4. 拡充 1　複素数の平方根

2.6 節で述べたように，数 a に対して，$x^2 = a$ となる数 x を a の平方根という．**2.8** 節で述べたように，実数の範囲では -1 の平方根は無い．このように，どんな実数にもその平方根があるとはいえない．しかし，複素数の範囲で考えると，任意の複素数に対してその平方根がある．

$\boxed{\text{例}}$ 複素数 $5-12i$ の平方根を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 複素数 $5-12i$ の平方根を求める．$5-12i$ の平方根を $x+iy$（x, y は実数）とおく：

$$(x+iy)^2 = 5-12i \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 複素数 $5-12i$ の平方根を求める．$5-12i$ の平方根を $x+iy$（x, y は実数）とおく：

$$(x+iy)^2 = 5-12i \ .$$

$(x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$ なので

$$x^2-y^2+2ixy = 5-12i \ .$$

$\boxed{例}$ 複素数 $5-12i$ の平方根を求める．$5-12i$ の平方根を $x+iy$（ x,y は実数）とおく：

$$(x+iy)^2 = 5-12i \ .$$

$(x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$ なので

$$x^2-y^2+2ixy = 5-12i \ .$$

x と y とは実数なので，x^2-y^2 及び $2xy$ も実数である．

$\boxed{例}$ 複素数 $5-12i$ の平方根を求める．$5-12i$ の平方根を $x+iy$（x, y は実数）とおく：

$$(x+iy)^2 = 5-12i \ .$$

$(x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$ なので

$$x^2-y^2+2ixy = 5-12i \ .$$

x と y とは実数なので，x^2-y^2 及び $2xy$ も実数である．従って定理**1.9.1**より，

$$x^2-y^2 = 5 \quad かつ \quad 2xy = -12 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 複素数 $5-12i$ の平方根を求める．$5-12i$ の平方根を $x+iy$（x, y は実数）とおく：

$$(x+iy)^2 = 5-12i \ .$$

$(x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$ なので

$$x^2-y^2+2ixy = 5-12i \ .$$

x と y とは実数なので，x^2-y^2 及び $2xy$ も実数である．従って定理**1.9.1**より，

$$x^2-y^2 = 5 \ \text{かつ} \ 2xy = -12 \ .$$

この連立方程式を解く．

$\boxed{\text{例}}$ 複素数 $5-12i$ の平方根を求める．$5-12i$ の平方根を $x+iy$（x, y は実数）とおく：

$$(x+iy)^2 = 5-12i \ .$$

$(x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$ なので

$$x^2-y^2+2ixy = 5-12i \ .$$

x と y とは実数なので，x^2-y^2 及び $2xy$ も実数である．従って定理**1.9.1**より，

$$x^2-y^2 = 5 \quad \text{かつ} \quad 2xy = -12 \ .$$

この連立方程式を解く． $x^2-y^2=5$ の両辺に x^2 を掛けて

$$x^4-x^2y^2 = 5x^2 \ ,$$

$$x^4-(xy)^2 = 5x^2 \ ,$$

例 複素数 $5-12i$ の平方根を求める．$5-12i$ の平方根を $x+iy$（x,y は実数）とおく：

$$(x+iy)^2 = 5-12i \ .$$

$(x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$ なので

$$x^2-y^2+2ixy = 5-12i \ .$$

x と y とは実数なので，x^2-y^2 及び $2xy$ も実数である．従って定理**1.9.1**より，

$$x^2-y^2 = 5 \quad \text{かつ} \quad 2xy = -12 \ .$$

この連立方程式を解く． $x^2-y^2=5$ の両辺に x^2 を掛けて

$$x^4 - x^2y^2 = 5x^2 \ ,$$

$$x^4-(xy)^2 = 5x^2 \ ,$$

$xy=-6$ なので

$$x^4-(-6)^2 = 5x^2 \ ,$$

$$x^4-5x^2-36 = 0 \ .$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \quad .$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \ .$$

$x^2 = X$ とおくと

$$X^2 - 5X - 36 = 0 \ ,$$

$$(X-9)(X+4) = 0 \ ,$$

$$X = 9 \ \text{ または } \ X = -4 \ ,$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \ .$$

$x^2 = X$ とおくと

$$X^2 - 5X - 36 = 0 \ ,$$

$$(X-9)(X+4) = 0 \ ,$$

$$X = 9 \quad \text{または} \quad X = -4 \ ,$$

$X = x^2$ なので，$x^2 = 9$ または $x^2 = -4$.

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0\ .$$

$x^2 = X$ とおくと

$$X^2 - 5X - 36 = 0\ ,$$

$$(X-9)(X+4) = 0\ ,$$

$$X = 9 \text{ または } X = -4\ ,$$

$X = x^2$ なので， $x^2 = 9$ または $x^2 = -4$ ． x は実数なので $x^2 \geq 0$ ，従って $x^2 = 9$ ．

$$x^4-5x^2-36=0 \ .$$

$x^2=X$ とおくと

$$X^2-5X-36=0 \ ,$$

$$(X-9)(X+4)=0 \ ,$$

$$X=9 \ \text{または} \ X=-4 \ ,$$

$X=x^2$ なので，$x^2=9$ または $x^2=-4$ ．x は実数なので $x^2 \geq 0$ ，従って $x^2=9$ ．よって

$$x=\pm 3 \ .$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \ .$$

$x^2 = X$ とおくと

$$X^2 - 5X - 36 = 0 \ ,$$

$$(X-9)(X+4) = 0 \ ,$$

$$X = 9 \ \text{または}\ X = -4 \ ,$$

$X = x^2$ なので，$x^2 = 9$ または $x^2 = -4$ ．x は実数なので $x^2 \geq 0$ ，従って $x^2 = 9$ ．よって

