4.8 分数方程式

中学校を卒業しないと高専に入学できないので，人を表す変数 x について，“x は高専生である”のであれば“x は中学校を卒業している”といえる；

中学校を卒業しないと高専に入学できないので，人を表す変数 x について，“x は高専生である”のであれば“x は中学校を卒業している”といえる；しかし，逆に“x は中学校を卒業している”からといって“x は高専生である”とは限らない．中学校を卒業していても高専生でない人は沢山いる．

中学校を卒業しないと高専に入学できないので，人を表す変数 x について，“ x は高専生である” のであれば “ x は中学校を卒業している” といえる；しかし，逆に “ x は中学校を卒業している” からといって “ x は高専生である” とは限らない．中学校を卒業していても高専生でない人は沢山いる．この例のように，x に関する述語 $\mathcal{A}(x)$ から述語 $\mathcal{B}(x)$ が導けるが $\mathcal{B}(x)$ から $\mathcal{A}(x)$ が導けないとき，$\mathcal{B}(x)$ となる x の値の範囲は，$\mathcal{A}(x)$ となる x の値の範囲を含むが，それ以外の値も含むことがある．

未知数についての分数式が現れる方程式を分数方程式という．分数方程式を解くために等式の次の性質を用いる：複素数 a, b, c について， $a = b$ ならば $ac = bc$ ．

$\boxed{例}$ 複素数を表す変数 x に関する分数方程式 $\dfrac{x+4}{x^2-4}=\dfrac{2x-1}{x^2-2x}$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x に関する分数方程式 $\dfrac{x+4}{x^2-4}=\dfrac{2x-1}{x^2-2x}$ を解く．まず分数式の分母を因数分解する：

$$\frac{x+4}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x-1}{x(x-2)} \ .$$

例 複素数を表す変数 x に関する分数方程式 $\dfrac{x+4}{x^2-4}=\dfrac{2x-1}{x^2-2x}$ を解く．まず分数式の分母を因数分解する：

$$\frac{x+4}{(x+2)(x-2)}=\frac{2x-1}{x(x-2)}\ .$$

分数式の分母を払うために，分数式の分母 $(x+2)(x-2)$ と $x(x-2)$ との最小公倍数 $x(x+2)(x-2)$ を両辺に掛ける：

分母を払うためには分母 x^2-4 と x^2-2x との公倍数を掛ければよいので，必ずしも最小公倍数である必要はない．例えば，分母を払うために両辺に $(x^2-4)(x^2-2x)$ を掛けてもかまわない；ただ式の計算が面倒になることが多い．

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x に関する分数方程式 $\dfrac{x+4}{x^2-4}=\dfrac{2x-1}{x^2-2x}$ を解く．まず分数式の分母を因数分解する：

$$\frac{x+4}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x-1}{x(x-2)} \ .$$

分数式の分母を払うために，分数式の分母 $(x+2)(x-2)$ と $x(x-2)$ との最小公倍数 $x(x+2)(x-2)$ を両辺に掛ける：

$$\frac{x+4}{(x+2)(x-2)}x(x+2)(x-2) = \frac{2x-1}{x(x-2)}x(x+2)(x-2) \ .$$

例 複素数を表す変数 x に関する分数方程式 $\dfrac{x+4}{x^2-4}=\dfrac{2x-1}{x^2-2x}$ を解く．まず分数式の分母を因数分解する：

$$\frac{x+4}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x-1}{x(x-2)} \ .$$

分数式の分母を払うために，分数式の分母 $(x+2)(x-2)$ と $x(x-2)$ との最小公倍数 $x(x+2)(x-2)$ を両辺に掛ける：

$$\frac{x+4}{(x+2)(x-2)}x(x+2)(x-2) = \frac{2x-1}{x(x-2)}x(x+2)(x-2) \ .$$

約分して整理する：

$$(x+4)x = (2x-1)(x+2) \ ,$$

$$x^2+4x = 2x^2+3x-2 \ ,$$

$$x^2-x-2 = 0 \ ,$$

$\boxed{例}$ 複素数を表す変数 x に関する分数方程式 $\dfrac{x+4}{x^2-4}=\dfrac{2x-1}{x^2-2x}$ を解く．まず分数式の分母を因数分解する：

$$\frac{x+4}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x-1}{x(x-2)} \ .$$

