

5.7 2次式の平方完成

変数 x の 2 次式の平方完成とは、 x の 2 次式を次の形に変形することである：

$$a(x+p)^2 + q \quad (a, p, q \text{ は定数で } a \neq 0).$$

変数 x の 2 次式の平方完成とは、 x の 2 次式を次の形に変形することである：

$$a(x+p)^2 + q \quad (a, p, q \text{ は定数で } a \neq 0) .$$

平方完成では次のような変形が重要になる： $x^2 + 2 \cdot \frac{\square}{2}x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\square}{2}\right)^2$
なので、 $x^2 + 2ax + a^2 = (x + 2)^2$

変数 x の 2 次式の平方完成とは、 x の 2 次式を次の形に変形することである：

$$a(x+p)^2 + q \quad (a, p, q \text{ は定数で } a \neq 0) .$$

平方完成では次のような変形が重要になる： $x^2 + 2 \cdot \frac{\square}{2}x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\square}{2}\right)^2$ なので、

$$\begin{aligned} x^2 + \square x &= x^2 + 2 \cdot \frac{\square}{2}x = x^2 + 2 \cdot \frac{\square}{2}x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 - \left(\frac{\square}{2}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{\square}{2}\right)^2 - \frac{\square^2}{4} . \end{aligned}$$

変数 x の 2 次式の平方完成とは、 x の 2 次式を次の形に変形することである：

$$a(x+p)^2 + q \quad (a, p, q \text{ は定数で } a \neq 0) .$$

平方完成では次のような変形が重要になる： $x^2 + 2 \cdot \frac{\square}{2}x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\square}{2}\right)^2$ なので、

$$\begin{aligned} x^2 + \square x &= x^2 + 2 \cdot \frac{\square}{2}x = x^2 + 2 \cdot \frac{\square}{2}x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 - \left(\frac{\square}{2}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{\square}{2}\right)^2 - \frac{\square^2}{4} . \end{aligned}$$

x の係数 \square の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{\square}{2}\right)^2$ を足して引くことが肝である。

例 変数 x の 2 次式 $2x^2 + 6x + 5$ を平方完成する.

例 変数 x の 2 次式 $2x^2 + 6x + 5$ を平方完成する． $2x^2 + 6x$ の部分を x^2 の係数 2 で括る：

$$2x^2 + 6x + 5 = 2(x^2 + 3x) + 5 .$$

例 変数 x の 2 次式 $2x^2 + 6x + 5$ を平方完成する. $2x^2 + 6x$ の部分を x^2 の係数 2 で括る:

$$2x^2 + 6x + 5 = 2(x^2 + 3x) + 5 .$$

括弧 () の中の 2 次式 $x^2 + 3x$ について, x の係数 3 の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ を足して引く.

例 変数 x の 2 次式 $2x^2 + 6x + 5$ を平方完成する. $2x^2 + 6x$ の部分を x^2 の係数 2 で括る:

$$2x^2 + 6x + 5 = 2(x^2 + 3x) + 5 .$$

括弧 () の中の 2 次式 $x^2 + 3x$ について, x の係数 3 の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ を足して引く. $x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ なので,

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

例 変数 x の 2 次式 $2x^2 + 6x + 5$ を平方完成する. $2x^2 + 6x$ の部分を x^2 の係数 2 で括る:

$$2x^2 + 6x + 5 = 2(x^2 + 3x) + 5 .$$

括弧 () の中の 2 次式 $x^2 + 3x$ について, x の係数 3 の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ を足して引く. $x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ なので,

$$x^2 + 3x = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3^2}{2^2} .$$

例 変数 x の 2 次式 $2x^2 + 6x + 5$ を平方完成する. $2x^2 + 6x$ の部分を x^2 の係数 2 で括る:

$$2x^2 + 6x + 5 = 2(x^2 + 3x) + 5 .$$

括弧 () の中の 2 次式 $x^2 + 3x$ について, x の係数 3 の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ を足して引く. $x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ なので,

$$x^2 + 3x = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3^2}{2^2} .$$

よって

$$2x^2 + 6x + 5 = 2(x^2 + 3x) + 5 = 2\left\{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3^2}{2^2}\right\} + 5$$

