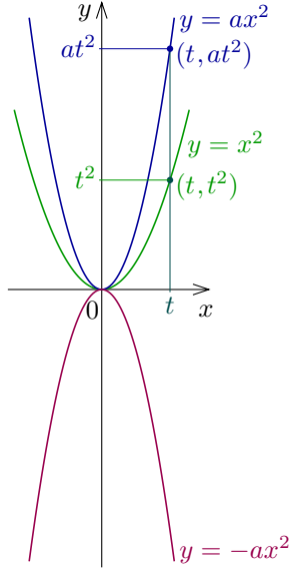
同様に考えると,  $x$  の関数  $y = -3x^2$  のグラフは  $x$  の関数  $y = x^2$  のグラフの各点の  $y$  座標だけを  $-3$  倍した点の全体である.



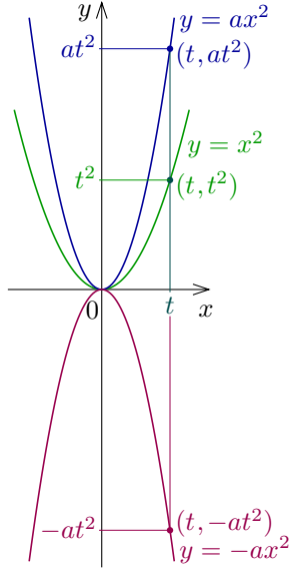
定数  $a$  に対し,  $xy$  座標平面において変数  $x$  の関数  $y = x^2$  のグラフと関数  $y = ax^2$  のグラフと関数  $y = -ax^2$  のグラフとを考える.



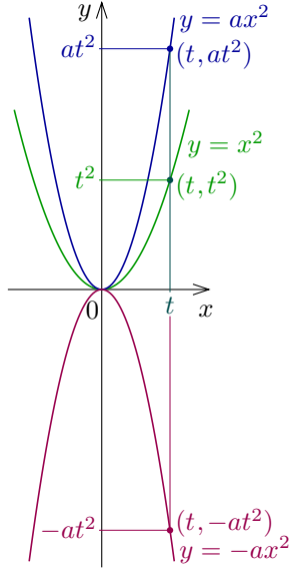
定数  $a$  に対し,  $xy$  座標平面において変数  $x$  の関数  $y = x^2$  のグラフと関数  $y = ax^2$  のグラフと関数  $y = -ax^2$  のグラフとを考える. 各実数  $t$  に対して,  $y = ax^2$  のグラフの点  $(t, at^2)$  は  $y = x^2$  のグラフの点  $(t, t^2)$  の  $y$  座標だけを  $a$  倍した点である.



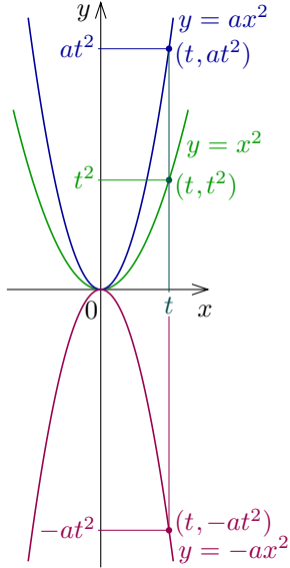
定数  $a$  に対し、 $xy$  座標平面において変数  $x$  の関数  $y = x^2$  のグラフと関数  $y = ax^2$  のグラフと関数  $y = -ax^2$  のグラフとを考える。各実数  $t$  に対して、 $y = ax^2$  のグラフの点  $(t, at^2)$  は  $y = x^2$  のグラフの点  $(t, t^2)$  の  $y$  座標だけを  $a$  倍した点である。 $y = -ax^2$  のグラフの点  $(t, -at^2)$  は  $y = x^2$  のグラフの点  $(t, t^2)$  の  $y$  座標だけを  $-a$  倍した点である。



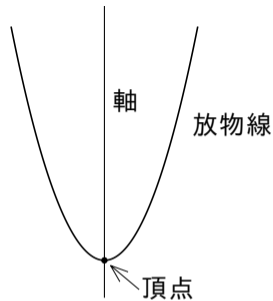
定数  $a$  に対し、 $xy$  座標平面において変数  $x$  の関数  $y = x^2$  のグラフと関数  $y = ax^2$  のグラフと関数  $y = -ax^2$  のグラフとを考える。各実数  $t$  に対して、 $y = ax^2$  のグラフの点  $(t, at^2)$  は  $y = x^2$  のグラフの点  $(t, t^2)$  の  $y$  座標だけを  $a$  倍した点である。 $y = -ax^2$  のグラフの点  $(t, -at^2)$  は  $y = x^2$  のグラフの点  $(t, t^2)$  の  $y$  座標だけを  $-a$  倍した点である。 $y = -ax^2$  のグラフの点  $(t, -at^2)$  は  $y = ax^2$  のグラフの点  $(t, at^2)$  と  $x$  軸に関して対称である。



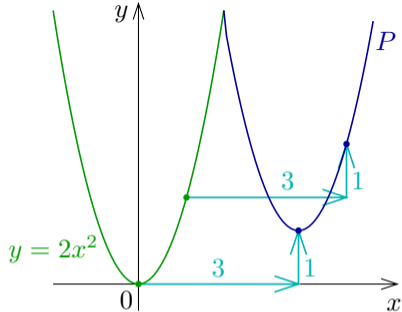
定数  $a$  に対し、 $xy$  座標平面において変数  $x$  の関数  $y = x^2$  のグラフと関数  $y = ax^2$  のグラフと関数  $y = -ax^2$  のグラフとを考える。各実数  $t$  に対して、 $y = ax^2$  のグラフの点  $(t, at^2)$  は  $y = x^2$  のグラフの点  $(t, t^2)$  の  $y$  座標だけを  $a$  倍した点である。 $y = -ax^2$  のグラフの点  $(t, -at^2)$  は  $y = x^2$  のグラフの点  $(t, t^2)$  の  $y$  座標だけを  $-a$  倍した点である。 $y = -ax^2$  のグラフの点  $(t, -at^2)$  は  $y = ax^2$  のグラフの点  $(t, at^2)$  と  $x$  軸に関して対称である。従って、関数  $y = -ax^2$  のグラフは関数  $y = ax^2$  のグラフと  $x$  軸に関して対称である。



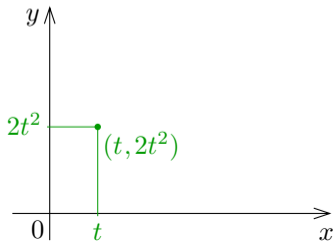
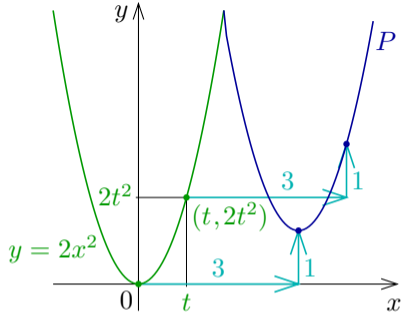
$xy$  座標平面において方程式  $y = ax^2$  が表す図形を放物線という。各放物線には唯一本の対称軸がある。各放物線の対称軸をその放物線の軸という。また、各放物線とその対称軸との共有点をその放物線の頂点という。 $xy$  座標平面において、変数  $x$  の2次関数  $y = ax^2$  のグラフの対称軸は  $y$  軸であり、頂点は原点  $(0,0)$  である。



例  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = 2x^2$  のグラフを  $x$  の軸の向きに 3 だけ  $y$  座標の向きに 1 だけ平行移動させた放物線を  $P$  とおく.



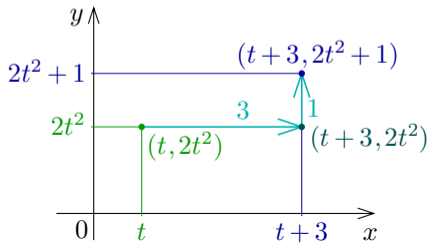
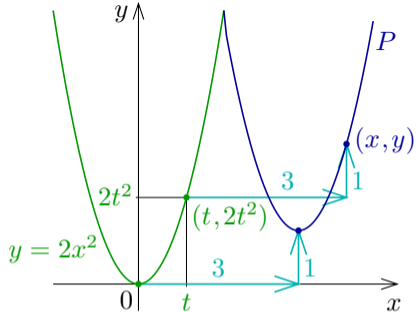
**例**  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = 2x^2$  のグラフを  $x$  の軸の向きに 3 だけ  $y$  座標の向きに 1 だけ平行移動させた放物線を  $P$  とおく.  
 関数  $y = 2x^2$  のグラフの点は,  $x$  座標を  $t$  とおくと,  $y$  座標は  $2t^2$  なので  $(t, 2t^2)$  である.