$$x = \pm 3 \ .$$

$xy = -6$ なので，$x = 3$ のとき $y = -2$ ，$x = -3$ のとき $y = 2$ ．

$$x^4-5x^2-36=0\ .$$

$x^2=X$ とおくと

$$X^2-5X-36=0\ ,$$

$$(X-9)(X+4)=0\ ,$$

$$X=9 \text{ または } X=-4\ ,$$

$X=x^2$ なので， $x^2=9$ または $x^2=-4$ ． x は実数なので $x^2\geq 0$ ，従って $x^2=9$ ．よって

$$x=\pm 3\ .$$

$xy=-6$ なので， $x=3$ のとき $y=-2$ ， $x=-3$ のとき $y=2$ ．従って

$$x+iy=\pm 3\mp 2i=\pm(3-2i) \quad \text{複号同順}\quad .$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \ .$$

$x^2 = X$ とおくと

$$X^2 - 5X - 36 = 0 \ ,$$

$$(X-9)(X+4) = 0 \ ,$$

$$X = 9 \ \text{または} \ X = -4 \ ,$$

$X = x^2$ なので，$x^2 = 9$ または $x^2 = -4$ ．x は実数なので $x^2 \geq 0$ ，従って $x^2 = 9$ ．よって

$$x = \pm 3 \ .$$

$xy = -6$ なので，$x = 3$ のとき $y = -2$ ，$x = -3$ のとき $y = 2$ ．従って

$$x + iy = \pm 3 \mp 2i = \pm(3 - 2i) \quad \text{複号同順} \quad .$$

故に，複素数 $5 - 12i$ の平方根は $\pm(3-2i)$ である．

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \ .$$

$x^2 = X$ とおくと

$$X^2 - 5X - 36 = 0 \ ,$$

$$(X-9)(X+4) = 0 \ ,$$

$$X = 9 \quad または \quad X = -4 \ ,$$

$X = x^2$ なので，$x^2 = 9$ または $x^2 = -4$ ．x は実数なので $x^2 \geq 0$ ，従って $x^2 = 9$ ．よって

$$x = \pm 3 \ .$$

$xy = -6$ なので，$x = 3$ のとき $y = -2$ ，$x = -3$ のとき $y = 2$ ．従って

$$x + iy = \pm 3 \mp 2i = \pm(3 - 2i) \quad 複号同順 \quad .$$

故に，複素数 $5 - 12i$ の平方根は $\pm(3 - 2i)$ である．

実際に $\pm(3 - 2i)$ を 2 乗すると

$$\{\pm(3-2i)\}^2 = (3-2i)^2 = 9 - 4 - 12i = 5 - 12i \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問4.拡充1}$ 複素数 $24+10i$ の平方根を求めよ．

$24+10i$ の平方根を $x+iy$ （x, y は実数）とおく：$(x+iy)^2 = 24+10i$ ，

$= 24+10i$ ．x と y とは実数なので，　　及び　　も実数である．従って　　$= 24$ かつ　　$= 10$ ．　　$= 24$ の両辺に x^2 を掛けて，　　$= 24x^2$ ，　$(\quad)^2 = 24x^2$ ；$xy =$ 　なので，

$=$ 　，　　$= 0$ ，$(x^2 \quad)(x^2 \quad) = 0$ ，$x^2 =$ 　または $x^2 =$ 　．x は実数なので $x^2 \geq 0$ ，従って $x^2 =$ 　．よって $x =$ 　．$xy =$ 　より，$x =$ 　のとき $y =$ 　，$x =$ 　のとき $y =$ 　．従って

$$x+iy = \qquad = \pm(\qquad)$$ （複号同順）．

故に複素数 $24+10i$ の平方根は $\pm(\quad)$ である．

$\boxed{\text{問}4.\text{拡充}1}$ 複素数 $24+10i$ の平方根を求めよ．

$24+10i$ の平方根を $x+iy$ （ x,y は実数）とおく： $(x+iy)^2=24+10i$ ，

$= 24+10i$ ． x と y とは実数なので， x^2-y^2 及び $2xy$ も実数である．従って $x^2-y^2=24$ かつ $2xy=10$ ． $x^2-y^2=24$ の両辺に x^2 を掛けて， $x^4-x^2y^2=24x^2$ ， $x^4-(xy)^2=24x^2$ ； $xy=5$ なので， $x^4-5^2=24x^2$ ， $x^4-24x^2-25=0$ ， $(x^2-25)(x^2+1)=0$ ， $x^2=25$ または $x^2=-1$ ． x は実数なので $x^2\geq 0$ ，従って $x^2=25$ ．よって $x=\pm 5$ ． $xy=5$ より， $x=5$ のとき $y=1$ ， $x=-5$ のとき $y=-1$ ．従って

$$x+iy = \pm 5\pm i = \pm(5+i) \quad \text{（複号同順）}.$$

故に複素数 $24+10i$ の平方根は $\pm(5+i)$ である．