

4.4 2次方程式の判別式

定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とする. 便宜的に $D = b^2 - 4ac$ とおく.

定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とする. 便宜的に $D = b^2 - 4ac$ とおく.

前節で述べたように, 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式

$ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と}$$

である.

定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とする. 便宜的に $D = b^2 - 4ac$ とおく.

前節で述べたように, 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式

$ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と}$$

である. そこで, 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ には本来 2 個の解 $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

と $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ とがあると考える.

定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とする. 便宜的に $D = b^2 - 4ac$ とおく.

前節で述べたように, 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式

$ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と}$$

である. そこで, 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ には本来 2 個の解 $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

と $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ とがあると考える. $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ のとき, 2 次方程式

$ax^2 + bx + c = 0$ の解は一つだけであるが, これは本来 2 個ある解がたまたま重なって一つになったものとする.

定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とする. 便宜的に $D = b^2 - 4ac$ とおく.

前節で述べたように, 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式

$ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と}$$

である. そこで, 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ には本来 2 個の解 $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

と $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ とがあると考える. $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ のとき, 2 次方程式

$ax^2 + bx + c = 0$ の解は一つだけであるが, これは本来 2 個ある解がたまたま重なって一つになったものと考え. このようにたまたま一つなるときの解を重解あるいは 2 重解という.

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が重解である $\iff \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

$$\begin{aligned} \text{2次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ の解が重解である} &\iff \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\ &\iff -b + \sqrt{D} = -b - \sqrt{D} \\ &\iff 2\sqrt{D} = 0 \\ &\iff \sqrt{D} = 0 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ の解が重解である} &\iff \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\ &\iff -b + \sqrt{D} = -b - \sqrt{D} \\ &\iff 2\sqrt{D} = 0 \\ &\iff \sqrt{D} = 0 ; \end{aligned}$$

$\sqrt{D} = 0$ ならば, $\sqrt{D}^2 = 0$, 定理 2.8.2 により $\sqrt{D}^2 = D$ なので $D = 0$.

[定理 2.8.2] 任意の実数 a について $\sqrt{a^2} = |a|$.

$$\begin{aligned} \text{2次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ の解が重解である} &\iff \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\ &\iff -b + \sqrt{D} = -b - \sqrt{D} \\ &\iff 2\sqrt{D} = 0 \\ &\iff \sqrt{D} = 0 ; \end{aligned}$$

$\sqrt{D} = 0$ ならば, $\sqrt{D^2} = 0$, 定理 2.8.2 により $\sqrt{D^2} = D$ なので $D = 0$.
逆に, $D = 0$ ならば $\sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{2次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ の解が重解である} &\iff \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\ &\iff -b + \sqrt{D} = -b - \sqrt{D} \\ &\iff 2\sqrt{D} = 0 \\ &\iff \sqrt{D} = 0 ; \end{aligned}$$

$\sqrt{D} = 0$ ならば, $\sqrt{D^2} = 0$, 定理 2.8.2 により $\sqrt{D^2} = D$ なので $D = 0$.
逆に, $D = 0$ ならば $\sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$. よって

$$\sqrt{D} = 0 \iff D = 0 .$$

$$\begin{aligned}
 \text{2次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ の解が重解である} &\iff \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\
 &\iff -b + \sqrt{D} = -b - \sqrt{D} \\
 &\iff 2\sqrt{D} = 0 \\
 &\iff \sqrt{D} = 0 ;
 \end{aligned}$$

$\sqrt{D} = 0$ ならば, $\sqrt{D}^2 = 0$, 定理 2.8.2 により $\sqrt{D}^2 = D$ なので $D = 0$.
 逆に, $D = 0$ ならば $\sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$. よって

$$\sqrt{D} = 0 \iff D = 0 .$$

こうして次のことが分かる :

$$\text{2次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ の解が重解である} \iff D = 0 .$$

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が重解でないとき、つまり $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \neq \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ のとき、方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は異なる 2 個の解を持つという。

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が重解でないとき、つまり $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \neq \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ のとき、方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は異なる 2 個の解を持つという。

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は異なる 2 個の解を持つ

\iff 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は重解でない

$\iff D \neq 0$.

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と}$$

である.

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と}$$

である. $D \geq 0$ のとき, \sqrt{D} は実数なので, 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解 $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ と $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ とはどちらも実数である.

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と}$$

である. $D \geq 0$ のとき, \sqrt{D} は実数なので, 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解 $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ と $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ とはどちらも実数である. $D < 0$ のとき, 2.8 節

で述べた負の数の根号の値の定義により $\sqrt{D} = i\sqrt{-D}$,

[負の数の根号の値の定義] $a < 0$ である実数 a について $\sqrt{a} = i\sqrt{-a}$.