分数式の分母を払うために，分数式の分母 $(x+2)(x-2)$ と $x(x-2)$ との最小公倍数 $x(x+2)(x-2)$ を両辺に掛ける：

$$\frac{x+4}{(x+2)(x-2)}x(x+2)(x-2) = \frac{2x-1}{x(x-2)}x(x+2)(x-2) \ .$$

約分して整理する：

$$(x+4)x = (2x-1)(x+2) \ ,$$

$$x^2+4x = 2x^2+3x-2 \ ,$$

$$x^2-x-2=0 \ ,$$

$(x+1)(x-2)=0$ なので， $x=2$ または $x=-1$ ．故に，

$$\frac{x+4}{x^2-4} = \frac{2x-1}{x^2-2x} \quad ならば \quad x=2 \ または \ x=-1 \ .$$

$$\frac{x+4}{x^2-4} = \frac{2x-1}{x^2-2x} \quad \text{ならば} \quad x=2 \text{ または } x=-1\ .$$

等式 $\dfrac{x+4}{(x+2)(x-2)}x(x+2)(x-2) = \dfrac{2x-1}{x(x-2)}x(x+2)(x-2)$ から等式 $(x+4)x=(2x-1)(x+2)$ を導けるが，逆に $(x+4)x=(2x-1)(x+2)$ から $\dfrac{x+4}{(x+2)(x-2)}x(x+2)(x-2) = \dfrac{2x-1}{x(x-2)}x(x+2)(x-2)$ を導けない．よって，x に関する方程式 $(x+4)x=(2x-1)(x+2)$ の解の範囲は，方程式 $\dfrac{x+4}{(x+2)(x-2)}x(x+2)(x-2) = \dfrac{2x-1}{x(x-2)}x(x+2)(x-2)$ の解の範囲を含むが，解でない数まで含んでいるかもしれない．従って，方程式 $(x+4)x=(2x-1)(x+2)$ の解の各々が元の方程式 $\dfrac{x+4}{x^2-4} = \dfrac{2x-1}{x^2-2x}$ の解であるかどうかを調べる必要がある．

$$\frac{x+4}{x^2-4} = \frac{2x-1}{x^2-2x} \quad \text{ならば} \quad x = 2 \text{ または } x = -1 \ .$$

$$\frac{x+4}{x^2-4} = \frac{2x-1}{x^2-2x}$$ ならば　$x = 2$ または $x = -1$.

$x=2$ のとき，$x^2-4=0$ なので分数式 $\dfrac{x+4}{x^2-4}$ の値は無いので，等式 $\dfrac{x+4}{x^2-4}=\dfrac{2x-1}{x^2-2x}$ は成り立たない．よって 2 は与えられた方程式の解でない．

$$\frac{x+4}{x^2-4} = \frac{2x-1}{x^2-2x}$$ ならば　$x = 2$ または $x = -1$.

$x=2$ のとき， $x^2-4=0$ なので分数式 $\frac{x+4}{x^2-4}$ の値は無いので，等式 $\frac{x+4}{x^2-4}=\frac{2x-1}{x^2-2x}$ は成り立たない．よって 2 は与えられた方程式の解でない．

$x=-1$ のとき $\frac{x+4}{x^2-4}=\frac{2x-1}{x^2-2x}$ ．-1 は与えられた方程式の解である．

$$\frac{x+4}{x^2-4} = \frac{2x-1}{x^2-2x}$$ ならば $x = 2$ または $x = -1$.

