

4.2 2次方程式の解

変数 x に関する 2 次方程式とは次の形に整理できる方程式のことである：

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \text{ は } x \text{ と無関係な定数で } a \neq 0).$$

変数 x に関する 2 次方程式とは次の形に整理できる方程式のことである：

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \text{ は } x \text{ と無関係な定数で } a \neq 0).$$

係数が実数である 2 次方程式を解くために次のような式変形が重要になる：
 x の 2 次式 $x^2 \pm \square x$ に x の係数 $\pm \square$ の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{\square}{2}\right)^2$ を加えて、乗法公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ (複号同順) を適用すると、

$$x^2 \pm \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 \pm 2 \cdot \frac{\square}{2} x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x \pm \frac{\square}{2}\right)^2 \quad (\text{複号同順}).$$

例 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ を解く.

例 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ を解く. 左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にするために両辺から 9 を引く:

$$2x^2 + 10x = -9 .$$

例 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ を解く. 左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にするために両辺から 9 を引く:

$$2x^2 + 10x = -9 .$$

x^2 の係数を 1 にするために両辺を 2 で割る:

$$x^2 + 5x = -\frac{9}{2} .$$

例 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ を解く. 左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にするために両辺から 9 を引く:

$$2x^2 + 10x = -9 .$$

x^2 の係数を 1 にするために両辺を 2 で割る:

$$x^2 + 5x = -\frac{9}{2} .$$

左辺を $x^2 + \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 + 2\frac{\square}{2}x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\square}{2}\right)^2$ の形にする.

例 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ を解く. 左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にするために両辺から 9 を引く:

$$2x^2 + 10x = -9 .$$

x^2 の係数を 1 にするために両辺を 2 で割る:

$$x^2 + 5x = -\frac{9}{2} .$$

左辺を $x^2 + \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 + 2\frac{\square}{2}x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\square}{2}\right)^2$ の形にする. そのために左辺の x の係数 5 の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ を両辺に足す:

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 .$$

例 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ を解く. 左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にするために両辺から 9 を引く:

$$2x^2 + 10x = -9 .$$

x^2 の係数を 1 にするために両辺を 2 で割る:

$$x^2 + 5x = -\frac{9}{2} .$$

左辺を $x^2 + \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 + 2\frac{\square}{2}x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\square}{2}\right)^2$ の形にする. そのために左辺の x の係数 5 の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ を両辺に足す:

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 .$$

この等式の左辺は $x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$ で,

例 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ を解く. 左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にするために両辺から 9 を引く:

$$2x^2 + 10x = -9.$$

x^2 の係数を 1 にするために両辺を 2 で割る:

$$x^2 + 5x = -\frac{9}{2}.$$

左辺を $x^2 + \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 + 2\frac{\square}{2}x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\square}{2}\right)^2$ の形にする. そのために左辺の x の係数 5 の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ を両辺に足す:

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

この等式の左辺は $x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$ で, 右辺は $-\frac{9}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \frac{25}{4} = \frac{7}{4}$ なので,

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}.$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} = \sqrt{\frac{7}{4}}^2$$

[定理 2.8.2] 任意の実数 a について $a = \sqrt{a^2}$.

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} = \sqrt{\frac{7}{4}}^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2,$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} = \sqrt{\frac{7}{4}}^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 ,$$

$$x + \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} .$$

[定理 2.3.2] 任意の数 a, b について, $a^2 = b^2 \iff a = \pm b$.

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} = \sqrt{\frac{7}{4}}^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 ,$$

$$x + \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} .$$

両辺から $\frac{5}{2}$ を引くと

$$x = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{5}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{7}}{2} \quad (\text{複号同順}) ,$$

$$x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2} .$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} = \sqrt{\frac{7}{4}}^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2,$$

$$x + \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

両辺から $\frac{5}{2}$ を引くと

$$x = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{5}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{7}}{2} \quad (\text{複号同順}),$$

$$x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

このように等式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ から等式 $x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$ が導かれる。

このように等式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ から等式 $x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$ が導かれて、

