4.5 2次式の因数分解

定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とする．前節で述べたように，複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ には 2 個の解 $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ と $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ とがあると考える．

定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とする．前節で述べたように，複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ には 2 個の解 $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ と $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ とがあると考える．これら 2 個の解の和は

$$\begin{aligned}\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a} \ .\end{aligned}$$

定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とする．前節で述べたように，複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ には 2 個の解 $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ と $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ とがあると考える．これら 2 個の解の和は

$$\begin{aligned}\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a}\ .\end{aligned}$$

定理 **4.2.2** により $\sqrt{b^2-4ac}^{\,2} = b^2 - 4ac$ なので，2 個の解の積は，

$$\begin{aligned}\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a \cdot 2a} \\ (A+B)(A-B) = A^2 - B^2 &= \frac{(-b)^2 - \sqrt{b^2-4ac}^{\,2}}{4a^2}\end{aligned}$$

定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とする．前節で述べたように，複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ には 2 個の解 $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ と $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ とがあると考える．これら 2 個の解の和は

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$
$$= -\frac{b}{a} \ .$$

定理 **4.2.2** により $\sqrt{b^2-4ac}^{\,2} = b^2 - 4ac$ なので，2 個の解の積は，

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a \cdot 2a}$$
$$= \frac{(-b)^2 - \sqrt{b^2-4ac}^{\,2}}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$
$$= \frac{c}{a} \ .$$

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 個の解 $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ と $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ の和と積とは

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}\ ,$$

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}\ .$$

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 個の解 $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ と $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ の和と積とは

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}\ ,$$

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}\ .$$

つまり，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 個の解を α と β とおくと，

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\ ,\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}\ .$$

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 個の解 $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ と $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ の和と積とは

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}\ ,$$

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}\ .$$

つまり，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 個の解を α と β とおくと，

$$\alpha+\beta\ =\ -\frac{b}{a}\ ,\qquad \alpha\beta\ =\ \frac{c}{a}\ .$$

このことは a,b,c が虚数であってもそのまま成り立つ.

[2 次方程式の解と係数との関係] 定数 a,b,c は複素数を表し $a\neq 0$ とする. 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 個の解を α と β（重解のときは $\beta=\alpha$）とおくと，

$$\alpha+\beta\ =\ -\frac{b}{a}\ \text{ かつ }\ \alpha\beta\ =\ \frac{c}{a}\ .$$

[2 次方程式の解と係数との関係] 定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする. 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 個の解を α と β とおくと,

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} \ .$$

例 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $3x^2 + 5x + 8 = 0$ の 2 個の解を α と β とおく. $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ の値を計算する.

[2 次方程式の解と係数との関係] 定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 個の解を α と β とおくと，

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ かつ } \alpha\beta = \frac{c}{a} .$$

例 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $3x^2 + 5x + 8 = 0$ の 2 個の解を α と β とおく．$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ の値を計算する．2 次方程式 $3x^2 + 5x + 8 = 0$ の解と係数との関係により，

$$\alpha + \beta = -\frac{5}{3} \text{ かつ } \alpha\beta = \frac{8}{3} .$$

[2 次方程式の解と係数との関係] 定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 個の解を α と β とおくと，

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} \ .$$

例 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $3x^2 + 5x + 8 = 0$ の 2 個の解を α と β とおく．$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ の値を計算する．2 次方程式 $3x^2 + 5x + 8 = 0$ の解と係数との関係により，

$$\alpha + \beta = -\frac{5}{3} \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta = \frac{8}{3} \ .$$

これより，

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{40}{9} \ .$$

終

$\boxed{\text{問}4.5.1}$ 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $3x^2+8x+5=0$ の 2 個の解を α と β とおく．$(\alpha-3)(\beta-3)$ の値を計算せよ．

2 次方程式の解と係数との関係より，

$$\alpha+\beta = \qquad , \qquad \alpha\beta = \qquad .$$

これより，

$$(\alpha-3)(\beta-3) = \alpha\beta - 3(\alpha+\beta) + 9 =$$

$\boxed{問 4.5.1}$ 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $3x^2+8x+5=0$ の 2 個の解を α と β とおく. $(\alpha-3)(\beta-3)$ の値を計算せよ.