例  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = 2x^2$  のグラフを  $x$  の軸の向きに 3 だけ  $y$  座標の向きに 1 だけ平行移動させた放物線を  $P$  とおく.

関数  $y = 2x^2$  のグラフの点は,  $x$  座標を  $t$  とおくと,  $y$  座標は  $2t^2$  なので  $(t, 2t^2)$  である.  $P$  の各点  $(x, y)$  は, 元の関数  $y = 2x^2$  のグラフのある点  $(t, 2t^2)$  を  $x$  の軸の向きに 3 だけ  $y$  座標の向きに 1 だけ移動させた点  $(t+3, 2t^2+1)$  である;

$$(x, y) = (t+3, 2t^2+1).$$

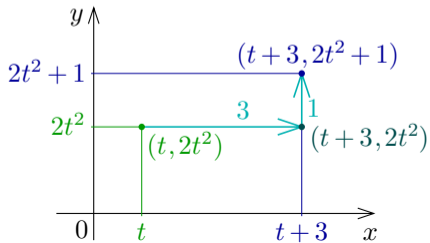
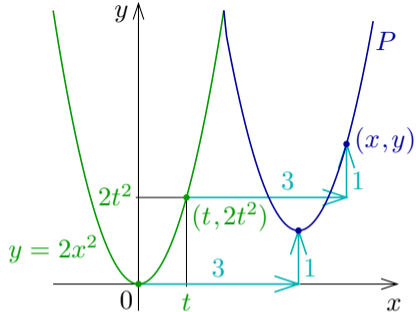


例  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = 2x^2$  のグラフを  $x$  の軸の向きに 3 だけ  $y$  座標の向きに 1 だけ平行移動させた放物線を  $P$  とおく.

関数  $y = 2x^2$  のグラフの点は,  $x$  座標を  $t$  とおくと,  $y$  座標は  $2t^2$  なので  $(t, 2t^2)$  である.  $P$  の各点  $(x, y)$  は, 元の関数  $y = 2x^2$  のグラフのある点  $(t, 2t^2)$  を  $x$  の軸の向きに 3 だけ  $y$  座標の向きに 1 だけ移動させた点  $(t+3, 2t^2+1)$  である;

$$(x, y) = (t+3, 2t^2+1).$$

よって,  $x = t+3$  かつ  $y = 2t^2+1$ .

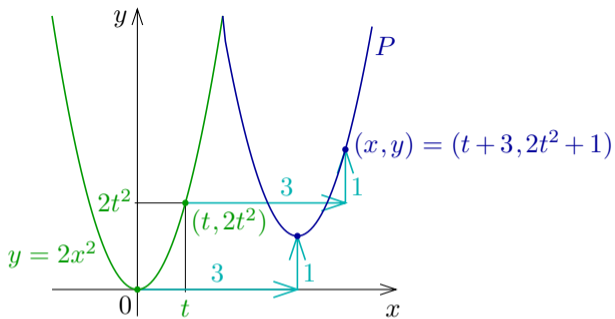


$y = 2x^2$  のグラフを  $x$   
の軸の向きに 3 だけ  $y$   
座標の向きに 1 だけ平  
行移動させた放物線  $P$   
の各点  $(x, y)$  について、  
ある実数  $t$  をとると

$$(x, y) = (t + 3, 2t^2 + 1) .$$

よって

$$x = t + 3 \text{ かつ } y = 2t^2 + 1 .$$



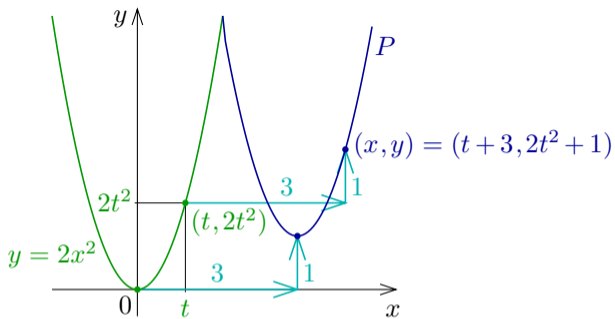
$y = 2x^2$  のグラフを  $x$  の軸の向きに 3 だけ  $y$  座標の向きに 1 だけ平行移動させた放物線  $P$  の各点  $(x, y)$  について、ある実数  $t$  をとると

$$(x, y) = (t + 3, 2t^2 + 1) .$$

よって

$$x = t + 3 \text{ かつ } y = 2t^2 + 1 .$$

$x = t + 3$  より  $t = x - 3$  , これを等式  $y = 2t^2 + 1$  に代入すると  $y = 2(x - 3)^2 + 1$  .



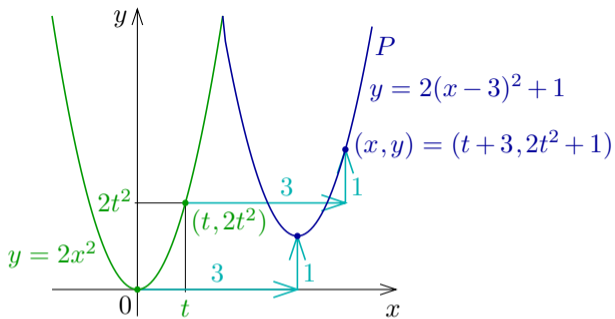
$y = 2x^2$  のグラフを  $x$  の軸の向きに 3 だけ  $y$  座標の向きに 1 だけ平行移動させた放物線  $P$  の各点  $(x, y)$  について、ある実数  $t$  をとると

$$(x, y) = (t + 3, 2t^2 + 1) .$$

よって

$$x = t + 3 \text{ かつ } y = 2t^2 + 1 .$$

$x = t + 3$  より  $t = x - 3$  , これを等式  $y = 2t^2 + 1$  に代入すると  $y = 2(x - 3)^2 + 1$  . 故に、2 次関数  $y = 2x^2$  のグラフを  $x$  の軸の向きに 3 だけ  $y$  座標の向きに 1 だけ平行移動させた放物線  $P$  は関数  $y = 2(x - 3)^2 + 1$  のグラフである.



**例**  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = 3x^2$  のグラフを  $x$  軸の向きに 2 だけ  $y$  軸の向きに  $-5$  だけ平行移動させた放物線  $P$  をグラフとする関数を表す方程式を導く.

例  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = 3x^2$  のグラフを  $x$  軸の向きに 2 だけ  $y$  軸の向きに  $-5$  だけ平行移動させた放物線  $P$  をグラフとする関数を表す方程式を導く. 放物線  $P$  の各点  $(x, y)$  は, 2 次関数  $y = 3x^2$  のグラフの点  $(t, 3t^2)$  ( $t$  はある実数) を  $x$  の軸の向きに 2 だけ  $y$  軸の向きに  $-5$  だけ平行移動させた点  $(t+2, 3t^2-5)$  なので,  $(x, y) = (t+2, 3t^2-5)$ .

例  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = 3x^2$  のグラフを  $x$  軸の向きに 2 だけ  $y$  軸の向きに  $-5$  だけ平行移動させた放物線  $P$  をグラフとする関数を表す方程式を導く. 放物線  $P$  の各点  $(x, y)$  は, 2 次関数  $y = 3x^2$  のグラフの点  $(t, 3t^2)$  ( $t$  はある実数) を  $x$  の軸の向きに 2 だけ  $y$  軸の向きに  $-5$  だけ平行移動させた点  $(t+2, 3t^2-5)$  なので,  $(x, y) = (t+2, 3t^2-5)$ . よって

$$x = t+2 \text{ かつ } y = 3t^2 - 5 .$$

例  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = 3x^2$  のグラフを  $x$  軸の向きに 2 だけ  $y$  軸の向きに  $-5$  だけ平行移動させた放物線  $P$  をグラフとする関数を表す方程式を導く. 放物線  $P$  の各点  $(x, y)$  は, 2 次関数  $y = 3x^2$  のグラフの点  $(t, 3t^2)$  ( $t$  はある実数) を  $x$  の軸の向きに 2 だけ  $y$  軸の向きに  $-5$  だけ平行移動させた点  $(t+2, 3t^2-5)$  なので,  $(x, y) = (t+2, 3t^2-5)$ . よって

$$x = t+2 \text{ かつ } y = 3t^2 - 5 .$$

$x = t+2$  より  $t = x-2$ ; これを  $y = 3t^2 - 5$  に代入すると  $y = 3(x-2)^2 - 5$ , 右辺を降冪の順に整理すると  $y = 3x^2 - 12x + 7$ .

