

4.10 恒等式

例として x の整式 $(x-2)(2x-3)$ を展開する：

$$(x-2)(2x-3) = 2x^2 - 7x + 6 .$$

ここで、文字 x が現れるこの等式は、 x の値がどんな数でも $(x-2)(2x-3) = 2x^2 - 7x + 6$ となることを意味する。

例として x の整式 $(x-2)(2x-3)$ を展開する：

$$(x-2)(2x-3) = 2x^2 - 7x + 6 .$$

ここで、文字 x が現れるこの等式は、 x の値がどんな数でも $(x-2)(2x-3) = 2x^2 - 7x + 6$ となることを意味する。

このように、例えば文字 x が現れる等式について、任意の数 x についてその等式が成り立つ（と考える）とき、その等式を x に関する（ x についての）恒等式という。

例 x の 3 次式 $2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$ を 2 次式 $x^2 - x + 3$ で割ると整商が $2x - 3$ で剰余が $-2x + 1$ になる．このことを式で表すと次の等式になる：

$$2x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = (2x - 3)(x^2 - x + 3) - 2x + 1 .$$

例 x の 3 次式 $2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$ を 2 次式 $x^2 - x + 3$ で割ると整商が $2x - 3$ で剰余が $-2x + 1$ になる. このことを式で表すと次の等式になる:

$$2x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = (2x - 3)(x^2 - x + 3) - 2x + 1 .$$

この等式は,

任意の数 x について $2x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = (2x - 3)(x^2 - x + 3) - 2x + 1$ となることを意図している;

例 x の 3 次式 $2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$ を 2 次式 $x^2 - x + 3$ で割ると整商が $2x - 3$ で剰余が $-2x + 1$ になる. このことを式で表すと次の等式になる:

$$2x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = (2x - 3)(x^2 - x + 3) - 2x + 1 .$$

この等式は,

任意の数 x について $2x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = (2x - 3)(x^2 - x + 3) - 2x + 1$ となることを意図している; つまり x に関する恒等式である. **終**

方程式も恒等式も等式であるが、対照的な概念である.

x に関する方程式とは x の値がある条件を満たす数のときに成り立つ等式のことであり,

x に関する恒等式とは x の値がどんな数でも成り立つ等式のことである.

例 定数 a, b について, 等式 $ax + b = 2x + 3$ が x に関する恒等式になるとする.

例 定数 a, b について, 等式 $ax + b = 2x + 3$ が x に関する恒等式になるとする. つまり,

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax + b = 2x + 3$$

とする.

例 定数 a, b について, 等式 $ax + b = 2x + 3$ が x に関する恒等式になるとする. つまり,

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax + b = 2x + 3$$

とする. 等式 $ax + b = 2x + 3$ において $x = 0$ とすると, $a \cdot 0 + b = 2 \cdot 0 + 3$ なので $b = 3$.

例 定数 a, b について, 等式 $ax + b = 2x + 3$ が x に関する恒等式になるとする. つまり,

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax + b = 2x + 3$$

とする. 等式 $ax + b = 2x + 3$ において $x = 0$ とすると, $a \cdot 0 + b = 2 \cdot 0 + 3$ なので $b = 3$. 等式 $ax + b = 2x + 3$ において $x = 1$ とすると, $a \cdot 1 + b = 2 \cdot 1 + 3$ なので $a + b = 5$.

例 定数 a, b について, 等式 $ax + b = 2x + 3$ が x に関する恒等式になるとする. つまり,

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax + b = 2x + 3$$

とする. 等式 $ax + b = 2x + 3$ において $x = 0$ とすると, $a \cdot 0 + b = 2 \cdot 0 + 3$ なので $b = 3$. 等式 $ax + b = 2x + 3$ において $x = 1$ とすると, $a \cdot 1 + b = 2 \cdot 1 + 3$ なので $a + b = 5$. $b = 3$ なので, $a + 3 = 5$, $a = 2$.