2 次方程式の解と係数との関係より,

$$\alpha+\beta = -\frac{8}{3}\ , \qquad \alpha\beta = \frac{5}{3}\ .$$

これより,

$$(\alpha-3)(\beta-3) = \alpha\beta - 3(\alpha+\beta) + 9 =$$

$\boxed{問 4.5.1}$ 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $3x^2+8x+5=0$ の 2 個の解を α と β とおく. $(\alpha-3)(\beta-3)$ の値を計算せよ.

2 次方程式の解と係数との関係より,

$$\alpha+\beta = -\frac{8}{3}\ , \qquad \alpha\beta = \frac{5}{3}\ .$$

これより,

$$(\alpha-3)(\beta-3) = \alpha\beta - 3(\alpha+\beta)+9 = -\frac{8}{3} - 3\cdot\frac{5}{3}+9 = \frac{7}{3}\ .$$

$\boxed{終}$

　定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 個の解を α と β とおく．

定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 個の解を α と β とおく．2 次方程式の解と係数との関係より，

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}\ , \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}\ .$$

定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 個の解を α と β とおく．2 次方程式の解と係数との関係より，

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a} \ , \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a} \ .$$

よって，

$$b = -a(\alpha+\beta) \ , \quad c = a\alpha\beta \ .$$

定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 個の解を α と β とおく．2 次方程式の解と係数との関係より，

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \ , \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a} \ .$$

よって，

$$b = -a(\alpha + \beta) \ , \quad c = a\alpha\beta \ .$$

これより

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= ax^2 - a(\alpha + \beta) + a\alpha\beta = a\{x^2 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta\} \\ &= a(x - \alpha)(x - \beta) \ . \end{aligned}$$

　定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 個の解を α と β とおく．2 次方程式の解と係数との関係より，

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \ , \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a} \ .$$

よって，

$$b = -a(\alpha + \beta) \ , \quad c = a\alpha\beta \ .$$

これより

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= ax^2 - a(\alpha + \beta) + a\alpha\beta = a\{x^2 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta\} \\ &= a(x - \alpha)(x - \beta) \ . \end{aligned}$$

[2 次式の因数分解の公式] 定数 a, b, c は複素数を表し $a \neq 0$ とする．複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 個の解を α と β（重解のときは $\beta = \alpha$）とおくと，x の 2 次式 $ax^2 + bx + c$ は次のように因数分解できる：

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) \ .$$

この定理によると，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が分かれば，2 次式 ax^2+bx+c が 1 次式の積に因数分解できる．2 次方程式にはいつも複素数の解があるので，2 次式は係数が複素数の範囲で必ず 1 次式の積の形に因数分解できる．

[2 次式の因数分解の公式]　複素数 a, b, c ($a \neq 0$) に対して，複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 個の解を α と β とおくと，

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) \ .$$

例　係数が実数の範囲で x の 2 次式 $3x^2 + 9x + 5$ を因数分解する．

[2 次式の因数分解の公式] 複素数 a, b, c ($a \neq 0$) に対して，複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 個の解を α と β とおくと，

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 係数が実数の範囲で x の 2 次式 $3x^2+9x+5$ を因数分解する．2 次方程式 $3x^2+9x+5=0$ を解くと，2 次式の解の公式により，

$$x = \frac{-9\pm\sqrt{81-60}}{6} = \frac{-9\pm\sqrt{21}}{6} = -\frac{9\pm\sqrt{21}}{6} \ .$$

ここで負号を分数の前に出すこと．

[2 次式の因数分解の公式] 複素数 a, b, c ($a \neq 0$) に対して，複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 個の解を α と β とおくと，