例  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = 3x^2$  のグラフを  $x$  軸の向きに 2 だけ  $y$  軸の向きに  $-5$  だけ平行移動させた放物線  $P$  をグラフとする関数を表す方程式を導く. 放物線  $P$  の各点  $(x, y)$  は, 2 次関数  $y = 3x^2$  のグラフの点  $(t, 3t^2)$  ( $t$  はある実数) を  $x$  の軸の向きに 2 だけ  $y$  軸の向きに  $-5$  だけ平行移動させた点  $(t+2, 3t^2-5)$  なので,  $(x, y) = (t+2, 3t^2-5)$ . よって

$$x = t+2 \text{ かつ } y = 3t^2 - 5 .$$

$x = t+2$  より  $t = x-2$ ; これを  $y = 3t^2 - 5$  に代入すると  $y = 3(x-2)^2 - 5$ , 右辺を降冪の順に整理すると  $y = 3x^2 - 12x + 7$ . 故に  $P$  をグラフとする関数は  $y = 3x^2 - 12x + 7$  である. 終

**問5.8.1**  $xy$  座標平面において変数  $x$  の2次関数  $y = 4x^2$  のグラフを  $x$  の軸の向きに  $-2$  だけ  $y$  軸の向きに  $-3$  だけ平行移動させた放物線  $P$  をグラフとする関数を表わす方程式を導け（導く過程を記せ）.

放物線  $P$  の各点  $(x, y)$  は, 2次関数  $y = 4x^2$  のグラフの点  $(t, \quad)$  ( $t$  はある実数) を  $x$  の軸の向きに  $-2$  だけ  $y$  軸の向きに  $-3$  だけ平行移動させた点  $(\quad, \quad)$  なので,  $(x, y) = (\quad, \quad)$ .  $x = \quad$  より  $t = \quad$  なので,

$$y =$$

故に  $P$  をグラフとする関数は  $y = \quad$  である.

**問5.8.1**  $xy$  座標平面において変数  $x$  の2次関数  $y = 4x^2$  のグラフを  $x$  の軸の向きに  $-2$  だけ  $y$  軸の向きに  $-3$  だけ平行移動させた放物線  $P$  をグラフとする関数を表わす方程式を導け（導く過程を記せ）.

放物線  $P$  の各点  $(x, y)$  は, 2次関数  $y = 4x^2$  のグラフの点  $(t, 4t^2)$  ( $t$  はある実数) を  $x$  の軸の向きに  $-2$  だけ  $y$  軸の向きに  $-3$  だけ平行移動させた点  $(t-2, 4t^2-3)$  なので,  $(x, y) = (t-2, 4t^2-3)$ .  $x = t-2$  より  $t = x+2$  なので,

$$y = 4t^2 - 3 = 4(x+2)^2 - 3 = 4x^2 + 16x + 13 .$$

故に  $P$  をグラフとする関数は  $y = 4x^2 + 16x + 13$  である.

**終**

一般的に述べる. 定数  $a, p, q$  ( $a \neq 0$ ) に対し,  $xy$  座標平面において, 変数  $x$  の関数  $y = ax^2$  のグラフを  $x$  軸の向きに  $-p$  だけ  $y$  軸の向きに  $q$  だけ平行移動させた放物線を  $P$  とおく.

一般的に述べる. 定数  $a, p, q$  ( $a \neq 0$ ) に対し,  $xy$  座標平面において, 変数  $x$  の関数  $y = ax^2$  のグラフを  $x$  軸の向きに  $-p$  だけ  $y$  軸の向きに  $q$  だけ平行移動させた放物線を  $P$  とおく.  $P$  の各点  $(x, y)$  は  $y = ax^2$  のグラフの点  $(t, at^2)$  ( $t$  はある実数) を  $x$  軸の向きに  $-p$  だけ  $y$  軸の向きに  $q$  だけ移動させた点  $(t - p, at^2 + q)$  なので,  $(x, y) = (t + p, at^2 + q)$  .

一般的に述べる. 定数  $a, p, q$  ( $a \neq 0$ ) に対し,  $xy$  座標平面において, 変数  $x$  の関数  $y = ax^2$  のグラフを  $x$  軸の向きに  $-p$  だけ  $y$  軸の向きに  $q$  だけ平行移動させた放物線を  $P$  とおく.  $P$  の各点  $(x, y)$  は  $y = ax^2$  のグラフの点  $(t, at^2)$  ( $t$  はある実数) を  $x$  軸の向きに  $-p$  だけ  $y$  軸の向きに  $q$  だけ移動させた点  $(t - p, at^2 + q)$  なので,  $(x, y) = (t - p, at^2 + q)$ .  $x = t - p$  より  $t = x + p$  なので,

$$y = at^2 + q = a(x + p)^2 + q .$$

一般的に述べる. 定数  $a, p, q$  ( $a \neq 0$ ) に対し,  $xy$  座標平面において, 変数  $x$  の関数  $y = ax^2$  のグラフを  $x$  軸の向きに  $-p$  だけ  $y$  軸の向きに  $q$  だけ平行移動させた放物線を  $P$  とおく.  $P$  の各点  $(x, y)$  は  $y = ax^2$  のグラフの点  $(t, at^2)$  ( $t$  はある実数) を  $x$  軸の向きに  $-p$  だけ  $y$  軸の向きに  $q$  だけ移動させた点  $(t - p, at^2 + q)$  なので,  $(x, y) = (t - p, at^2 + q)$ .  $x = t - p$  より  $t = x + p$  なので,

$$y = at^2 + q = a(x + p)^2 + q .$$

放物線  $P$  は方程式  $y = a(x + p)^2 + q$  で表される.

一般的に述べる. 定数  $a, p, q$  ( $a \neq 0$ ) に対し,  $xy$  座標平面において, 変数  $x$  の関数  $y = ax^2$  のグラフを  $x$  軸の向きに  $-p$  だけ  $y$  軸の向きに  $q$  だけ平行移動させた放物線を  $P$  とおく.  $P$  の各点  $(x, y)$  は  $y = ax^2$  のグラフの点  $(t, at^2)$  ( $t$  はある実数) を  $x$  軸の向きに  $-p$  だけ  $y$  軸の向きに  $q$  だけ移動させた点  $(t - p, at^2 + q)$  なので,  $(x, y) = (t + p, at^2 + q)$ .  $x = t - p$  より  $t = x + p$  なので,

$$y = at^2 + q = a(x + p)^2 + q .$$

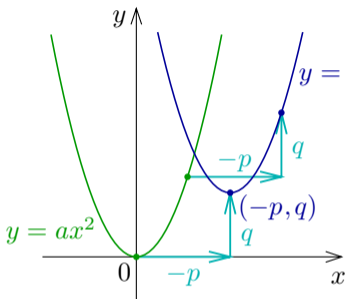
放物線  $P$  は方程式  $y = a(x + p)^2 + q$  で表される. 故に, 変数  $x$  の関数  $y = a(x + p)^2 + q$  のグラフは, 関数  $y = ax^2$  のグラフを  $x$  軸の向きに  $-p$  だけ  $y$  軸の向きに  $q$  だけ平行移動させた放物線である.

一般的に述べる. 定数  $a, p, q$  ( $a \neq 0$ ) に対し,  $xy$  座標平面において, 変数  $x$  の関数  $y = ax^2$  のグラフを  $x$  軸の向きに  $-p$  だけ  $y$  軸の向きに  $q$  だけ平行移動させた放物線を  $P$  とおく.  $P$  の各点  $(x, y)$  は  $y = ax^2$  のグラフの点  $(t, at^2)$  ( $t$  はある実数) を  $x$  軸の向きに  $-p$  だけ  $y$  軸の向きに  $q$  だけ移動させた点  $(t-p, at^2+q)$  なので,  $(x, y) = (t-p, at^2+q)$ .  $x = t-p$  より  $t = x+p$  なので,

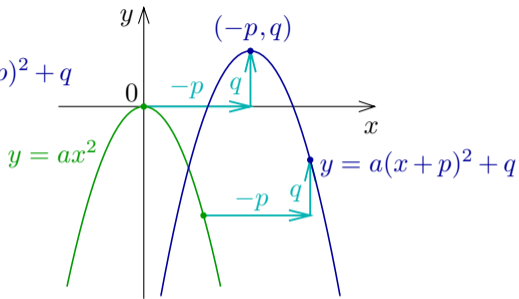
$$y = at^2 + q = a(x+p)^2 + q .$$

放物線  $P$  は方程式  $y = a(x+p)^2 + q$  で表される. 故に, 変数  $x$  の関数  $y = a(x+p)^2 + q$  のグラフは, 関数  $y = ax^2$  のグラフを  $x$  軸の向きに  $-p$  だけ  $y$  軸の向きに  $q$  だけ平行移動させた放物線である. 関数  $y = a(x+p)^2 + q$  のグラフの頂点は, 関数  $y = ax^2$  のグラフの頂点  $(0, 0)$  を  $x$  軸の向きに  $-p$  だけ  $y$  軸の向きに  $q$  だけ平行移動させた点  $(-p, q)$  である.