例 定数 a, b について, 等式 $ax + b = 2x + 3$ が x に関する恒等式になるとする. つまり,

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax + b = 2x + 3$$

とする. 等式 $ax + b = 2x + 3$ において $x = 0$ とすると, $a \cdot 0 + b = 2 \cdot 0 + 3$ なので $b = 3$. 等式 $ax + b = 2x + 3$ において $x = 1$ とすると, $a \cdot 1 + b = 2 \cdot 1 + 3$ なので $a + b = 5$. $b = 3$ なので, $a + 3 = 5$, $a = 2$. こうして次のことが分かる:

等式 $ax + b = 2x + 3$ が x に関する恒等式 ならば $a = 2$ かつ $b = 3$.

例 定数 a, b について、等式 $ax + b = 2x + 3$ が x に関する恒等式になるとする。つまり、

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax + b = 2x + 3$$

とする。等式 $ax + b = 2x + 3$ において $x = 0$ とすると、 $a \cdot 0 + b = 2 \cdot 0 + 3$ なので $b = 3$ 。等式 $ax + b = 2x + 3$ において $x = 1$ とすると、 $a \cdot 1 + b = 2 \cdot 1 + 3$ なので $a + b = 5$ 。 $b = 3$ なので、 $a + 3 = 5$ 、 $a = 2$ 。こうして次のことが分かる：

等式 $ax + b = 2x + 3$ が x に関する恒等式 ならば $a = 2$ かつ $b = 3$ 。
逆に、 $a = 2$ かつ $b = 3$ のとき、明らかに、

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax + b = 2x + 3$$

である；

例 定数 a, b について、等式 $ax + b = 2x + 3$ が x に関する恒等式になるとする。つまり、

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax + b = 2x + 3$$

とする。等式 $ax + b = 2x + 3$ において $x = 0$ とすると、 $a \cdot 0 + b = 2 \cdot 0 + 3$ なので $b = 3$ 。等式 $ax + b = 2x + 3$ において $x = 1$ とすると、 $a \cdot 1 + b = 2 \cdot 1 + 3$ なので $a + b = 5$ 。 $b = 3$ なので、 $a + 3 = 5$ 、 $a = 2$ 。こうして次のことが分かる：

等式 $ax + b = 2x + 3$ が x に関する恒等式 ならば $a = 2$ かつ $b = 3$ 。
逆に、 $a = 2$ かつ $b = 3$ のとき、明らかに、

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax + b = 2x + 3$$

である；つまり、このとき等式 $ax + b = 2x + 3$ は x に関する恒等式である：
 $a = 2$ かつ $b = 3$ ならば 等式 $ax + b = 2x + 3$ は x に関する恒等式。

例 定数 a, b について, 等式 $ax + b = 2x + 3$ が x に関する恒等式になるとする. つまり,

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax + b = 2x + 3$$

とする. 等式 $ax + b = 2x + 3$ において $x = 0$ とすると, $a \cdot 0 + b = 2 \cdot 0 + 3$ なので $b = 3$. 等式 $ax + b = 2x + 3$ において $x = 1$ とすると, $a \cdot 1 + b = 2 \cdot 1 + 3$ なので $a + b = 5$. $b = 3$ なので, $a + 3 = 5$, $a = 2$. こうして次のことが分かる:

等式 $ax + b = 2x + 3$ が x に関する恒等式 ならば $a = 2$ かつ $b = 3$.
逆に, $a = 2$ かつ $b = 3$ のとき, 明らかに,

$$\text{任意の数 } x \text{ について } ax + b = 2x + 3$$

である; つまり, このとき等式 $ax + b = 2x + 3$ は x に関する恒等式である:

$a = 2$ かつ $b = 3$ ならば 等式 $ax + b = 2x + 3$ は x に関する恒等式.

以上のことをまとめる:

$$ax + b = 2x + 3 \text{ が } x \text{ に関する恒等式} \iff a = 2 \text{ かつ } b = 3 . \quad \boxed{\text{終}}$$

この例を一般化すると次の定理が導かれる.