例 変数 x の 2 次式 $2x^2 + 6x + 5$ を平方完成する. $2x^2 + 6x$ の部分を x^2 の係数 2 で括る:

$$2x^2 + 6x + 5 = 2(x^2 + 3x) + 5 .$$

括弧 () の中の 2 次式 $x^2 + 3x$ について, x の係数 3 の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ を足して引く. $x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ なので,

$$x^2 + 3x = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3^2}{2^2} .$$

よって

$$\begin{aligned} 2x^2 + 6x + 5 &= 2(x^2 + 3x) + 5 = 2\left\{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3^2}{2^2}\right\} + 5 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \boxed{2} \cdot \frac{3^2}{2^2} + 5 \\ &= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

2 を掛けることを忘れないこと.

例 変数 x の 2 次式 $2x^2 + 6x + 5$ を平方完成する. $2x^2 + 6x$ の部分を x^2 の係数 2 で括る:

$$2x^2 + 6x + 5 = 2(x^2 + 3x) + 5.$$

括弧 () の中の 2 次式 $x^2 + 3x$ について, x の係数 3 の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ を足して引く. $x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ なので,

$$x^2 + 3x = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3^2}{2^2}.$$

よって

$$\begin{aligned} 2x^2 + 6x + 5 &= 2(x^2 + 3x) + 5 = 2\left\{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3^2}{2^2}\right\} + 5 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3^2}{2^2} + 5 \\ &= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

x の 2 次式 $2x^2 + 6x + 5$ を平方完成すると $2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ である.

x に関する 2 次方程式 $2x^2 + 6x + 5 = 0$ を解く際には,

両辺を 2 で割って $x^2 + 3x + \frac{5}{2} = 0$,

両辺から $\frac{5}{2}$ を引いて $x^2 + 3x = -\frac{5}{2}$,

両辺に $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ を足して $x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}$, $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$,

などと等式を同値な等式に変形した.

x に関する 2 次方程式 $2x^2 + 6x + 5 = 0$ を解く際には、

両辺を 2 で割って $x^2 + 3x + \frac{5}{2} = 0$,

両辺から $\frac{5}{2}$ を引いて $x^2 + 3x = -\frac{5}{2}$,

両辺に $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ を足して $x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}$, $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$,

などと等式を同値な等式に変形した。しかし、関数を表す 2 次式の平方完成では、

$$\begin{aligned} 2x^2 + 6x + 5 &= 2(x^2 + 3x) + 5 = 2\left\{x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} + 5 \\ &= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

のように、元の 2 次式 $2x^2 + 6x + 5$ と等しい 2 次式に変形しなければならない。

終

例 変数 x の 2 次式 $4x^2 - 5x + 1$ を平方完成する.

例 変数 x の 2 次式 $4x^2 - 5x + 1$ を平方完成する.

$$4x^2 - 5x + 1$$

x^2 の項 x の項で x^2 の係数を括りだす： $= 4\left(x^2 - \frac{5}{4}x\right) + 1$

例 変数 x の 2 次式 $4x^2 - 5x + 1$ を平方完成する.

$$4x^2 - 5x + 1$$

x^2 の項 x の項で x^2 の係数を括り出す：
$$= 4\left(x^2 - \frac{5}{4}x\right) + 1$$

$x^2 \pm \square x$ の部分に x の係数の絶対値

$$= 4\left\{x^2 - 2 \cdot \frac{5}{8}x + \left(\frac{5}{8}\right)^2 - \left(\frac{5}{8}\right)^2\right\} + 1$$

の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗を足して引く：

$$= 4\left\{\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{5^2}{8^2}\right\} + 1$$