$xy$  座標平面における  $y = a(x+p)^2 + q$  のグラフは以下ようになる。

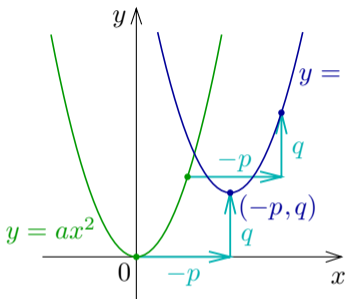


$a > 0$  のとき

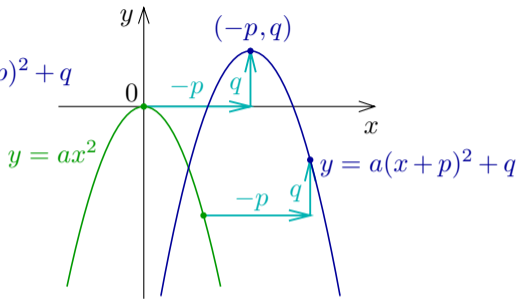


$a < 0$  のとき

$xy$  座標平面における  $y = a(x+p)^2 + q$  のグラフは以下ようになる。



$a > 0$  のとき



$a < 0$  のとき

関数  $y = a(x+p)^2 + q$  のグラフは、関数  $y = ax^2$  のグラフを平行移動させた放物線であり、頂点は  $(-p, q)$  である。

[定理 5.8] 定数  $a, p, q$  ( $a \neq 0$ ) に対し,  $xy$  座標平面において, 変数  $x$  の関数  $y = a(x+p)^2 + q$  のグラフは, 関数  $y = ax^2$  のグラフを, 頂点が  $(-p, q)$  になるように平行移動させた放物線である.

[定理 5.8] 定数  $a, p, q$  ( $a \neq 0$ ) に対し,  $xy$  座標平面において, 変数  $x$  の関数  $y = a(x+p)^2 + q$  のグラフは, 関数  $y = ax^2$  のグラフを, 頂点が  $(-p, q)$  になるように平行移動させた放物線である.

変数  $x$  の 2 次関数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$  は定数で  $a \neq 0$ ) を  $x$  について平方完成された式で表すと  $y = a(x+p) + q$  ( $p, q$  は定数) となる.

[定理 5.8] 定数  $a, p, q$  ( $a \neq 0$ ) に対し,  $xy$  座標平面において, 変数  $x$  の関数  $y = a(x+p)^2 + q$  のグラフは, 関数  $y = ax^2$  のグラフを, 頂点が  $(-p, q)$  になるように平行移動させた放物線である.

変数  $x$  の 2 次関数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$  は定数で  $a \neq 0$ ) を  $x$  について平方完成された式で表すと  $y = a(x+p) + q$  ( $p, q$  は定数) となる.  $xy$  座標平面において,  $y = a(x+p)^2 + q$  のグラフは  $y = ax^2$  のグラフを平行移動させた放物線であるから, 結局,

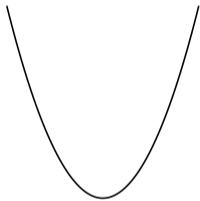
$y = ax^2 + bx + c$  のグラフは  $y = ax^2$  のグラフを平行移動させた放物線である.

[定理 5.8] 定数  $a, p, q$  ( $a \neq 0$ ) に対し,  $xy$  座標平面において, 変数  $x$  の関数  $y = a(x+p)^2 + q$  のグラフは, 関数  $y = ax^2$  のグラフを, 頂点が  $(-p, q)$  になるように平行移動させた放物線である.

変数  $x$  の 2 次関数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$  は定数で  $a \neq 0$ ) を  $x$  について平方完成された式で表すと  $y = a(x+p) + q$  ( $p, q$  は定数) となる.  $xy$  座標平面において,  $y = a(x+p)^2 + q$  のグラフは  $y = ax^2$  のグラフを平行移動させた放物線であるから, 結局,

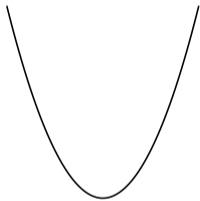
$y = ax^2 + bx + c$  のグラフは  $y = ax^2$  のグラフを平行移動させた放物線である. 故に,  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフの形と向きとは  $a$  の値だけで決まる.

定数  $a$  について  $a > 0$  のとき，変数  $x$  の2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは上に開いた形の放物線になる：この放物線の状態を下に凸という．

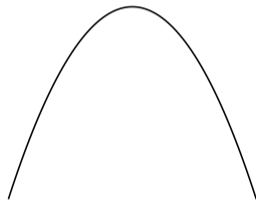


下に凸の放物線

定数  $a$  について  $a > 0$  のとき，変数  $x$  の2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは上に開いた形の放物線になる：この放物線の状態を下に凸という．また，定数  $a$  について  $a < 0$  のとき，変数  $x$  の2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは下に開いた形の放物線になる：この放物線の状態を上凸という．



下に凸の放物線



上に凸の放物線

**例**  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = 2x^2$  のグラフを頂点が  $(-3, 4)$  になるように平行移動させた放物線  $P$  をグラフとする関数を表す方程式を導く.

**例**  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = 2x^2$  のグラフを頂点が  $(-3, 4)$  になるように平行移動させた放物線  $P$  をグラフとする関数を表す方程式を導く. 関数  $y = 2x^2$  のグラフの頂点  $(0, 0)$  が点  $(-3, 4)$  に移動する平行移動で, 各点は  $x$  の軸の向きに  $-3$  だけ  $y$  軸の向きに  $4$  だけ平行移動する.

例  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = 2x^2$  のグラフを頂点が  $(-3, 4)$  になるように平行移動させた放物線  $P$  をグラフとする関数を表す方程式を導く. 関数  $y = 2x^2$  のグラフの頂点  $(0, 0)$  が点  $(-3, 4)$  に移動する平行移動で, 各点は  $x$  の軸の向きに  $-3$  だけ  $y$  軸の向きに  $4$  だけ平行移動する. 放物線  $P$  の各点  $(x, y)$  は, 関数  $y = 2x^2$  のグラフの点  $(t, 2t^2)$  ( $t$  はある実数) を  $x$  の軸の向きに  $-3$  だけ  $y$  軸の向きに  $4$  だけ平行移動させた点  $(t - 3, 2t^2 + 4)$  なので,  $(x, y) = (t - 3, 2t^2 + 4)$ .

例  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = 2x^2$  のグラフを頂点が  $(-3, 4)$  になるように平行移動させた放物線  $P$  をグラフとする関数を表す方程式を導く. 関数  $y = 2x^2$  のグラフの頂点  $(0, 0)$  が点  $(-3, 4)$  に移動する平行移動で, 各点は  $x$  の軸の向きに  $-3$  だけ  $y$  軸の向きに  $4$  だけ平行移動する. 放物線  $P$  の各点  $(x, y)$  は, 関数  $y = 2x^2$  のグラフの点  $(t, 2t^2)$  ( $t$  はある実数) を  $x$  の軸の向きに  $-3$  だけ  $y$  軸の向きに  $4$  だけ平行移動させた点  $(t - 3, 2t^2 + 4)$  なので,  $(x, y) = (t - 3, 2t^2 + 4)$ . よって

$$x = t - 3 \text{ かつ } y = 2t^2 + 4 .$$

例  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = 2x^2$  のグラフを頂点が  $(-3, 4)$  になるように平行移動させた放物線  $P$  をグラフとする関数を表す方程式を導く. 関数  $y = 2x^2$  のグラフの頂点  $(0, 0)$  が点  $(-3, 4)$  に移動する平行移動で, 各点は  $x$  の軸の向きに  $-3$  だけ  $y$  軸の向きに  $4$  だけ平行移動する. 放物線  $P$  の各点  $(x, y)$  は, 関数  $y = 2x^2$  のグラフの点  $(t, 2t^2)$  ( $t$  はある実数) を  $x$  の軸の向きに  $-3$  だけ  $y$  軸の向きに  $4$  だけ平行移動させた点  $(t-3, 2t^2+4)$  なので,  $(x, y) = (t-3, 2t^2+4)$ . よって

$$x = t - 3 \text{ かつ } y = 2t^2 + 4 .$$

$x = t - 3$  より  $t = x + 3$ . これを  $y = 2t^2 + 4$  に代入すると,  $y = 2(x + 3)^2 + 4$ , 右辺を降幂の順に整理すると  $y = 2x^2 + 12x + 22$ .