[定理 4.10.1] 定数 a, b, p, q は変数 x と無関係とする. 高々1次の x の整式 $ax + b$ と $px + q$ について,

等式 $ax + b = px + q$ が x に関する恒等式 $\iff a = p$ かつ $b = q$.

例 等式 $a(x+2)+b(x-3)=3x+16$ が x に関する恒等式になるように定数 a と b の値を定める. 左辺を x について整理して定理 4.10.1 を用いる.

例 等式 $a(x+2)+b(x-3)=3x+16$ が x に関する恒等式になるように定数 a と b の値を定める. 左辺を x について整理して定理 4.10.1 を用いる. 左辺を x について整理すると

$$a(x+2)+b(x-3) = (a+b)x + 2a - 3b .$$

例 等式 $a(x+2)+b(x-3)=3x+16$ が x に関する恒等式になるように定数 a と b の値を定める. 左辺を x について整理して定理 4.10.1 を用いる. 左辺を x について整理すると

$$a(x+2)+b(x-3)=(a+b)x+2a-3b.$$

従って, 等式

$$(a+b)x+2a-3b=3x+16$$

が x に関する恒等式になればよい.

例 等式 $a(x+2)+b(x-3)=3x+16$ が x に関する恒等式になるように定数 a と b の値を定める. 左辺を x について整理して定理 4.10.1 を用いる. 左辺を x について整理すると

$$a(x+2)+b(x-3)=(a+b)x+2a-3b.$$

従って, 等式

$$(a+b)x+2a-3b=3x+16$$

が x に関する恒等式になればよい. その条件は, 左辺と右辺の係数を比べて,

$$a+b=3 \quad \text{かつ} \quad 2a-3b=16.$$

例 等式 $a(x+2)+b(x-3)=3x+16$ が x に関する恒等式になるように定数 a と b の値を定める. 左辺を x について整理して定理 4.10.1 を用いる. 左辺を x について整理すると

$$a(x+2)+b(x-3)=(a+b)x+2a-3b.$$

従って, 等式

$$(a+b)x+2a-3b=3x+16$$

が x に関する恒等式になればよい. その条件は, 左辺と右辺の係数を比べて,

$$a+b=3 \quad \text{かつ} \quad 2a-3b=16.$$

これらの a と b に関する方程式を解くと, $a=5$ かつ $b=-2$.

終

問4.10.1 等式 $a(2x - 3) + b(x + 4) = 4x - 17$ が x に関する恒等式になるように定数 a と b の値を定めよ.

左辺を x について整理すると

$$(\quad)x = 4x - 17.$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は,

$$= 4 \quad \text{かつ} \quad = -17.$$

これらの方程式を解くと, $a =$ かつ $b =$.

問4.10.1 等式 $a(2x - 3) + b(x + 4) = 4x - 17$ が x に関する恒等式になるように定数 a と b の値を定めよ.

左辺を x について整理すると

$$(2a + b)x - 3a + 4b = 4x - 17 .$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は,

$$2a + b = 4 \quad \text{かつ} \quad -3a + 4b = -17 .$$

これらの方程式を解くと, $a = 3$ かつ $b = -2$.

終

高々2次の整式についても同様のことが成り立つ.

[定理 4.10.2] 定数 a, b, c, p, q, r は変数 x と無関係とする. 高々2次の x の整式 $ax^2 + bx + c$ と $px^2 + qx + r$ について,

等式 $ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r$ が x に関する恒等式

$$\iff a = p \text{ かつ } b = q \text{ かつ } c = r \quad .$$

例 等式 $2x^2 - 3x - 1 = (x - 1)(ax + b) + c$ が x に関する恒等式になるように定数 a, b, c の値を定める．右辺を x について整理して定理 4.10.2 を用いる．