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と}$$

である. $D \geq 0$ のとき, \sqrt{D} は実数なので, 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解 $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ と $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ とはどちらも実数である. $D < 0$ のとき, 2.8 節

で述べた負の数の根号の値の定義により $\sqrt{D} = i\sqrt{-D}$, $-D > 0$ なので定理 2.6.4 により $\sqrt{-D} > 0$, 定理 2.5.3 により $\sqrt{-D} \neq 0$;

[定理 2.6.4] 任意の実数 a について, $a > 0$ ならば $\sqrt{a} > 0$.

[定理 2.5.3] 任意の実数 a, b について, $a > b$ ならば $a \neq b$.

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と}$$

である. $D \geq 0$ のとき, \sqrt{D} は実数なので, 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解 $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ と $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ とはどちらも実数である. $D < 0$ のとき, 2.8 節

で述べた負の数の根号の値の定義により $\sqrt{D} = i\sqrt{-D}$, $-D > 0$ なので定理 2.6.4 により $\sqrt{-D} > 0$, 定理 2.5.3 により $\sqrt{-D} \neq 0$; 定理 2.9.3 により,

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解

$$\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a} \quad \text{と} \quad \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a} \quad \text{と}$$

はどちらも虚数である.

[定理 2.9.3] 任意の実数 a, b について, $a + ib$ が虚数である $\iff b \neq 0$.

複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{と}$$

である. $D \geq 0$ のとき, \sqrt{D} は実数なので, 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解 $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ と $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ とはどちらも実数である. $D < 0$ のとき, 2.8 節

で述べた負の数の根号の値の定義により $\sqrt{D} = i\sqrt{-D}$, $-D > 0$ なので定理 2.6.4 により $\sqrt{-D} > 0$, 定理 2.5.3 により $\sqrt{-D} \neq 0$; 定理 2.9.3 により,

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解

$$\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a} \quad \text{と} \quad \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a} \quad \text{と}$$

はどちらも虚数である. このように, 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は, $D \geq 0$ のときどちらも実数であり, $D < 0$ のときどちらも虚数である.

$D \geq 0$ ならば方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解はどちらも実数である.

$D < 0$ ならば方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解はどちらも虚数である.

$D \geq 0$ ならば方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解はどちらも実数である.

$D < 0$ ならば方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解はどちらも虚数である.

2 番目の述語の対偶 (1.6 節参照) をとる :

“方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解がどちらも虚数” でなければ $D \not\geq 0$.

$D \geq 0$ ならば方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解はどちらも実数である.

$D < 0$ ならば方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解はどちらも虚数である.

2 番目の述語の対偶 (1.6 節参照) をとる :

“方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解がどちらも虚数” でなければ $D \not\geq 0$.

方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解がどちらも実数ならば, “方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解がどちらも虚数” でないので, $D \not\geq 0$, 法則 2.5.2 により $D \geq 0$.

[法則 2.5.2] 実数 a と b について, $a \not\geq b \iff a \geq b$.

$D \geq 0$ ならば方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解はどちらも実数である.

$D < 0$ ならば方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解はどちらも虚数である.

2 番目の述語の対偶 (1.6 節参照) をとる :

“方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解がどちらも虚数” でなければ $D \not\geq 0$.

方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解がどちらも実数ならば, “方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解がどちらも虚数” でないので, $D \not\geq 0$, 法則 2.5.2 により $D \geq 0$. つまり次のようになる :

方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解がどちらも実数であるならば $D \geq 0$.

$D \geq 0$ ならば方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解はどちらも実数である。

$D < 0$ ならば方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解はどちらも虚数である。

2 番目の述語の対偶 (1.6 節参照) をとる：

“方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解がどちらも虚数” でなければ $D \not\geq 0$.

方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解がどちらも実数ならば，“方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解がどちらも虚数” でないので， $D \not\geq 0$ ，法則 2.5.2 により $D \geq 0$. つまり次のようになる：

方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解がどちらも実数であるならば $D \geq 0$.

このようにして次のことが分かる：

$D \geq 0 \iff$ 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解がどちらも実数である；

$D < 0 \iff$ 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解がどちらも虚数である .

これまでの結果をまとめる.

[定理 4.4] 定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とする. 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について,

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ が異なる 2 個の実数解を持つ} \iff b^2 - 4ac > 0 ,$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ が 1 個の実数解 (重解) を持つ} \iff b^2 - 4ac = 0 ,$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ が異なる 2 個の虚数解を持つ} \iff b^2 - 4ac < 0 .$$

これまでの結果をまとめる.

[定理 4.4] 定数 a, b, c は実数を表し $a \neq 0$ とする. 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について,

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ が異なる 2 個の実数解を持つ} \iff b^2 - 4ac > 0 ,$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ が 1 個の実数解 (重解) を持つ} \iff b^2 - 4ac = 0 ,$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ が異なる 2 個の虚数解を持つ} \iff b^2 - 4ac < 0 .$$

定数 a, b, c が実数で $a \neq 0$ のとき, 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ に対して $b^2 - 4ac$ を判別式という.