このように等式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ から等式 $x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$ が導かれて、この間に現れる等式は元の方程式と同値である：

$$2x^2 + 10x + 9 = 0 \iff 2x^2 + 10x = -9 \iff x^2 + 5x = -\frac{9}{2}$$

このように等式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ から等式 $x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$ が導かれて、この間に現れる等式は元の方程式と同値である：

$$\begin{aligned} 2x^2 + 10x + 9 = 0 &\iff 2x^2 + 10x = -9 \iff x^2 + 5x = -\frac{9}{2} \\ &\iff x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \frac{25}{4} \end{aligned}$$

このように等式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ から等式 $x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$ が導かれて、この間に現れる等式は元の方程式と同値である：

$$\begin{aligned} 2x^2 + 10x + 9 = 0 &\iff 2x^2 + 10x = -9 \iff x^2 + 5x = -\frac{9}{2} \\ &\iff x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \frac{25}{4} \\ &\iff \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} \iff \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{7}{4}}^2 \end{aligned}$$

このように等式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ から等式 $x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$ が導かれて、この間に現れる等式は元の方程式と同値である：

$$\begin{aligned} 2x^2 + 10x + 9 = 0 &\iff 2x^2 + 10x = -9 \iff x^2 + 5x = -\frac{9}{2} \\ &\iff x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \frac{25}{4} \\ &\iff \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} \iff \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{7}{4}}^2 \\ &\iff \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

このように等式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ から等式 $x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$ が導かれて、この間に現れる等式は元の方程式と同値である：

$$\begin{aligned} 2x^2 + 10x + 9 = 0 &\iff 2x^2 + 10x = -9 \iff x^2 + 5x = -\frac{9}{2} \\ &\iff x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \frac{25}{4} \\ &\iff \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} \iff \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{7}{4}}^2 \\ &\iff \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 \\ &\iff x + \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \iff x = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

このように等式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ から等式 $x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$ が導かれて、この間に現れる等式は元の方程式と同値である：

$$\begin{aligned} 2x^2 + 10x + 9 = 0 &\iff 2x^2 + 10x = -9 \iff x^2 + 5x = -\frac{9}{2} \\ &\iff x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \frac{25}{4} \\ &\iff \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} \iff \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{7}{4}}^2 \\ &\iff \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 \\ &\iff x + \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \iff x = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \\ &\iff x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2} . \end{aligned}$$

このように等式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ から等式 $x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$ が導かれて、この間に現れる等式は元の方程式と同値である：

$$\begin{aligned}2x^2 + 10x + 9 = 0 &\iff 2x^2 + 10x = -9 \iff x^2 + 5x = -\frac{9}{2} \\ &\iff x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + \frac{25}{4} \\ &\iff \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} \iff \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \sqrt{\frac{7}{4}}^2 \\ &\iff \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 \\ &\iff x + \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \iff x = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \\ &\iff x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2} .\end{aligned}$$

故に、 x に関する方程式 $2x^2 + 10x + 9 = 0$ を解くと $x = -\frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$. □ 終

例 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ を解く.

例 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ を解く. 左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にするために両辺から 29 を引く:

$$4x^2 - 12x = -29 .$$

例 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ を解く. 左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にするために両辺から 29 を引く:

$$4x^2 - 12x = -29 .$$

x^2 の係数を 1 にするために両辺を 4 で割る:

$$x^2 - 3x = -\frac{29}{4} .$$

例 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ を解く. 左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にするために両辺から 29 を引く:

$$4x^2 - 12x = -29 .$$

x^2 の係数を 1 にするために両辺を 4 で割る:

$$x^2 - 3x = -\frac{29}{4} .$$

左辺を $x^2 - \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 + 2\frac{\square}{2}x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{\square}{2}\right)^2$ の形にする

例 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ を解く. 左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にするために両辺から 29 を引く:

$$4x^2 - 12x = -29.$$

x^2 の係数を 1 にするために両辺を 4 で割る:

$$x^2 - 3x = -\frac{29}{4}.$$

左辺を $x^2 - \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 + 2\frac{\square}{2}x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{\square}{2}\right)^2$ の形にするために、左辺の x の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ を両辺に足す:

$$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{29}{4} + \frac{9}{4}.$$

例 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ を解く。左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にするために両辺から 29 を引く：

$$4x^2 - 12x = -29 .$$

x^2 の係数を 1 にするために両辺を 4 で割る：

$$x^2 - 3x = -\frac{29}{4} .$$

左辺を $x^2 - \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 + 2\frac{\square}{2}x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{\square}{2}\right)^2$ の形にするために、左辺の x の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ を両辺に足す：