例  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = 2x^2$  のグラフを頂点が  $(-3, 4)$  になるように平行移動させた放物線  $P$  をグラフとする関数を表す方程式を導く. 関数  $y = 2x^2$  のグラフの頂点  $(0, 0)$  が点  $(-3, 4)$  に移動する平行移動で, 各点は  $x$  の軸の向きに  $-3$  だけ  $y$  軸の向きに  $4$  だけ平行移動する. 放物線  $P$  の各点  $(x, y)$  は, 関数  $y = 2x^2$  のグラフの点  $(t, 2t^2)$  ( $t$  はある実数) を  $x$  の軸の向きに  $-3$  だけ  $y$  軸の向きに  $4$  だけ平行移動させた点  $(t-3, 2t^2+4)$  なので,  $(x, y) = (t-3, 2t^2+4)$ . よって

$$x = t - 3 \text{ かつ } y = 2t^2 + 4 .$$

$x = t - 3$  より  $t = x + 3$ . これを  $y = 2t^2 + 4$  に代入すると,  $y = 2(x+3)^2 + 4$ , 右辺を降幂の順に整理すると  $y = 2x^2 + 12x + 22$ . 故に  $P$  をグラフとする関数は  $y = 2x^2 + 12x + 22$  である. 終

**問5.8.2**  $xy$  座標平面において変数  $x$  の2次関数  $y = 3x^2$  のグラフを頂点が  $(4, 2)$  になるように平行移動させた放物線  $P$  をグラフとする関数を表わす方程式を導け (導く過程を記せ).

関数  $y = 3x^2$  のグラフの頂点  $(0, 0)$  が点  $(4, 2)$  に移動する平行移動で、各点は  $x$  の軸の向きに だけ  $y$  軸の向きに だけ平行移動する. 放物線  $P$  の各点  $(x, y)$  は、関数  $y = 3x^2$  のグラフの点  $(t, \quad)$  ( $t$  はある実数) を  $x$  の軸の向きに だけ  $y$  軸の向きに だけ平行移動させた点  $(\quad, \quad)$  なので、 $(x, y) = (\quad, \quad)$ .  $x = \quad$  なので  $t = \quad$ ; よって  $y = \quad = \quad$ , つまり  $y = \quad$ . 故に  $P$  をグラフとする関数は  $y = \quad$  である.

**問5.8.2**  $xy$  座標平面において変数  $x$  の2次関数  $y = 3x^2$  のグラフを頂点が  $(4, 2)$  になるように平行移動させた放物線  $P$  をグラフとする関数を表わす方程式を導け (導く過程を記せ).

関数  $y = 3x^2$  のグラフの頂点  $(0, 0)$  が点  $(4, 2)$  に移動する平行移動で、各点は  $x$  の軸の向きに 4 だけ  $y$  軸の向きに 2 だけ平行移動する. 放物線  $P$  の各点  $(x, y)$  は、関数  $y = 3x^2$  のグラフの点  $(t, 3t^2)$  ( $t$  はある実数) を  $x$  の軸の向きに 4 だけ  $y$  軸の向きに 2 だけ平行移動させた点  $(t+4, 3t^2+2)$  なので、 $(x, y) = (t+4, 3t^2+2)$ .  $x = t+4$  なので  $t = x-4$ ; よって  $y = 3t^2 + 2 = 3(x-4)^2 + 2$ , つまり  $y = 3x^2 - 24x + 50$ . 故に  $P$  をグラフとする関数は  $y = 3x^2 - 24x + 50$  である. 終

座標平面において関数のグラフを描くときは，できるだけそのグラフと座標軸の共有点の座標を求めること．

**例**  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く.

**例**  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く. 2 次関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  を  $x$  について平方完成された式で表す:

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x) - 6 \\&= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 6 = 2(x - 1)^2 - 2 - 6 \\&= 2(x - 1)^2 - 8 .\end{aligned}$$

例  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く. 2次関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  を  $x$  について平方完成された式で表す:

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x) - 6 \\&= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 6 = 2(x - 1)^2 - 2 - 6 \\&= 2(x - 1)^2 - 8 .\end{aligned}$$

関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  のグラフの頂点は  $(1, -8)$  である.

例  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く. 2次関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  を  $x$  について平方完成された式で表す:

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x) - 6 \\&= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 6 = 2(x - 1)^2 - 2 - 6 \\&= 2(x - 1)^2 - 8 .\end{aligned}$$

関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  のグラフの頂点は  $(1, -8)$  である. 関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  について、 $y = 0$  とすると、 $2x^2 - 4x - 6 = 0$  ,  
 $x^2 - 2x - 3 = 0$  ,  $(x + 1)(x - 3) = 0$  ,  
 $x = -1, 3$  .

例  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く. 2次関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  を  $x$  について平方完成された式で表す:

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x) - 6 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 6 = 2(x - 1)^2 - 2 - 6 \\ &= 2(x - 1)^2 - 8 .\end{aligned}$$

関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  のグラフの頂点は  $(1, -8)$  である. 関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  について、 $y = 0$  とすると、 $2x^2 - 4x - 6 = 0$  ,  
 $x^2 - 2x - 3 = 0$  ,  $(x + 1)(x - 3) = 0$  ,  
 $x = -1, 3$  .  $y = 2x^2 - 4x - 6$  のグラフと  $x$  軸との共有点は  $(-1, 0)$  と  $(3, 0)$  とである.

例  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く. 2次関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  を  $x$  について平方完成された式で表す:

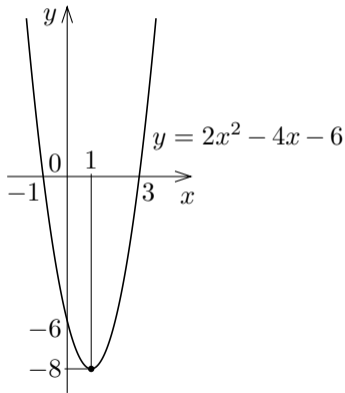
$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x) - 6 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 6 = 2(x - 1)^2 - 2 - 6 \\ &= 2(x - 1)^2 - 8 .\end{aligned}$$

関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  のグラフの頂点は  $(1, -8)$  である. 関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  について、 $y = 0$  とすると、 $2x^2 - 4x - 6 = 0$  ,  
 $x^2 - 2x - 3 = 0$  ,  $(x + 1)(x - 3) = 0$  ,  
 $x = -1, 3$  .  $y = 2x^2 - 4x - 6$  のグラフと  $x$  軸との共有点は  $(-1, 0)$  と  $(3, 0)$  とである.  $x = 0$  とすると  $y = -6$  なので、  
 $y = 2x^2 - 4x - 6$  のグラフと  $y$  軸との共有点は  $(0, -6)$  である.

例  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く. 2次関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  を  $x$  について平方完成された式で表す:

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x) - 6 \\&= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 6 = 2(x - 1)^2 - 2 - 6 \\&= 2(x - 1)^2 - 8.\end{aligned}$$

関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  のグラフの頂点は  $(1, -8)$  である. 関数  $y = 2x^2 - 4x - 6$  について,  $y = 0$  とすると,  $2x^2 - 4x - 6 = 0$ ,  $x^2 - 2x - 3 = 0$ ,  $(x + 1)(x - 3) = 0$ ,  $x = -1, 3$ .  $y = 2x^2 - 4x - 6$  のグラフと  $x$  軸との共有点は  $(-1, 0)$  と  $(3, 0)$  とである.  $x = 0$  とすると  $y = -6$  なので,  $y = 2x^2 - 4x - 6$  のグラフと  $y$  軸との共有点は  $(0, -6)$  である.



**問5.8.3**  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = 2x^2 - 8x + \frac{7}{2}$  のグラフの

頂点を求めてグラフの概形を描け.