例 実数を表す定数 c について以下のそれぞれのときに、複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2 - 8x + c = 0$ が、異なる 2 個の実数を解とするか、解が重解であるか、異なる 2 個の虚数を解とするか、調べる.

(1) $c = 5$ のとき.

(2) $c = 7$ のとき.

例 実数を表す定数 c について以下のそれぞれのときに、複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2 - 8x + c = 0$ が、異なる 2 個の実数を解とするか、解が重解であるか、異なる 2 個の虚数を解とするか、調べる.

(1) $c = 5$ のとき.

(2) $c = 7$ のとき.

(1) $c = 5$ のとき、方程式は $3x^2 - 8x + 5 = 0$, この方程式の判別式の値は $(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64 - 60 > 0$. 故に $c = 5$ のとき与えられた方程式は異なる 2 個の実数を解とする.

例 実数を表す定数 c について以下のそれぞれのときに、複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2 - 8x + c = 0$ が、異なる 2 個の実数を解とするか、解が重解であるか、異なる 2 個の虚数を解とするか、調べる。

(1) $c = 5$ のとき.

(2) $c = 7$ のとき.

(1) $c = 5$ のとき、方程式は $3x^2 - 8x + 5 = 0$ 、この方程式の判別式の値は $(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64 - 60 > 0$. 故に $c = 5$ のとき与えられた方程式は異なる 2 個の実数を解とする.

(2) $c = 7$ のとき、方程式は $3x^2 - 8x + 7 = 0$ 、この方程式の判別式の値は $(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = 64 - 84 < 0$. 故に $c = 7$ のとき与えられた方程式は異なる 2 個の虚数を解とする.

終

問4.4 実数を表す定数 b について以下のそれぞれのときに、複素数を表す変数 x に関する方程式 $2x^2 + bx + 8 = 0$ が、異なる2個の実数を解とするか、解が重解であるか、異なる2個の虚数を解とするか、調べなさい。

(1) $b = 5$ のとき. (2) $b = 8$ のとき. (3) $b = 9$ のとき.

(1) $b = 5$ のとき、判別式の値は $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 8 = 25 - 64 = -39$ である。 $\Delta < 0$ であるので、与えられた方程式は異なる2個の虚数を解とする。

(2) $b = 8$ のとき、判別式の値は $\Delta = 8^2 - 4 \times 2 \times 8 = 64 - 64 = 0$ である。 $\Delta = 0$ であるので、与えられた方程式は重解を持つ。

(3) $b = 9$ のとき、判別式の値は $\Delta = 9^2 - 4 \times 2 \times 8 = 81 - 64 = 17$ である。 $\Delta > 0$ であるので、与えられた方程式は異なる2個の実数を解とする。

問4.4 実数を表す定数 b について以下のそれぞれのときに、複素数を表す変数 x に関する方程式 $2x^2 + bx + 8 = 0$ が、異なる2個の実数を解とするか、解が重解であるか、異なる2個の虚数を解とするか、調べなさい。

(1) $b = 5$ のとき. (2) $b = 8$ のとき. (3) $b = 9$ のとき.

(1) $b = 5$ のとき、判別式の値は $5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 < 0$ なので、与えられた方程式は異なる2個の虚数を解とする。

(2) $b = 8$ のとき、判別式の値は _____ なので、与えられた方程式の解は _____

(3) $b = 9$ のとき、判別式の値は _____ なので、与えられた方程式は _____

問4.4 実数を表す定数 b について以下のそれぞれのときに、複素数を表す変数 x に関する方程式 $2x^2 + bx + 8 = 0$ が、異なる2個の実数を解とするか、解が重解であるか、異なる2個の虚数を解とするか、調べなさい。

(1) $b = 5$ のとき. (2) $b = 8$ のとき. (3) $b = 9$ のとき.

(1) $b = 5$ のとき、判別式の値は $5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 < 0$ なので、与えられた方程式は異なる2個の虚数を解とする。

(2) $b = 8$ のとき、判別式の値は $8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 0$ なので、与えられた方程式の解は重解である。

(3) $b = 9$ のとき、判別式の値は _____ なので、与えられた方程式は _____

問4.4 実数を表す定数 b について以下のそれぞれのときに、複素数を表す変数 x に関する方程式 $2x^2 + bx + 8 = 0$ が、異なる2個の実数を解とするか、解が重解であるか、異なる2個の虚数を解とするか、調べなさい。

(1) $b = 5$ のとき. (2) $b = 8$ のとき. (3) $b = 9$ のとき.

(1) $b = 5$ のとき、判別式の値は $5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 < 0$ なので、与えられた方程式は異なる2個の虚数を解とする。

(2) $b = 8$ のとき、判別式の値は $8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 0$ なので、与えられた方程式の解は重解である。

(3) $b = 9$ のとき、判別式の値は $9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 > 0$ なので、与えられた方程式は異なる2個の実数を解とする。

終