例 等式 $2x^2 - 3x - 1 = (x - 1)(ax + b) + c$ が x に関する恒等式になるように定数 a, b, c の値を定める. 右辺を x について整理して定理 4.10.2 を用いる. 右辺を x について整理すると

$$(x - 1)(ax + b) + c = ax^2 + bx - ax - b + c = ax^2 + (b - a)x + c - b .$$

例 等式 $2x^2 - 3x - 1 = (x - 1)(ax + b) + c$ が x に関する恒等式になるように定数 a, b, c の値を定める. 右辺を x について整理して定理 4.10.2 を用いる. 右辺を x について整理すると

$$(x - 1)(ax + b) + c = ax^2 + bx - ax - b + c = ax^2 + (b - a)x + c - b .$$

従って, 等式

$$2x^2 - 3x - 1 = ax^2 + (b - a)x + c - b$$

が x に関する恒等式になればよい.

例 等式 $2x^2 - 3x - 1 = (x - 1)(ax + b) + c$ が x に関する恒等式になるように定数 a, b, c の値を定める. 右辺を x について整理して定理 4.10.2 を用いる. 右辺を x について整理すると

$$(x - 1)(ax + b) + c = ax^2 + bx - ax - b + c = ax^2 + (b - a)x + c - b .$$

従って, 等式

$$2x^2 - 3x - 1 = ax^2 + (b - a)x + c - b$$

が x に関する恒等式になればよい. その条件は, 左辺と右辺の係数を比べて,

$$a = 2 \quad \text{かつ} \quad b - a = -3 \quad \text{かつ} \quad c - b = -1 .$$

例 等式 $2x^2 - 3x - 1 = (x - 1)(ax + b) + c$ が x に関する恒等式になるように定数 a, b, c の値を定める. 右辺を x について整理して定理 4.10.2 を用いる. 右辺を x について整理すると

$$(x - 1)(ax + b) + c = ax^2 + bx - ax - b + c = ax^2 + (b - a)x + c - b .$$

従って, 等式

$$2x^2 - 3x - 1 = ax^2 + (b - a)x + c - b$$

が x に関する恒等式になればよい. その条件は, 左辺と右辺の係数を比べて,

$$a = 2 \text{ かつ } b - a = -3 \text{ かつ } c - b = -1 .$$

これらの a, b, c に関する方程式を解くと, $a = 2$ かつ $b = -1$ かつ $c = -2$.

終

問4.10.2 等式 $2x^2 - 5 = ax(x-1) + b(x-1) + c$ が x に関する恒等式になるように定数 a, b, c の値を定めよ.

右辺を x について整理すると

$$2x^2 - 5 = \quad .$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は,

$$= 2 \text{ かつ } = 0 \text{ かつ } = -5 .$$

これらの方程式を解くと, $a =$ かつ $b =$ かつ $c =$.

問4.10.2 等式 $2x^2 - 5 = ax(x-1) + b(x-1) + c$ が x に関する恒等式になるように定数 a, b, c の値を定めよ.

右辺を x について整理すると

$$2x^2 - 5 = ax^2 + (b-a)x + c - b.$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は,

$$a = 2 \text{ かつ } b - a = 0 \text{ かつ } c - b = -5.$$

これらの方程式を解くと, $a = 2$ かつ $b = 2$ かつ $c = -3$.

終

例 等式 $2x^2 - 4x + 7 = a(x+p)^2 + q$ が x に関する恒等式になるように定数 a, p, q の値を定める. 右辺を x について整理して定理 4.10.2 を用いる.

例 等式 $2x^2 - 4x + 7 = a(x+p)^2 + q$ が x に関する恒等式になるように定数 a, p, q の値を定める．右辺を x について整理して定理 4.10.2 を用いる．右辺を x について整理すると

$$a(x+p)^2 + q = ax^2 + 2apx + ap^2 + q .$$

例 等式 $2x^2 - 4x + 7 = a(x+p)^2 + q$ が x に関する恒等式になるように定数 a, p, q の値を定める．右辺を x について整理して定理 4.10.2 を用いる．右辺を x について整理すると