例 変数 x の 2 次式 $4x^2 - 5x + 1$ を平方完成する。

$$4x^2 - 5x + 1$$

x^2 の項 x の項で x^2 の係数を括りだす：
$$= 4\left(x^2 - \frac{5}{4}x\right) + 1$$

$x^2 \pm \square x$ の部分に x の係数の絶対値

$$= 4\left\{x^2 - 2 \cdot \frac{5}{8}x + \left(\frac{5}{8}\right)^2 - \left(\frac{5}{8}\right)^2\right\} + 1$$

の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗を足して引く：

$$= 4\left\{\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{5^2}{8^2}\right\} + 1$$

分配法則を用いる：
$$= 4\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 - \boxed{4} \cdot \frac{5^2}{8^2} + 1$$

4 を掛けることを忘れないこと。

例 変数 x の 2 次式 $4x^2 - 5x + 1$ を平方完成する。

$$4x^2 - 5x + 1$$

x^2 の項 x の項で x^2 の係数を括りだす：
$$= 4\left(x^2 - \frac{5}{4}x\right) + 1$$

$x^2 \pm \square x$ の部分に x の係数の絶対値

$$= 4\left\{x^2 - 2 \cdot \frac{5}{8}x + \left(\frac{5}{8}\right)^2 - \left(\frac{5}{8}\right)^2\right\} + 1$$

の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗を足して引く：

$$= 4\left\{\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{5^2}{8^2}\right\} + 1$$

分配法則を用いる：
$$= 4\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 - 4 \cdot \frac{5^2}{8^2} + 1$$

$$= 4\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{9}{16} .$$

終

問5.7.1 変数 x の2次式 $3x^2 - 5x + 1$ を平方完成せよ.

問5.7.1 変数 x の2次式 $3x^2 - 5x + 1$ を平方完成せよ.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5x + 1 &= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x\right) + 1 \\ &= 3\left\{x^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{5^2}{6^2}\right\} + 1 \\ &= 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{12} + \frac{12}{12} \\ &= 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

終

例 変数 x の 2 次式 $-3x^2 + 8x - 4$ を平方完成する.

例 変数 x の 2 次式 $-3x^2 + 8x - 4$ を平方完成する.

$$-3x^2 + 8x - 4$$

x^2 の項 x の項で x^2 の係数を括りだす： $= -3\left(x^2 - \frac{8}{3}x\right) - 4$

例 変数 x の 2 次式 $-3x^2 + 8x - 4$ を平方完成する.

$$-3x^2 + 8x - 4$$

x^2 の項 x の項で x^2 の係数を括りだす：
$$= -3\left(x^2 - \frac{8}{3}x\right) - 4$$

$x^2 \pm \square x$ の部分に x の係数の絶対値

$$= -3\left\{x^2 - 2 \cdot \frac{4}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2\right\} - 4$$

の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗を足して引く：

$$= -3\left\{\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4^2}{3^2}\right\} - 4$$

例 変数 x の 2 次式 $-3x^2 + 8x - 4$ を平方完成する。

$$-3x^2 + 8x - 4$$

x^2 の項 x の項で x^2 の係数を括り出す：
$$= -3\left(x^2 - \frac{8}{3}x\right) - 4$$

$x^2 \pm \square x$ の部分に x の係数の絶対値

$$= -3\left\{x^2 - 2 \cdot \frac{4}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2\right\} - 4$$

の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗を足して引く：

$$= -3\left\{\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4^2}{3^2}\right\} - 4$$

分配法則を用いる：
$$= -3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \boxed{-3} \cdot \frac{4^2}{3^2} - 4$$