関数  $y = 2x^2 - 8x + \frac{7}{2}$  について,

$$y = 2x^2 - 8x + \frac{7}{2} =$$

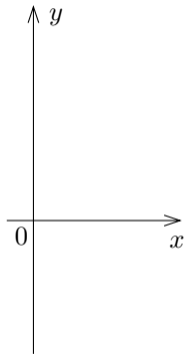
グラフの頂点の座標は  $( \quad , \quad )$  である.

$y = 0$  とすると、 $x^2 - 4x + \frac{7}{4} = 0$  なので

$$x =$$

グラフと  $x$  軸との共有点は  $( \quad , 0 )$  と  $( \quad , 0 )$  とである.  $x = 0$  とすると

$y = \quad$  なので、グラフと  $y$  軸との共有点は  $( 0, \quad )$  である.



**問5.8.3**  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = 2x^2 - 8x + \frac{7}{2}$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描け。

関数  $y = 2x^2 - 8x + \frac{7}{2}$  について、

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 8x + \frac{7}{2} = 2(x^2 - 4x + 4) - 8 + \frac{7}{2} \\ &= 2(x - 2)^2 - \frac{9}{2} .\end{aligned}$$

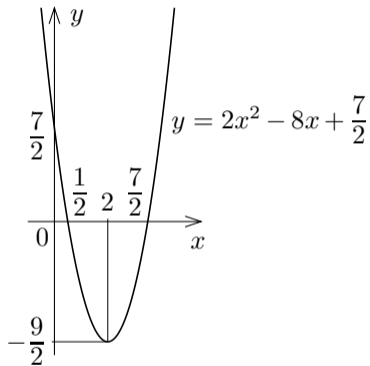
グラフの頂点の座標は  $(2, -\frac{9}{2})$  である。

$y = 0$  とすると、 $x^2 - 4x + \frac{7}{4} = 0$  なので

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 7}}{2} = \frac{4 \pm 3}{2} = \frac{1}{2}, \frac{7}{2} .$$

グラフと  $x$  軸との共有点は  $(\frac{1}{2}, 0)$  と  $(\frac{7}{2}, 0)$  とである。  $x = 0$  とすると

$y = \frac{7}{2}$  なので、グラフと  $y$  軸との共有点は  $(0, \frac{7}{2})$  である。



終

例  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く.

例  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く．2次関数  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$  を  $x$  について平方完成された式で表す：

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6 = \frac{1}{2}(x^2 + 6x) + 6 \\&= \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9 - 9) + 6 = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - \frac{9}{2} + 6 \\&= \frac{1}{2}(x + 3)^2 + \frac{3}{2} .\end{aligned}$$

例  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く。2次関数  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$  を  $x$  について平方完成された式で表す：

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6 = \frac{1}{2}(x^2 + 6x) + 6 \\&= \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9 - 9) + 6 = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - \frac{9}{2} + 6 \\&= \frac{1}{2}(x + 3)^2 + \frac{3}{2} .\end{aligned}$$

関数  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$  のグラフの頂点は  $\left(-3, \frac{3}{2}\right)$  である。

関数  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$  について、グラ

フの頂点は  $(-3, \frac{3}{2})$  である.

関数  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$  について、グラフの頂点は  $(-3, \frac{3}{2})$  である。各実数  $x$  について、

$$y = \frac{1}{2}(x+3)^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2} > 0 .$$

関数  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$  について、グラフの頂点は  $(-3, \frac{3}{2})$  である。各実数  $x$  について、

$$y = \frac{1}{2}(x+3)^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2} > 0 .$$

従って  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$  のグラフと  $x$  軸との共有点はない。

関数  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$  について、グラフの頂点は  $(-3, \frac{3}{2})$  である。各実数  $x$  について、

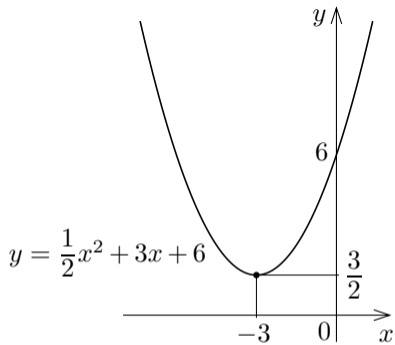
$$y = \frac{1}{2}(x+3)^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2} > 0 .$$

従って  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$  のグラフと  $x$  軸との共有点は無い。  $x = 0$  のとき  $y = 6$  なので、  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$  のグラフと  $y$  軸との共有点は  $(0, 6)$  である。

関数  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$  について、グラフの頂点は  $(-3, \frac{3}{2})$  である. 各実数  $x$  について,

$$y = \frac{1}{2}(x+3)^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2} > 0 .$$

従って  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$  のグラフと  $x$  軸との共有点は無い.  $x = 0$  のとき  $y = 6$  なので,  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$  のグラフと  $y$  軸との共有点は  $(0, 6)$  である.



終

**問5.8.4**  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 7$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描け.

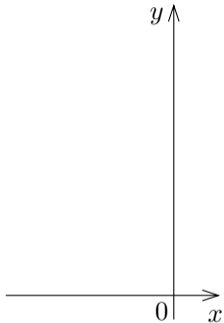
関数  $y = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 7$  について、

$$y = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 7 =$$

グラフの頂点の座標は ( , ) である. 各実数  $x$  について

$$y = \quad \geq \quad > \quad .$$

従ってグラフと  $x$  軸との共有点は無い.  $x = 0$  とすると  $y =$  なので、グラフと  $y$  軸との共有点は (0, ) である.



**問5.8.4**  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 7$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描け。

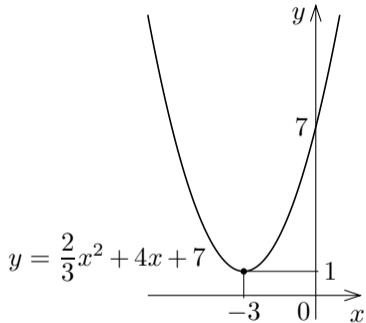
関数  $y = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 7$  について、

$$\begin{aligned}y &= \frac{2}{3}x^2 + 4x + 7 = \frac{2}{3}(x^2 + 6x) + 7 \\&= \frac{2}{3}(x^2 + 6x + 9 - 9) + 7 = \frac{2}{3}(x + 3)^2 - 6 + 7 \\&= \frac{2}{3}(x + 3)^2 + 1 .\end{aligned}$$

グラフの頂点の座標は  $(-3, 1)$  である。各実数  $x$  について

$$y = \frac{2}{3}(x + 3)^2 + 1 \geq 1 > 0 .$$

従ってグラフと  $x$  軸との共有点はない。  $x = 0$  とすると  $y = 7$  なので、グラフと  $y$  軸との共有点は  $(0, 7)$  である。



**例**  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = -x^2 + 4x - 4$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く.

**例**  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = -x^2 + 4x - 4$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く. 2 次関数  $y = -x^2 + 4x - 4$  を  $x$  について平方完成された式で表す:

$$\begin{aligned}y &= -x^2 + 4x - 4 = -(x^2 - 4x) - 4 \\&= -(x^2 - 4x + 4 - 4) - 4 \\&= -(x - 2)^2 + 4 - 4 \\&= -(x - 2)^2 .\end{aligned}$$

**例**  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = -x^2 + 4x - 4$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く. 2 次関数  $y = -x^2 + 4x - 4$  を  $x$  について平方完成された式で表す:

$$\begin{aligned}y &= -x^2 + 4x - 4 = -(x^2 - 4x) - 4 \\&= -(x^2 - 4x + 4 - 4) - 4 \\&= -(x - 2)^2 + 4 - 4 \\&= -(x - 2)^2 .\end{aligned}$$

関数  $y = -x^2 + 4x - 4$  のグラフの頂点は  $(2, 0)$  である.

**例**  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = -x^2 + 4x - 4$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く. 2次関数  $y = -x^2 + 4x - 4$  を  $x$  について平方完成された式で表す:

$$\begin{aligned}y &= -x^2 + 4x - 4 = -(x^2 - 4x) - 4 \\&= -(x^2 - 4x + 4 - 4) - 4 \\&= -(x - 2)^2 + 4 - 4 \\&= -(x - 2)^2 .\end{aligned}$$

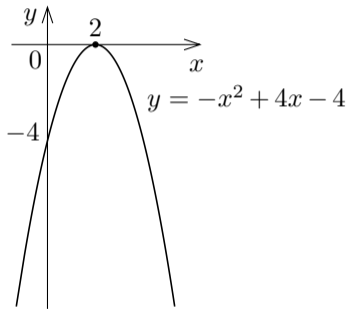
関数  $y = -x^2 + 4x - 4$  のグラフの頂点は  $(2, 0)$  である. 関数  $y = -x^2 + 4x - 4$  について、 $y = 0$  とすると、 $-x^2 + 4x - 4 = 0$  ,  
 $x^2 - 4x + 4 = 0$  ,  $(x - 2)^2 = 0$  ,  $x = 2$  . グラフと  $x$  軸との共有点は  $(2, 0)$  である.