$$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{29}{4} + \frac{9}{4} .$$

左辺は $x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ で、

例 複素数を表す変数 x に関する 2 次方程式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ を解く。左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にするために両辺から 29 を引く：

$$4x^2 - 12x = -29 .$$

x^2 の係数を 1 にするために両辺を 4 で割る：

$$x^2 - 3x = -\frac{29}{4} .$$

左辺を $x^2 - \square x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = x^2 + 2\frac{\square}{2}x + \left(\frac{\square}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{\square}{2}\right)^2$ の形にするために、左辺の x の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗 $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ を両辺に足す：

$$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{29}{4} + \frac{9}{4} .$$

左辺は $x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ で、右辺は $-\frac{29}{4} + \frac{9}{4} = -5$ なので、

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -5 .$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -5$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -5 = \sqrt{-5}^2$$

[定理 2.8.2] 任意の実数 a について $a = \sqrt{a^2}$.

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -5 = \sqrt{-5}^2 = \{\sqrt{-(-5)}i\}^2 = (\sqrt{5}i)^2 ,$$

[負の数の根号の値の定義] $a < 0$ である実数 a について $\sqrt{a} = \sqrt{-a}i$.

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -5 = \sqrt{-5}^2 = \{\sqrt{-(-5)}i\}^2 = (\sqrt{5}i)^2 ,$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{5}i ,$$

[定理 2.3.2] 任意の数 a, b について, $a^2 = b^2 \iff a = \pm b$.

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -5 = \sqrt{-5}^2 = \{\sqrt{-(-5)}i\}^2 = (\sqrt{5}i)^2 ,$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{5}i ,$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i .$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -5 = \sqrt{-5}^2 = \{\sqrt{-(-5)}i\}^2 = (\sqrt{5}i)^2 ,$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{5}i ,$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i .$$

このように等式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ から等式 $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i$ が導かれる。

等式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ から等式 $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i$ が導かれ,

等式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ から等式 $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i$ が導かれ、この間に現れる等式は元の方程式と同値である：

$$4x^2 - 12x + 29 = 0 \iff 4x^2 - 12x = -29 \iff x^2 - 3x = -\frac{29}{4}$$

等式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ から等式 $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i$ が導かれ、この間に現れる等式は元の方程式と同値である：

$$\begin{aligned}4x^2 - 12x + 29 = 0 &\iff 4x^2 - 12x = -29 \iff x^2 - 3x = -\frac{29}{4} \\ &\iff x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{29}{4} + \frac{9}{4}\end{aligned}$$

等式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ から等式 $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i$ が導かれ、この間に現れる等式は元の方程式と同値である：

$$\begin{aligned}4x^2 - 12x + 29 = 0 &\iff 4x^2 - 12x = -29 \iff x^2 - 3x = -\frac{29}{4} \\ &\iff x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{29}{4} + \frac{9}{4} \\ &\iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -5 \iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \sqrt{-5}^2\end{aligned}$$

等式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ から等式 $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i$ が導かれ、この間に現れる等式は元の方程式と同値である：

$$\begin{aligned}4x^2 - 12x + 29 = 0 &\iff 4x^2 - 12x = -29 \iff x^2 - 3x = -\frac{29}{4} \\ &\iff x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{29}{4} + \frac{9}{4} \\ &\iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -5 \iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \sqrt{-5}^2 \\ &\iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = (\sqrt{5}i)^2 \iff x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{5}i\end{aligned}$$

等式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ から等式 $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i$ が導かれ、この間に現れる等式は元の方程式と同値である：

$$\begin{aligned}4x^2 - 12x + 29 = 0 &\iff 4x^2 - 12x = -29 \iff x^2 - 3x = -\frac{29}{4} \\ &\iff x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{29}{4} + \frac{9}{4} \\ &\iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -5 \iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \sqrt{-5}^2 \\ &\iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = (\sqrt{5}i)^2 \iff x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{5}i \\ &\iff x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i .\end{aligned}$$

等式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ から等式 $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i$ が導かれ、この間に現れる等式は元の方程式と同値である：

$$\begin{aligned}4x^2 - 12x + 29 = 0 &\iff 4x^2 - 12x = -29 \iff x^2 - 3x = -\frac{29}{4} \\ &\iff x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{29}{4} + \frac{9}{4} \\ &\iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -5 \iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \sqrt{-5}^2 \\ &\iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = (\sqrt{5}i)^2 \iff x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{5}i \\ &\iff x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i .\end{aligned}$$

故に、 x に関する方程式 $4x^2 - 12x + 29 = 0$ を解くと $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{5}i$. □

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $5x^2 = 2 - 6x$ を解く.