$x=2$ のとき，$x^2-4=0$ なので分数式 $\dfrac{x+4}{x^2-4}$ の値は無いので，等式 $\dfrac{x+4}{x^2-4}=\dfrac{2x-1}{x^2-2x}$ は成り立たない．よって 2 は与えられた方程式の解でない．

$x=-1$ のとき $\dfrac{x+4}{x^2-4}=\dfrac{2x-1}{x^2-2x}$ ．-1 は与えられた方程式の解である．故に，与えられた方程式の解は -1 だけである． 終

　このように，分数方程式の中の分数式の分母を払ってできる整方程式の解は元の分数方程式の解であるとは限らないので，改めて調べる必要がある．その際，分数式の分母の値が 0 になるとその分数式の値は無い．なので，

分数方程式の中の分数式の分母の値は 0 でない

ことに注意すること．

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $1+\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{2x+4}{x^2-4x+3}$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $1+\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{2x+4}{x^2-4x+3}$ を解く．分数式の分母を因数分解する：

$$1+\frac{5}{x-3} = \frac{2x+4}{(x-1)(x-3)} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $1+\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{2x+4}{x^2-4x+3}$ を解く．分数式の分母を因数分解する：

$$1+\frac{5}{x-3} = \frac{2x+4}{(x-1)(x-3)} \ .$$

分数式の分母の最小公倍数 $(x-1)(x-3)$ を両辺に掛ける：

$$\left(1+\frac{5}{x-3}\right)(x-1)(x-3)=\frac{2x+4}{(x-1)(x-3)}(x-1)(x-3),$$

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $1+\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{2x+4}{x^2-4x+3}$ を解く．分数式の分母を因数分解する：

$$1+\frac{5}{x-3} = \frac{2x+4}{(x-1)(x-3)} \ .$$

分数式の分母の最小公倍数 $(x-1)(x-3)$ を両辺に掛ける：

$$\left(1+\frac{5}{x-3}\right)(x-1)(x-3)=\frac{2x+4}{(x-1)(x-3)}(x-1)(x-3),$$

$$(x-1)(x-3)+5(x-1)=2x+4 \ ,$$

$$x^2-4x+3+5x-5=2x+4 \ ,$$

$$x^2-x-6=0 \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $1+\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{2x+4}{x^2-4x+3}$ を解く．分数式の分母を因数分解する：

$$1+\frac{5}{x-3} = \frac{2x+4}{(x-1)(x-3)} \ .$$

分数式の分母の最小公倍数 $(x-1)(x-3)$ を両辺に掛ける：

$$\left(1+\frac{5}{x-3}\right)(x-1)(x-3)=\frac{2x+4}{(x-1)(x-3)}(x-1)(x-3),$$

$$(x-1)(x-3)+5(x-1)=2x+4 \ ,$$

$$x^2-4x+3+5x-5=2x+4 \ ,$$

$$x^2-x-6=0 \ ,$$

$(x+2)(x-3)=0$ なので， $x=3$ または $x=-2$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $1+\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{2x+4}{x^2-4x+3}$ を解く．分数式の分母を因数分解する：

$$1+\frac{5}{x-3}=\frac{2x+4}{(x-1)(x-3)}\ .$$

分数式の分母の最小公倍数 $(x-1)(x-3)$ を両辺に掛ける：

$$\left(1+\frac{5}{x-3}\right)(x-1)(x-3)=\frac{2x+4}{(x-1)(x-3)}(x-1)(x-3),$$

$$(x-1)(x-3)+5(x-1)=2x+4\ ,$$

$$x^2-4x+3+5x-5=2x+4\ ,$$

$$x^2-x-6=0\ ,$$

$(x+2)(x-3)=0$ なので， $x=3$ または $x=-2$ ． $x=3$ のとき，与えられた方程式の中の分数式 $\dfrac{5}{x-3}$ の分母は 0 である．

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $1+\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{2x+4}{x^2-4x+3}$ を解く．分数式の分母を因数分解する：

$$1+\frac{5}{x-3}=\frac{2x+4}{(x-1)(x-3)}\ .$$

分数式の分母の最小公倍数 $(x-1)(x-3)$ を両辺に掛ける：

$$\left(1+\frac{5}{x-3}\right)(x-1)(x-3)=\frac{2x+4}{(x-1)(x-3)}(x-1)(x-3),$$

$$(x-1)(x-3)+5(x-1)=2x+4\ ,$$

$$x^2-4x+3+5x-5=2x+4\ ,$$

$$x^2-x-6=0\ ,$$

$(x+2)(x-3)=0$ なので， $x=3$ または $x=-2$ ． $x=3$ のとき，与えられた方程式の中の分数式 $\dfrac{5}{x-3}$ の分母は 0 である． $x=-2$ のとき，与えられた方程式の中の分数式の分母は 0 にならない．