例  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = -x^2 + 4x - 4$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描く. 2次関数  $y = -x^2 + 4x - 4$  を  $x$  について平方完成された式で表す:

$$\begin{aligned}y &= -x^2 + 4x - 4 = -(x^2 - 4x) - 4 \\&= -(x^2 - 4x + 4 - 4) - 4 \\&= -(x - 2)^2 + 4 - 4 \\&= -(x - 2)^2 .\end{aligned}$$

関数  $y = -x^2 + 4x - 4$  のグラフの頂点は  $(2, 0)$  である. 関数  $y = -x^2 + 4x - 4$  について、 $y = 0$  とすると、 $-x^2 + 4x - 4 = 0$  ,  $x^2 - 4x + 4 = 0$  ,  $(x - 2)^2 = 0$  ,  $x = 2$  . グ

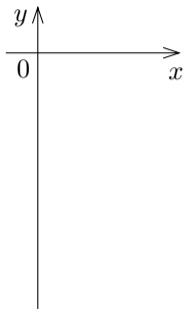
ラフと  $x$  軸との共有点は  $(2, 0)$  である.  $x = 0$  とすると  $y = -4$  なので、グラフと  $y$  軸との共有点は  $(0, -4)$  である.



**問5.8.5**  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = -2x^2 + 6x - \frac{9}{2}$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描け.

関数  $y = -2x^2 + 6x - \frac{9}{2}$  について、

$$y = -2x^2 + 6x - \frac{9}{2}$$



グラフの頂点は  $( \quad , \quad )$  である.  $y = 0$  のとき

$\quad = 0$  なので  $x = \quad$ . グラフと  $x$  軸との共有点は  $( \quad , 0 )$  である.

また、 $x = 0$  のとき  $y = \quad$  なので、グラフと  $y$  軸との共有点は  $( 0, \quad )$  である.

**問5.8.5**  $xy$  座標平面において、変数  $x$  の関数  $y = -2x^2 + 6x - \frac{9}{2}$  のグラフの頂点を求めてグラフの概形を描け。

関数  $y = -2x^2 + 6x - \frac{9}{2}$  について、

$$y = -2x^2 + 6x - \frac{9}{2} = -2(x^2 - 3x) - \frac{9}{2}$$

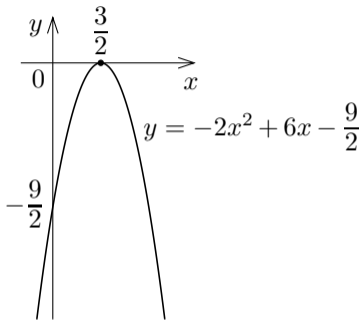
$$= -2\left\{x^2 - 2\frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right\} - \frac{9}{2}$$

$$= -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2.$$

グラフの頂点は  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$  である。  $y = 0$  のとき

$-2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$  なので  $x = \frac{3}{2}$  . グラフと  $x$  軸との共有点は  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$  である。

また、  $x = 0$  のとき  $y = -\frac{9}{2}$  なので、グラフと  $y$  軸との共有点は  $\left(0, -\frac{9}{2}\right)$  である。



定理 5.8 より次のことが成り立ちます：定数  $a, p, q$  ( $a \neq 0$ ) に対して,  $xy$  座標平面において, 関数  $y = ax^2$  のグラフを点  $(p, q)$  が頂点となるように平行移動させた放物線は, 関数  $y = a(x - p)^2 + q$  のグラフである.

**例** 変数  $x$  の 2 次関数  $y = f(x)$  について,  $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = 3x^2$  のグラフを平行移動させた放物線であり, その頂点は  $(2, 4)$  であるとする.  $f(x)$  の値を表す  $x$  の 2 次式を求める (降幂の順に整理する).

**例** 変数  $x$  の 2 次関数  $y = f(x)$  について,  $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = 3x^2$  のグラフを平行移動させた放物線であり, その頂点は  $(2, 4)$  であるとする.  $f(x)$  の値を表す  $x$  の 2 次式を求める (降幂の順に整理する). 2 次関数  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = 3x^2$  のグラフを平行移動させた放物線で, その頂点が  $(2, 4)$  なので,  $f(x) = 3(x - 2)^2 + 4$  ;

**例** 変数  $x$  の 2 次関数  $y = f(x)$  について,  $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = 3x^2$  のグラフを平行移動させた放物線であり, その頂点は  $(2, 4)$  であるとする.  $f(x)$  の値を表す  $x$  の 2 次式を求める (降幂の順に整理する). 2 次関数  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = 3x^2$  のグラフを平行移動させた放物線で, その頂点が  $(2, 4)$  なので,  $f(x) = 3(x - 2)^2 + 4$  ; 右辺を降幂の順に整理すると  $f(x) = 3x^2 - 12x + 16$  .

**終**

**問5.8.6** 変数  $x$  の 2 次関数  $y = f(x)$  について、 $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = \frac{1}{2}x^2$  のグラフを平行移動させた放物線であり、その頂点は  $(-4, 3)$  であるとする。  $f(x)$  の値を表す  $x$  の 2 次式を求めよ（降冪の順に整理せよ）。

関数  $y = f(x)$  のグラフは、関数  $y =$  \_\_\_\_\_ のグラフを平行移動させた放物線で、頂点は  $(-4, 3)$  なので、  $f(x) =$  \_\_\_\_\_ , つまり

$f(x) =$  \_\_\_\_\_ .

**問5.8.6** 変数  $x$  の2次関数  $y = f(x)$  について、 $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = \frac{1}{2}x^2$  のグラフを平行移動させた放物線であり、その頂点は  $(-4, 3)$  であるとする。  $f(x)$  の値を表す  $x$  の2次式を求めよ（降冪の順に整理せよ）。

関数  $y = f(x)$  のグラフは、関数  $y = \frac{1}{2}x^2$  のグラフを平行移動させた放物線で、頂点は  $(-4, 3)$  なので、  $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)^2 + 3$  ，つまり

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 11 .$$

終

**例** 変数  $x$  の 2 次関数  $y = f(x)$  について,  $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは点  $(2, -5)$  を頂点とする放物線であり, 点  $(6, 7)$  が  $y = f(x)$  のグラフに属すとする.  $f(x)$  の値を表す  $x$  の 2 次式を求める (降幂の順に整理する).

**例** 変数  $x$  の 2 次関数  $y = f(x)$  について,  $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは点  $(2, -5)$  を頂点とする放物線であり, 点  $(6, 7)$  が  $y = f(x)$  のグラフに属すとする.  $f(x)$  の値を表す  $x$  の 2 次式を求める (降幂の順に整理する). 2 次関数  $y = f(x)$  のグラフは点  $(2, -5)$  を頂点とする放物線なので, ある定数  $a$  をとると  $y = a(x - 2)^2 - 5$ .

**例** 変数  $x$  の 2 次関数  $y = f(x)$  について,  $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは点  $(2, -5)$  を頂点とする放物線であり, 点  $(6, 7)$  が  $y = f(x)$  のグラフに属すとする.  $f(x)$  の値を表す  $x$  の 2 次式を求める (降冪の順に整理する). 2 次関数  $y = f(x)$  のグラフは点  $(2, -5)$  を頂点とする放物線なので, ある定数  $a$  をとると  $y = a(x - 2)^2 - 5$ . 点  $(6, 7)$  が関数  $y = a(x - 2)^2 - 5$  のグラフに属すので,  $7 = a(6 - 2)^2 - 5$ ,  $16a = 12$ ,  $a = \frac{3}{4}$ .