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta) \ .$$

$\boxed{例}$ 係数が実数の範囲で x の 2 次式 $3x^2+9x+5$ を因数分解する．2 次方程式 $3x^2+9x+5=0$ を解くと，2 次式の解の公式により，

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81-60}}{6} = \frac{-9 \pm \sqrt{21}}{6} = -\frac{9 \pm \sqrt{21}}{6} \ .$$

2 次方程式 $3x^2-9x+5=0$ の解は $-\dfrac{9+\sqrt{21}}{6}$ と $-\dfrac{9-\sqrt{21}}{6}$ となので，x の 2 次式 $3x^2-9x+5$ は次のように因数分解できる：

$$\begin{aligned} 3x^2-9x+5 &= 3\left\{x-\left(-\frac{9+\sqrt{21}}{6}\right)\right\}\left\{x-\left(-\frac{9-\sqrt{21}}{6}\right)\right\} \\ &= 3\left(x+\frac{9+\sqrt{21}}{6}\right)\left(x+\frac{9-\sqrt{21}}{6}\right) \ . \end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}4.5.2}$ 係数が実数の範囲で以下の x の 2 次式を因数分解せよ.

(1) $2x^2 - 6x + 3$.

(2) $\dfrac{1}{2}x^2 + x - 3$.

$\boxed{問4.5.2}$ 係数が実数の範囲で以下の x の 2 次式を因数分解せよ.

(1) $2x^2-6x+3$.　　　**(2)** $\dfrac{1}{2}x^2+x-3$.

(1) x に関する 2 次方程式 $2x^2-6x+3=0$ を解く： $x^2-3x+\dfrac{3}{2}=0$ なので，$x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-6}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}$ ．よって

$$2x^2-6x+3=2\left(x-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right) .$$

$\boxed{問4.5.2}$ 係数が実数の範囲で以下の x の 2 次式を因数分解せよ.

(1) $2x^2-6x+3$.　　**(2)** $\frac{1}{2}x^2+x-3$.

(1) x に関する 2 次方程式 $2x^2-6x+3=0$ を解く： $x^2-3x+\frac{3}{2}=0$ なので, $x=\frac{3\pm\sqrt{9-6}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$ ．よって

$$2x^2-6x+3 = 2\left(x-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right) .$$

(2) x に関する 2 次方程式 $\frac{1}{2}x^2+x-3=0$ を解く： $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+6}}{1}=-1\pm\sqrt{7}$ ．よって

$$\frac{1}{2}x^2+x-3=\frac{1}{2}\left(x+1+\sqrt{7}\right)\left(x+1-\sqrt{7}\right) .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 係数が複素数の範囲で t の 2 次式 $2t^2-6t+5$ を因数分解する.

$\boxed{\text{例}}$ 係数が複素数の範囲で t の 2 次式 $2t^2-6t+5$ を因数分解する．複素数を表す変数 t に関する 2 次方程式 $2t^2-6t+5=0$ を解く．

$\boxed{\text{例}}$ 係数が複素数の範囲で t の 2 次式 $2t^2-6t+5$ を因数分解する．複素数を表す変数 t に関する 2 次方程式 $2t^2-6t+5=0$ を解く． $t^2-3t+\dfrac{5}{2}=0$ なので，2 次方程式の解の公式により，

$$t = \frac{3\pm\sqrt{9-10}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{-1}}{2} = \frac{3\pm i}{2}\ .$$

例　係数が複素数の範囲で t の 2 次式 $2t^2-6t+5$ を因数分解する．複素数を表す変数 t に関する 2 次方程式 $2t^2-6t+5=0$ を解く． $t^2-3t+\dfrac{5}{2}=0$ なので，2 次方程式の解の公式により，

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9-10}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-1}}{2} = \frac{3 \pm i}{2} \ .$$

2 次方程式 $2t^2-6t+5=0$ の解は $\dfrac{3+i}{2}$ と $\dfrac{3-i}{2}$ となので，

$$2t^2-6t+5 = 2\left(t-\frac{3+i}{2}\right)\left(t-\frac{3-i}{2}\right) \ .$$

終

$\boxed{\text{問}4.5.3}$ 係数が複素数の範囲で以下の x の 2 次式を因数分解せよ.