$\boxed{\text{例}}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $1+\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{2x+4}{x^2-4x+3}$ を解く．分数式の分母を因数分解する：

$$1+\frac{5}{x-3} = \frac{2x+4}{(x-1)(x-3)} \ .$$

分数式の分母の最小公倍数 $(x-1)(x-3)$ を両辺に掛ける：

$$\left(1+\frac{5}{x-3}\right)(x-1)(x-3) = \frac{2x+4}{(x-1)(x-3)}(x-1)(x-3),$$

$$(x-1)(x-3)+5(x-1) = 2x+4 \ ,$$

$$x^2-4x+3+5x-5 = 2x+4 \ ,$$

$$x^2-x-6 = 0 \ ,$$

$(x+2)(x-3)=0$ なので， $x=3$ または $x=-2$ ． $x=3$ のとき，与えられた方程式の中の分数式 $\dfrac{5}{x-3}$ の分母は 0 である． $x=-2$ のとき，与えられた方程式の中の分数式の分母は 0 にならない．故に与えられた方程式の解は -2 だけである． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問4.8.1}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $\dfrac{5}{x+3} = \dfrac{3}{x-1} - 2$ を解け.

与えられた方程式の両辺に $(\qquad)(\qquad)$ を掛けて分母を払うと

$$5(\qquad) = 3(\qquad) - 2(\qquad)(\qquad)\ ,$$

$$= 0\ ,$$

$$(x\quad)(x\quad) = 0\ ,$$

$$x = \quad \text{または} \quad x = \quad .$$

どちらのときも与えられた方程式の中の　　　　　　　は 0 にならない. 故に与えられた方程式の解は　と　　とである.

$\boxed{問4.8.1}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $\dfrac{5}{x+3} = \dfrac{3}{x-1} - 2$ を解け.

与えられた方程式の両辺に $(x+3)(x-1)$ を掛けて分母を払うと

$$5(x-1) = 3(x+3) - 2(x+3)(x-1) \ ,$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \ ,$$

$$(x-2)(x+5) = 0 \ ,$$

$$x = 2 \ \text{ または } \ x = -5 \ .$$

どちらのときも与えられた方程式の中の分数式の分母は 0 にならない. 故に与えられた方程式の解は 2 と -5 とである. $\boxed{終}$

$\boxed{問4.8.2}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $\dfrac{3x-2}{x^2-4} = \dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$ を解け.

与えられた方程式を変形して

$$\frac{3x-2}{(\qquad)(\qquad)} = \frac{2x-1}{(\qquad)(\qquad)} \ .$$

両辺に $(\qquad)(\qquad)(\qquad)$ を掛けて分母を払うと

$$\begin{aligned} (3x-2)(\qquad) &= (2x-1)(\qquad) \ , \\ &= \qquad\qquad\qquad \ , \\ &= 0 \ , \\ &= 0 \ , \end{aligned}$$

よって $x =$ 　 または $x =$ 　. $x =$ 　 のとき，与えられた方程式の中の分数式の分母は　　　　　. $x =$ 　 のとき，与えられた方程式の中の分数式の分母は　　　　　. 故に与えられた方程式の解は　　　　　.

$\boxed{\text{問}4.8.2}$ 複素数を表す変数 x に関する方程式 $\dfrac{3x-2}{x^2-4}=\dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$ を解け．

与えられた方程式を変形して

$$\frac{3x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{2x-1}{(x+1)(x-2)}\ .$$

両辺に $(x+1)(x+2)(x-2)$ を掛けて分母を払うと

$$(3x-2)(x+1)=(2x-1)(x+2)\ ,$$

$$3x^2+x-2=2x^2+3x-2\ ,$$

$$x^2-2x=0\ ,$$

$$x(x-2)=0\ ,$$

よって $x=0$ または $x=2$ ． $x=2$ のとき，与えられた方程式の中の分数式の分母は 0 になる． $x=0$ のとき，与えられた方程式の中の分数式の分母は 0 にならない．故に与えられた方程式の解は 0 だけである． $\boxed{\text{終}}$