**例** 変数  $x$  の 2 次関数  $y = f(x)$  について、 $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは点  $(2, -5)$  を頂点とする放物線であり、点  $(6, 7)$  が  $y = f(x)$  のグラフに属すとする。  $f(x)$  の値を表す  $x$  の 2 次式を求める（降幂の順に整理する）。 2 次関数  $y = f(x)$  のグラフは点  $(2, -5)$  を頂点とする放物線なので、ある定数  $a$  をとると  $y = a(x - 2)^2 - 5$  . 点  $(6, 7)$  が関数  $y = a(x - 2)^2 - 5$  のグラフに属すので、  $7 = a(6 - 2)^2 - 5$  ,  $16a = 12$  ,  $a = \frac{3}{4}$  . よって

$$f(x) = \frac{3}{4}(x - 2)^2 - 5 \quad \text{つまり} \quad f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x - 1 .$$

**終**

**問5.8.7** 変数  $x$  の 2 次関数  $y = f(x)$  について,  $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは点  $(6, -11)$  を頂点とする放物線であり, 点  $(3, -5)$  が  $y = f(x)$  のグラフに属すとする.  $f(x)$  の値を表す  $x$  の 2 次式を求めよ (降冪の順に整理せよ).

2 次関数  $y = f(x)$  のグラフは点  $(6, -11)$  を頂点とする放物線なので, ある定数  $a$  をとると  $f(x) = a(\quad)^2$  . 点  $(3, -5)$  が  $y = a(\quad)^2$  のグラフに属すので,  $\quad = \quad$  ,  $a = \quad$  ,  $a = \quad$  . よって  $f(x) = (\quad)^2$  つまり  $f(x) = \quad$  .

**問5.8.7** 変数  $x$  の 2 次関数  $y = f(x)$  について,  $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは点  $(6, -11)$  を頂点とする放物線であり, 点  $(3, -5)$  が  $y = f(x)$  のグラフに属すとする.  $f(x)$  の値を表す  $x$  の 2 次式を求めよ (降冪の順に整理せよ).

2 次関数  $y = f(x)$  のグラフは点  $(6, -11)$  を頂点とする放物線なので, ある定数  $a$  をとると  $f(x) = a(x - 6)^2 - 11$ . 点  $(3, -5)$  が  $y = a(x - 6)^2 - 11$  のグラフに属すので,  $-5 = a(3 - 6)^2 - 11$ ,  $9a = 6$ ,  $a = \frac{2}{3}$ . よって

$$f(x) = \frac{2}{3}(x - 6)^2 - 11 \quad \text{つまり} \quad f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 8x + 13 .$$

終

定数  $a, b, c$  ( $a \neq 0$ ) に対して,  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは関数  $y = ax^2$  のグラフを平行移動させた放物線であった.

定数  $a, b, c$  ( $a \neq 0$ ) に対して,  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは関数  $y = ax^2$  のグラフを平行移動させた放物線であった.

**例** 変数  $x$  の 2 次関数  $y = f(x)$  について,  $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = 4x^2$  のグラフを平行移動させた放物線であり, 点  $(2, -5)$  と  $(3, 6)$  とが  $y = f(x)$  のグラフに属すとする.  $f(x)$  の値を表す  $x$  の 2 次式を求める (降冪の順に整理する).

定数  $a, b, c$  ( $a \neq 0$ ) に対して,  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは関数  $y = ax^2$  のグラフを平行移動させた放物線であった.

**例** 変数  $x$  の 2 次関数  $y = f(x)$  について,  $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = 4x^2$  のグラフを平行移動させた放物線であり, 点  $(2, -5)$  と  $(3, 6)$  とが  $y = f(x)$  のグラフに属すとする.  $f(x)$  の値を表す  $x$  の 2 次式を求める (降冪の順に整理する). 関数  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = 4x^2$  のグラフを平行移動させた放物線なので, ある定数  $b, c$  をとると  $f(x) = 4x^2 + bx + c$ .

定数  $a, b, c$  ( $a \neq 0$ ) に対して,  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは関数  $y = ax^2$  のグラフを平行移動させた放物線であった.

**例** 変数  $x$  の 2 次関数  $y = f(x)$  について,  $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = 4x^2$  のグラフを平行移動させた放物線であり, 点  $(2, -5)$  と  $(3, 6)$  とが  $y = f(x)$  のグラフに属すとする.  $f(x)$  の値を表す  $x$  の 2 次式を求める (降冪の順に整理する). 関数  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = 4x^2$  のグラフを平行移動させた放物線なので, ある定数  $b, c$  をとると  $f(x) = 4x^2 + bx + c$ . 点  $(2, -5)$  が関数  $y = 4x^2 + bx + c$  のグラフに属すので,  $-5 = 4 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$  よって  $2b + c = -21$ .

定数  $a, b, c$  ( $a \neq 0$ ) に対して,  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは関数  $y = ax^2$  のグラフを平行移動させた放物線であった.

**例** 変数  $x$  の 2 次関数  $y = f(x)$  について,  $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = 4x^2$  のグラフを平行移動させた放物線であり, 点  $(2, -5)$  と  $(3, 6)$  とが  $y = f(x)$  のグラフに属すとする.  $f(x)$  の値を表す  $x$  の 2 次式を求める (降幂の順に整理する). 関数  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = 4x^2$  のグラフを平行移動させた放物線なので, ある定数  $b, c$  をとると  $f(x) = 4x^2 + bx + c$ . 点  $(2, -5)$  が関数  $y = 4x^2 + bx + c$  のグラフに属するので,  $-5 = 4 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$  よって  $2b + c = -21$ . 点  $(3, 6)$  が関数  $y = 4x^2 + bx + c$  のグラフに属するので,  $6 = 4 \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$  よって  $3b + c = -30$ .

定数  $a, b, c$  ( $a \neq 0$ ) に対して,  $xy$  座標平面において変数  $x$  の 2 次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは関数  $y = ax^2$  のグラフを平行移動させた放物線であった.

**例** 変数  $x$  の 2 次関数  $y = f(x)$  について,  $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = 4x^2$  のグラフを平行移動させた放物線であり, 点  $(2, -5)$  と  $(3, 6)$  とが  $y = f(x)$  のグラフに属すとする.  $f(x)$  の値を表す  $x$  の 2 次式を求める (降冪の順に整理する). 関数  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = 4x^2$  のグラフを平行移動させた放物線なので, ある定数  $b, c$  をとると  $f(x) = 4x^2 + bx + c$ . 点  $(2, -5)$  が関数  $y = 4x^2 + bx + c$  のグラフに属すので,  $-5 = 4 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$  よって  $2b + c = -21$ . 点  $(3, 6)$  が関数  $y = 4x^2 + bx + c$  のグラフに属すので,  $6 = 4 \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$  よって  $3b + c = -30$ . これらの方程式より,  $b = -9$  かつ  $c = -3$ .  $f(x) = 4x^2 + bx + c$  なので,  $f(x) = 4x^2 - 9x - 3$ .

終

**問5.8.8** 変数  $x$  の2次関数  $y = f(x)$  について、 $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = \frac{3}{4}x^2$  のグラフを平行移動させた放物線で、点  $(4,1)$  と  $(6,8)$  とが  $y = f(x)$  のグラフに属すとする． $f(x)$  の値を表す  $x$  の2次式を求めよ（降幂の順に整理せよ）．

関数  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = \frac{3}{4}x^2$  のグラフを平行移動させた放物線なので、ある定数  $b, c$  をとると  $f(x) = x^2 + bx + c$  . 点  $(4,1)$  が

関数  $y = x^2 + bx + c$  のグラフに属すので、 $\quad = \quad$  よって

$= \quad$  . 点  $(6,8)$  が関数  $y = x^2 + bx + c$  のグラフに属すので、

$= \quad$  よって  $= \quad$  . これらの方程式より、 $b = \quad$  か

つ  $c = \quad$  .  $f(x) = x^2 + bx + c$  なので、 $f(x) = \quad$  .

**問5.8.8** 変数  $x$  の2次関数  $y = f(x)$  について、 $xy$  座標平面において  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = \frac{3}{4}x^2$  のグラフを平行移動させた放物線で、点  $(4,1)$  と  $(6,8)$  とが  $y = f(x)$  のグラフに属すとする。  $f(x)$  の値を表す  $x$  の2次式を求めよ（降幂の順に整理せよ）。

関数  $y = f(x)$  のグラフは関数  $y = \frac{3}{4}x^2$  のグラフを平行移動させた放物線なので、ある定数  $b, c$  をとると  $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + bx + c$  . 点  $(4,1)$  が関数  $y = \frac{3}{4}x^2 + bx + c$  のグラフに属すので、  $1 = \frac{3}{4} \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$  よって  $4b + c = -11$  . 点  $(6,8)$  が関数  $y = \frac{3}{4}x^2 + bx + c$  のグラフに属すので、  $8 = \frac{3}{4} \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c$  よって  $6b + c = -19$  . これらの方程式より、  $b = -4$  かつ  $c = 5$  .  $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + bx + c$  なので、  $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 4x + 5$  . □