(1) $3x^2 - 8x + 7$.

(2) $2x^2 + 4x + \dfrac{5}{2}$.

$\boxed{\text{問}4.5.3}$ 係数が複素数の範囲で以下の x の 2 次式を因数分解せよ.

(1) $3x^2 - 8x + 7$. **(2)** $2x^2 + 4x + \dfrac{5}{2}$.

(1) x に関する方程式 $3x^2 - 8x + 7 = 0$ を解く： $\dfrac{3}{2}x^2 - 4x + \dfrac{7}{2} = 0$ なので,

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-21}}{3} = \dfrac{4 \pm \sqrt{5}\,i}{3}$. よって

$$3x^2 - 8x + 7 = 3\left(x - \frac{4+\sqrt{5}\,i}{3}\right)\left(x - \frac{4-\sqrt{5}\,i}{3}\right) .$$

$\boxed{\text{問}4.5.3}$ 係数が複素数の範囲で以下の x の 2 次式を因数分解せよ.

(1) $3x^2 - 8x + 7$. **(2)** $2x^2 + 4x + \dfrac{5}{2}$.

(1) x に関する方程式 $3x^2 - 8x + 7 = 0$ を解く: $\dfrac{3}{2}x^2 - 4x + \dfrac{7}{2} = 0$ なので,
$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-21}}{3} = \dfrac{4 \pm \sqrt{5}\,i}{3}$. よって

$$3x^2 - 8x + 7 = 3\left(x - \frac{4+\sqrt{5}\,i}{3}\right)\left(x - \frac{4-\sqrt{5}\,i}{3}\right) .$$

(2) x に関する方程式 $2x^2 + 4x + \dfrac{5}{2} = 0$ を解く: $x^2 + 2x + \dfrac{5}{4} = 0$ なので,
$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-5}}{2} = -1 \pm \dfrac{i}{2}$. よって

$$2x^2 + 4x + \frac{5}{2} = 2\left(x + 1 + \frac{i}{2}\right)\left(x + 1 - \frac{i}{2}\right) .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{例}$　係数が複素数の範囲で x の 3 次式 $2x^3-2x^2-5x+2$ を因数分解する.

$\boxed{\text{例}}$　係数が複素数の範囲で x の 3 次式 $2x^3-2x^2-5x+2$ を因数分解する．$x=2$ のとき $2x^3-2x^2-5x+2=0$ なので，因数定理により，$2x^3-6x^2+3x+2$ は $x-2$ で割り切れて，整商は $2x^2+2x-1$ なので，

$$2x^3-2x^2-5x+2=(x-2)(2x^2+2x-1)\ .$$

$$
\begin{array}{rl}
 & \ \ 2x^2+2x-1 \\ \cline{2-2}
x-2 & \big)\ 2x^3-2x^2-5x+2 \\
 & \ \ 2x^3-4x^2 \\ \cline{2-2}
 & \ \ 2x^2-5x \\
 & \ \ 2x^2-4x \\ \cline{2-2}
 & \ \ -x+2 \\
 & \ \ -x+2 \\ \cline{2-2}
 & \ \ 0
\end{array}
$$

$\boxed{\text{例}}$　係数が複素数の範囲で x の 3 次式 $2x^3-2x^2-5x+2$ を因数分解する． $x=2$ のとき $2x^3-2x^2-5x+2=0$ なので，因数定理により，$2x^3-6x^2+3x+2$ は $x-2$ で割り切れて，整商は $2x^2+2x-1$ なので，

$$2x^3-2x^2-5x+2 = (x-2)(2x^2+2x-1)\ .$$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & 2x^2 & +2x & -1 \\ \hline
x-2 & 2x^3 & -2x^2 & -5x & +2 \\
 & 2x^3 & -4x^2 & & \\ \hline
 & & 2x^2 & -5x & \\
 & & 2x^2 & -4x & \\ \hline
 & & & -x & +2 \\
 & & & -x & +2 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $2x^2+2x-1=0$ つまり $x^2+x-\dfrac{1}{2}=0$ を解くと