-3 を掛けることを忘れないこと。

例 変数 x の 2 次式 $-3x^2 + 8x - 4$ を平方完成する。

$$-3x^2 + 8x - 4$$

x^2 の項 x の項で x^2 の係数を括り出す：
$$= -3\left(x^2 - \frac{8}{3}x\right) - 4$$

$x^2 \pm \square x$ の部分に x の係数の絶対値

$$= -3\left\{x^2 - 2 \cdot \frac{4}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2\right\} - 4$$

の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗を足して引く：

$$= -3\left\{\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4^2}{3^2}\right\} - 4$$

分配法則を用いる：
$$= -3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - (-3) \cdot \frac{4^2}{3^2} - 4$$

$$= -3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} .$$

終

問5.7.2 変数 x の2次式 $-5x^2 - 6x - 3$ を平方完成せよ.

問5.7.2 変数 x の2次式 $-5x^2 - 6x - 3$ を平方完成せよ.

$$\begin{aligned} -5x^2 - 6x - 3 &= -5\left(x^2 + \frac{6}{5}x\right) - 3 \\ &= -5\left\{x^2 + 2 \cdot \frac{3}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{3^2}{5^2}\right\} - 3 \\ &= -5\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} - \frac{15}{5} \\ &= -5\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

終

例 変数 x の 2 次式 $\frac{9}{5}x^2 - 3x + 2$ を平方完成する.

$$\frac{9}{5}x^2 - 3x + 2$$

x^2 の項 x の項で x^2 の係数を括り出す :

$$= \frac{9}{5} \left(x^2 - \frac{5}{9} \cdot 3x \right) + 2$$

$$= \frac{9}{5} \left(x^2 - \frac{5}{3}x \right) + 2$$

$x^2 \pm \square x$ の部分に x の係数の絶対値
の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗を足して引く :

$$= \frac{9}{5} \left\{ x^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 \right\} + 2$$

$$= \frac{9}{5} \left\{ \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{5^2}{6^2} \right\} + 2$$

分配法則を用いる :

$$= \frac{9}{5} \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{9}{5} \cdot \frac{5^2}{6^2} + 2$$

$$= \frac{9}{5} \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{3}{4} .$$

終

問5.7.3 変数 x の 2 次式 $\frac{5}{2}x^2 - 4x + 3$ を平方完成せよ.

問5.7.3 変数 x の2次式 $\frac{5}{2}x^2 - 4x + 3$ を平方完成せよ.

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}x^2 - 4x + 3 &= \frac{5}{2}\left(x^2 - \frac{8}{5}x\right) + 3 \\ &= \frac{5}{2}\left\{x^2 - 2 \cdot \frac{4}{5}x + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \frac{4^2}{5^2}\right\} + 3 \\ &= \frac{5}{2}\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{8}{5} + \frac{15}{5} \\ &= \frac{5}{2}\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{7}{5} .\end{aligned}$$

終

問5.7.4 変数 x の2次式 $-\frac{8}{3}x^2 + 2x + 1$ を平方完成せよ.

問5.7.4 変数 x の2次式 $-\frac{8}{3}x^2 + 2x + 1$ を平方完成せよ.

$$\begin{aligned} -\frac{8}{3}x^2 + 2x + 1 &= -\frac{8}{3}\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right) + 1 \\ &= -\frac{8}{3}\left\{x^2 - 2 \cdot \frac{3}{8}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 - \frac{3^2}{8^2}\right\} + 1 \\ &= -\frac{8}{3}\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{3}{8} + \frac{8}{8} \\ &= -\frac{8}{3}\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{11}{8}. \end{aligned}$$

終

一般的に、変数 x の2次式 $ax^2 + bx + c$ (a, b, c は定数で $a \neq 0$) を平方完成すると次のようになる：

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left\{x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} . \end{aligned}$$

このように、変数 x の任意の 2 次式は平方完成して

$$a(x+p)^2 + q \quad (a, p, q \text{ は定数で } a \neq 0)$$

の形に直すことができる。この 2 次式の平方完成は重要で、以後しばしば用いる。結果ではなく必ず変形する要領を憶えること。