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $5x^2 = 2 - 6x$ を解く.

左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にする : $5x^2 + 6x = 2$.

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $5x^2 = 2 - 6x$ を解く.

左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にする： $5x^2 + 6x = 2$.

左辺の x^2 の係数で両辺を割る： $x^2 + \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}$.

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $5x^2 = 2 - 6x$ を解く.

左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にする： $5x^2 + 6x = 2$.

左辺の x^2 の係数で両辺を割る： $x^2 + \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}$.

左辺の x の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗を両辺に足す： $x^2 + 2 \cdot \frac{3}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{25} = \frac{19}{25}$.

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $5x^2 = 2 - 6x$ を解く.

左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にする： $5x^2 + 6x = 2$.

左辺の x^2 の係数で両辺を割る： $x^2 + \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}$.

左辺の x の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗を両辺に足す： $x^2 + 2 \cdot \frac{3}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{25} = \frac{19}{25}$.

両辺を 2 乗の形にする： $\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 = \sqrt{\frac{19}{25}}^2 = \left(\frac{\sqrt{19}}{5}\right)^2$.

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $5x^2 = 2 - 6x$ を解く.

左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にする： $5x^2 + 6x = 2$.

左辺の x^2 の係数で両辺を割る： $x^2 + \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}$.

左辺の x の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗を両辺に足す： $x^2 + 2 \cdot \frac{3}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{25} = \frac{19}{25}$.

両辺を 2 乗の形にする： $\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 = \sqrt{\frac{19}{25}}^2 = \left(\frac{\sqrt{19}}{5}\right)^2$.

両辺を 2 乗を外す：右辺に複号が現れる： $x + \frac{3}{5} = \pm \frac{\sqrt{19}}{5}$.

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $5x^2 = 2 - 6x$ を解く.

左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にする： $5x^2 + 6x = 2$.

左辺の x^2 の係数で両辺を割る： $x^2 + \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}$.

左辺の x の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗を両辺に足す： $x^2 + 2 \cdot \frac{3}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{25} = \frac{19}{25}$.

両辺を 2 乗の形にする： $\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 = \sqrt{\frac{19}{25}}^2 = \left(\frac{\sqrt{19}}{5}\right)^2$.

両辺を 2 乗を外す：右辺に複号が現れる： $x + \frac{3}{5} = \pm \frac{\sqrt{19}}{5}$.

移項する： $x = -\frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{19}}{5}$.

$$x = -\frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}.$$

終

問4.2.1 複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2 = 1 - 5x$ を解け.

方程式 $3x^2 = 1 - 5x$ より,

$$3x^2 + 5x = 1,$$

$$x^2 + \frac{5}{3}x = \frac{1}{3},$$

$$x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2,$$

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{25}{36}} = \left(\frac{\sqrt{29}}{6}\right)^2,$$

$$x + \frac{5}{6} = \pm \frac{\sqrt{29}}{6},$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{6}.$$

問4.2.1 複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2 = 1 - 5x$ を解け.

方程式 $3x^2 = 1 - 5x$ より,

$$3x^2 + 5x = 1 ,$$

$$x^2 + \frac{5}{3}x = \frac{1}{3} ,$$

$$x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{25}{36} = \frac{37}{36} ,$$

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \sqrt{\frac{37}{36}}^2 = \left(\frac{\sqrt{37}}{6}\right)^2 ,$$

$$x + \frac{5}{6} = \pm \frac{\sqrt{37}}{6} ,$$

$$x = -\frac{5 \pm \sqrt{37}}{6} .$$

終

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $\frac{1}{2}x^2 + 17 = 5x$ を解く.

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $\frac{1}{2}x^2 + 17 = 5x$ を解く.

左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にする： $\frac{1}{2}x^2 - 5x = -17$.

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $\frac{1}{2}x^2 + 17 = 5x$ を解く.

左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にする： $\frac{1}{2}x^2 - 5x = -17$.