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1-(-2)}}{2} = -\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\ .$$

ここで負号を分数の前に出すこと．

$\boxed{\text{例}}$　係数が複素数の範囲で x の 3 次式 $2x^3-2x^2-5x+2$ を因数分解する．$x=2$ のとき $2x^3-2x^2-5x+2=0$ なので，因数定理により，$2x^3-6x^2+3x+2$ は $x-2$ で割り切れて，整商は $2x^2+2x-1$ なので，

$$2x^3-2x^2-5x+2=(x-2)(2x^2+2x-1)\ .$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & +2x & -1 & \\ \hline
x-2 & 2x^3 & -2x^2 & -5x & +2 \\
 & 2x^3 & -4x^2 & & \\ \hline
 & & 2x^2 & -5x & \\
 & & 2x^2 & -4x & \\ \hline
 & & & -x & +2 \\
 & & & -x & +2 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $2x^2+2x-1=0$ つまり $x^2+x-\dfrac{1}{2}=0$ を解くと

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-(-2)}}{2}=-\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\ .$$

2 次方程式 $2x^2+2x-1=0$ の解は $-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ と $-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ となので，

$$\begin{aligned}
2x^2-2x-1&=2\left\{x-\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left\{x-\left(-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\\
&=2\left(x+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\ .
\end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned}
2x^3 - 6x^2 + 3x + 2 &= (x-2)(2x^2 - 2x - 1) \\
&= (x-2)2\left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 2(x-2)\left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \quad .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問4.5.4}$ 係数が複素数の範囲で y の整式 $3y^3-3y^2-2y+4$ を因数分解せよ．

y の整式 $3y^3-3y^2-2y+4$ は 1 次式 y 　　で割り切れる．実際に $3y^3-3y^2-2y+4$ を y 　　で割ると整商は 　　　　　　　　となる：

$$3y^3-3y^2-2y+4=(y\qquad)(\qquad\qquad\qquad).$$

複素数を表す変数 y に関する方程式 　　　　　　　　$=0$ を解く： 　　　　　　　　$=0$

なので $y=$ 　　　　　　　　　　　　　　．従って，

$$\begin{aligned}3y^3-3y^2-2y+4&=(y\qquad)(\qquad\qquad\qquad)\\&=3(y\qquad)\Big(y\qquad\qquad\qquad\Big)\Big(y\qquad\qquad\qquad\Big).\end{aligned}$$

問4.5.4 係数が複素数の範囲で y の整式 $3y^3-3y^2-2y+4$ を因数分解せよ.

y の整式 $3y^3-3y^2-2y+4$ は 1 次式 $y+1$ で割り切れる. 実際に $3y^3-3y^2-2y+4$ を $y+1$ で割ると整商は $3y^2-6y+2$ となる:

$$3y^3-3y^2-2y+4 = (y+1)(3y^2-6y+4) \ .$$

複素数を表す変数 y に関する方程式 $3y^2-6y+4=0$ を解く: $\frac{3}{2}y^2-3y+2=0$ なので $y=\dfrac{3\pm\sqrt{9-12}}{3}=1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$. 従って,

$$\begin{aligned} 3y^3-3y^2-2y+4 &= (y+1)(3y^2-6y+4) \\ &= 3(y+1)\left(y-1-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\left(y-1+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right) \ . \end{aligned}$$

終

　係数が実数の 2 次式の因数分解について，2 次式の因数分解の公式と前節の定理 **4.4** とを組み合わせると次の定理が導かれる（証明は省く）.

[定理 4.5]　実数 a, b, c について， $a \neq 0$ のとき， x の 2 次式 $ax^2 + bx + c$ が係数が実数の範囲で 1 次式の積の形に因数分解できることと $b^2 - 4ac \geq 0$ であることとは同値である.