$$a(x+p)^2 + q = ax^2 + 2apx + ap^2 + q .$$

従って，等式

$$2x^2 - 4x + 7 = ax^2 - 2apx + ap^2 + q .$$

が x に関する恒等式になればよい．

例 等式 $2x^2 - 4x + 7 = a(x+p)^2 + q$ が x に関する恒等式になるように定数 a, p, q の値を定める．右辺を x について整理して定理 4.10.2 を用いる．右辺を x について整理すると

$$a(x+p)^2 + q = ax^2 + 2apx + ap^2 + q .$$

従って，等式

$$2x^2 - 4x + 7 = ax^2 - 2apx + ap^2 + q .$$

が x に関する恒等式になればよい．その条件は，左辺と右辺の係数を比べて，

$$a = 2 \quad \text{かつ} \quad 2ap = -4 \quad \text{かつ} \quad ap^2 + q = 7 .$$

例 等式 $2x^2 - 4x + 7 = a(x+p)^2 + q$ が x に関する恒等式になるように定数 a, p, q の値を定める. 右辺を x について整理して定理 4.10.2 を用いる. 右辺を x について整理すると

$$a(x+p)^2 + q = ax^2 + 2apx + ap^2 + q .$$

従って, 等式

$$2x^2 - 4x + 7 = ax^2 - 2apx + ap^2 + q .$$

が x に関する恒等式になればよい. その条件は, 左辺と右辺の係数を比べて,

$$a = 2 \quad \text{かつ} \quad 2ap = -4 \quad \text{かつ} \quad ap^2 + q = 7 .$$

a, p, q に関するこれらの方程式より,

$$a = 2 , \quad p = \frac{4}{-2a} = -1 , \quad q = 7 - ap^2 = 5 .$$

例 等式 $2x^2 - 4x + 7 = a(x+p)^2 + q$ が x に関する恒等式になるように定数 a, p, q の値を定める. 右辺を x について整理して定理 4.10.2 を用いる. 右辺を x について整理すると

$$a(x+p)^2 + q = ax^2 + 2apx + ap^2 + q .$$

従って, 等式

$$2x^2 - 4x + 7 = ax^2 - 2apx + ap^2 + q .$$

が x に関する恒等式になればよい. その条件は, 左辺と右辺の係数を比べて,

$$a = 2 \quad \text{かつ} \quad 2ap = -4 \quad \text{かつ} \quad ap^2 + q = 7 .$$

a, p, q に関するこれらの方程式より,

$$a = 2, \quad p = \frac{4}{-2a} = -1, \quad q = 7 - ap^2 = 5 .$$

つまり, $a = 2$ かつ $p = -1$ かつ $q = 5$.

終

問4.10.3 等式 $2x^2 - 6x + 7 = a(x+p)^2 + q$ が x に関する恒等式になるように定数 a, p, q の値を定めよ.

右辺を x について整理すると

$$2x^2 - 6x + 7 = a(x^2 + 2px + p^2) + q = ax^2 + 2apx + (ap^2 + q).$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は,

$$a = 2 \quad \text{かつ} \quad 2ap = -6 \quad \text{かつ} \quad ap^2 + q = 7.$$

これらの方程式を解くと, $a = 2$ かつ $p = -3$ かつ $q = 7$.

問4.10.3 等式 $2x^2 - 6x + 7 = a(x+p)^2 + q$ が x に関する恒等式になるように定数 a, p, q の値を定めよ.

右辺を x について整理すると

$$2x^2 - 6x + 7 = ax^2 + 2apx + ap^2 + q .$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は,

$$a = 2 \text{ かつ } 2ap = -6 \text{ かつ } ap^2 + q = 7 .$$

これらの方程式を解くと, $a = 2$ かつ $p = -\frac{3}{2}$ かつ $q = \frac{5}{2}$.

終

等式に現れる複数の文字に着目することもある．例えば等式に現れる文字 x と y とに着目すると， x と y との値が何であってもその等式が成り立つ(と考える)とき，その等式を x と y とに関する恒等式という．