左辺の x^2 の係数で両辺を割る： $x^2 - 10x = -34$.

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $\frac{1}{2}x^2 + 17 = 5x$ を解く.

左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にする： $\frac{1}{2}x^2 - 5x = -17$.

左辺の x^2 の係数で両辺を割る： $x^2 - 10x = -34$.

左辺の x の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗を両辺に足す： $x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 = -34 + 25 = -9$.

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $\frac{1}{2}x^2 + 17 = 5x$ を解く.

左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にする： $\frac{1}{2}x^2 - 5x = -17$.

左辺の x^2 の係数で両辺を割る： $x^2 - 10x = -34$.

左辺の x の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗を両辺に足す： $x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 = -34 + 25 = -9$.

両辺を 2 乗の形にする： $(x - 5)^2 = \sqrt{-9}^2 = (3i)^2$.

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $\frac{1}{2}x^2 + 17 = 5x$ を解く.

左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にする： $\frac{1}{2}x^2 - 5x = -17$.

左辺の x^2 の係数で両辺を割る： $x^2 - 10x = -34$.

左辺の x の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗を両辺に足す： $x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 = -34 + 25 = -9$.

両辺を 2 乗の形にする： $(x - 5)^2 = \sqrt{-9}^2 = (3i)^2$.

両辺を 2 乗を外す：右辺に複号が現れる： $x - 5 = \pm 3i$.

例 複素数を表す変数 x に関する方程式 $\frac{1}{2}x^2 + 17 = 5x$ を解く.

左辺を x^2 の項と x の項とに右辺を定数にする： $\frac{1}{2}x^2 - 5x = -17$.

左辺の x^2 の係数で両辺を割る： $x^2 - 10x = -34$.

左辺の x の係数の $\frac{1}{2}$ 倍の 2 乗を両辺に足す： $x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 = -34 + 25 = -9$.

両辺を 2 乗の形にする： $(x - 5)^2 = \sqrt{-9}^2 = (3i)^2$.

両辺を 2 乗を外す：右辺に複号が現れる： $x - 5 = \pm 3i$.

移項する： $x = 5 \pm 3i$.

終

問4.2.2 複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2 + \frac{20}{3} = 8x$ を解け.

方程式 $3x^2 + \frac{20}{3} = 8x$ より,

$$3x^2 - 8x = \quad ,$$

$$x^2 - x = \quad ,$$

$$x^2 - x + \left(\quad \right)^2 = \quad = \quad ,$$

$$\left(x - \quad \right)^2 = \sqrt{\quad}^2 = \left(\quad \right)^2 = \left(\quad \right)^2 ,$$

$$x - \quad = \pm \quad ,$$

$$x = \quad .$$

問4.2.2 複素数を表す変数 x に関する方程式 $3x^2 + \frac{20}{3} = 8x$ を解け.

方程式 $3x^2 + \frac{20}{3} = 8x$ より,

$$3x^2 - 8x = -\frac{20}{3},$$

$$x^2 - \frac{8}{3}x = -\frac{20}{9},$$

$$x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{20}{9} + \frac{16}{9} = -\frac{4}{9},$$

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = \sqrt{-\frac{4}{9}}^2 = \left(\sqrt{\frac{4}{9}}i\right)^2 = \left(\frac{2}{3}i\right)^2,$$

$$x - \frac{4}{3} = \pm \frac{2}{3}i,$$

$$x = \frac{4 \pm 2i}{3}.$$

終

例 実数を表す定数 k に対して、実数を表す変数 x に関する方程式 $x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 = 0$ を解く.

例 実数を表す定数 k に対して、実数を表す変数 x に関する方程式 $x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 = 0$ を解く. x の2次式 $x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8$ は k についてみると高々1次の式なので、 k について整理して因数分解する：

例 実数を表す定数 k に対して、実数を表す変数 x に関する方程式 $x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 = 0$ を解く. x の2次式 $x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8$ は k についてみると高々1次の式なので、 k について整理して因数分解する：

$$\begin{aligned}x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 &= (3x + 6)k + x^2 - 2x - 8 \\ &= 3(x + 2)k + (x + 2)(x - 4) \\ &= (x + 2)(3k + x - 4) .\end{aligned}$$

例 実数を表す定数 k に対して、実数を表す変数 x に関する方程式 $x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 = 0$ を解く. x の2次式 $x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8$ は k についてみると高々1次の式なので、 k について整理して因数分解する：

$$\begin{aligned}x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 &= (3x + 6)k + x^2 - 2x - 8 \\ &= 3(x + 2)k + (x + 2)(x - 4) \\ &= (x + 2)(3k + x - 4) .\end{aligned}$$

よって、

$$x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 = 0 \iff (x + 2)(x + 3k - 4) = 0$$

例 実数を表す定数 k に対して、実数を表す変数 x に関する方程式 $x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 = 0$ を解く. x の2次式 $x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8$ は k についてみると高々1次の式なので、 k について整理して因数分解する:

$$\begin{aligned}x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 &= (3x + 6)k + x^2 - 2x - 8 \\ &= 3(x + 2)k + (x + 2)(x - 4) \\ &= (x + 2)(3k + x - 4) .\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 = 0 &\iff (x + 2)(x + 3k - 4) = 0 \\ &\iff x + 2 = 0 \text{ または } x + 3k - 4 = 0\end{aligned}$$

[定理 2.1.1] 任意の数 a, b について、 $ab = 0 \iff a = 0$ または $b = 0$.

例 実数を表す定数 k に対して、実数を表す変数 x に関する方程式 $x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 = 0$ を解く. x の2次式 $x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8$ は k についてみると高々1次の式なので、 k について整理して因数分解する:

$$\begin{aligned}x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 &= (3x + 6)k + x^2 - 2x - 8 \\ &= 3(x + 2)k + (x + 2)(x - 4) \\ &= (x + 2)(3k + x - 4) .\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 = 0 &\iff (x + 2)(x + 3k - 4) = 0 \\ &\iff x + 2 = 0 \text{ または } x + 3k - 4 = 0 \\ &\iff x = -2 \text{ または } x = -3k + 4 .\end{aligned}$$

例 実数を表す定数 k に対して、実数を表す変数 x に関する方程式 $x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 = 0$ を解く. x の2次式 $x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8$ は k についてみると高々1次の式なので、 k について整理して因数分解する:

$$\begin{aligned}x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 &= (3x + 6)k + x^2 - 2x - 8 \\ &= 3(x + 2)k + (x + 2)(x - 4) \\ &= (x + 2)(3k + x - 4) .\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 = 0 &\iff (x + 2)(x + 3k - 4) = 0 \\ &\iff x + 2 = 0 \text{ または } x + 3k - 4 = 0 \\ &\iff x = -2 \text{ または } x = -3k + 4 .\end{aligned}$$

x に関する方程式 $x^2 + (3k - 2)x + 6k - 8 = 0$ の解は -2 と $-3k + 4$ とである.

終

問4.2.3 実数を表す定数 a に対して、実数を表す変数 x に関する方程式

$2x^2 = (4a + 1)x - 6a + 3$ を解け.

方程式 $2x^2 = (4a + 1)x - 6a + 3$ を整理すると $x^2 - (\quad)x + \quad = 0$.

この等式の左辺を a について整理して因数分解する：

$$\begin{aligned}x^2 - (\quad)x + \quad &= (\quad)a + \quad \\ &= (\quad)a + (\quad)(\quad) \\ &= (\quad)(\quad) .\end{aligned}$$

従って、方程式 $2x^2 - (4a + 1)x + 6a - 3 = 0$ より、 $(\quad)(\quad) = 0$,
 $= 0$ または $\quad = 0$, 故に $x = \quad$ または $x = \quad$.

問4.2.3 実数を表す定数 a に対して、実数を表す変数 x に関する方程式

$2x^2 = (4a + 1)x - 6a + 3$ を解け.

方程式 $2x^2 = (4a + 1)x - 6a + 3$ を整理すると $2x^2 - (4a + 1)x + 6a - 3 = 0$.
この等式の左辺を a について整理して因数分解する :

$$\begin{aligned} 2x^2 - (4a + 1)x + 6a - 3 &= (-4x + 6)a + 2x^2 - x - 3 \\ &= -2(2x - 3)a + (x + 1)(2x - 3) \\ &= (2x - 3)(x - 2a + 1) . \end{aligned}$$

従って、方程式 $2x^2 - (4a + 1)x + 6a - 3 = 0$ より、 $(2x - 3)(x - 2a + 1) = 0$,
 $2x - 3 = 0$ または $x - 2a + 1 = 0$, 故に $x = \frac{3}{2}$ または $x = 2a - 1$. **終**

例 3 と -2 とを解とする x に関する 2 次方程式を一つ求める.

例 3 と -2 とを解とする x に関する 2 次方程式を一つ求める. x に関する方程式の解が 3 と -2 とであることは, 方程式を解いた結果が “ $x = 3$ または $x = -2$ ” となることである.

例 3 と -2 とを解とする x に関する 2 次方程式を一つ求める. x に関する方程式の解が 3 と -2 とであることは, 方程式を解いた結果が “ $x = 3$ または $x = -2$ ” となることである.

$$x = 3 \text{ または } x = -2 \iff x - 3 = 0 \text{ または } x + 2 = 0$$

例 3 と -2 とを解とする x に関する 2 次方程式を一つ求める. x に関する方程式の解が 3 と -2 とであることは, 方程式を解いた結果が “ $x = 3$ または $x = -2$ ” となることである.

$$x = 3 \text{ または } x = -2 \iff x - 3 = 0 \text{ または } x + 2 = 0$$

$$\iff (x - 3)(x + 2) = 0$$

[定理 2.1.1] 任意の数 a, b について, $a = 0$ または $b = 0 \iff ab = 0$.

例 3 と -2 とを解とする x に関する 2 次方程式を一つ求める. x に関する方程式の解が 3 と -2 とであることは, 方程式を解いた結果が “ $x = 3$ または $x = -2$ ” となることである.

$$x = 3 \text{ または } x = -2 \iff x - 3 = 0 \text{ または } x + 2 = 0$$

$$\iff (x - 3)(x + 2) = 0$$

$$\iff x^2 - x - 6 = 0 .$$

例 3 と -2 とを解とする x に関する 2 次方程式を一つ求める. x に関する方程式の解が 3 と -2 とであることは, 方程式を解いた結果が “ $x = 3$ または $x = -2$ ” となることである.

$$x = 3 \text{ または } x = -2 \iff x - 3 = 0 \text{ または } x + 2 = 0$$

$$\iff (x - 3)(x + 2) = 0$$

$$\iff x^2 - x - 6 = 0 .$$

3 と -2 とを解とする x に関する 2 次方程式の一つは $x^2 - x - 6 = 0$ である.

終

問4.2.4 $3+\sqrt{5}$ と $3-\sqrt{5}$ とを解とする x に関する 2 次方程式を一つ求めよ. 右辺は 0 にして, 左辺は降冪の順に整理された x の 2 次式にせよ.

x に関する方程式の解が $3+\sqrt{5}$ と $3-\sqrt{5}$ とであるとは, 方程式を解いた結果が “ $=$ または $=$ ” となることである.

$$= \qquad \qquad \qquad \text{または} \qquad \qquad \qquad =$$

$$\iff \qquad \qquad \qquad = 0 \quad \text{または} \qquad \qquad \qquad = 0$$

$$\iff (\qquad \qquad \qquad) (\qquad \qquad \qquad) = 0$$

$$\iff \qquad \qquad \qquad = 0 .$$

$3+\sqrt{5}$ と $3-\sqrt{5}$ とを解とする x に関する 2 次方程式の一つは $= 0$ である.

問4.2.4 $3+\sqrt{5}$ と $3-\sqrt{5}$ とを解とする x に関する 2 次方程式を一つ求めよ. 右辺は 0 にして, 左辺は降冪の順に整理された x の 2 次式にせよ.

x に関する方程式の解が $3+\sqrt{5}$ と $3-\sqrt{5}$ とであるとは, 方程式を解いた結果が “ $x=3+\sqrt{5}$ または $x=3-\sqrt{5}$ ” となることである.

$$x=3+\sqrt{5} \quad \text{または} \quad x=3-\sqrt{5}$$

$$\iff x-3-\sqrt{5}=0 \quad \text{または} \quad x-3+\sqrt{5}=0$$

$$\iff (x-3-\sqrt{5})(x-3+\sqrt{5})=0$$

$$\iff x^2-6x+4=0 .$$

$3+\sqrt{5}$ と $3-\sqrt{5}$ とを解とする x に関する 2 次方程式の一つは $x^2-6x+4=0$ である.

終