

3.9 無理式の計算

根号 $\sqrt{\quad}$ の中に文字が現れる式を無理式ということがある．無理式の計算では以下のことが基本になる：定理 2.8.2 と定理 2.7.1 とより，各実数 a について，

$$\sqrt{a^2} = a \quad , \quad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad ;$$

根号 $\sqrt{\quad}$ の中に文字が現れる式を無理式ということがある. 無理式の計算では以下のことが基本になる: 定理 2.8.2 と定理 2.7.1 とより, 各実数 a について,

$$\sqrt{a^2} = a, \quad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases};$$

例 実数 x について $x \leq 5$ とする. x を含む式 $\sqrt{x^2 - 10x + 25}$ を簡単にする.

根号 $\sqrt{\quad}$ の中に文字が現れる式を無理式ということがある．無理式の計算では以下のことが基本になる：定理 2.8.2 と定理 2.7.1 とより，各実数 a について，

$$\sqrt{a^2} = a, \quad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases} ;$$

例 実数 x について $x \leq 5$ とする． x を含む式 $\sqrt{x^2 - 10x + 25}$ を簡単にする．各実数 A について， $A \geq 0$ のときに限り $\sqrt{A^2} = A$.

根号 $\sqrt{\quad}$ の中に文字が現れる式を無理式ということがある．無理式の計算では以下のことが基本になる：定理 2.8.2 と定理 2.7.1 とより，各実数 a について，

$$\sqrt{a^2} = a, \quad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases};$$

例 実数 x について $x \leq 5$ とする． x を含む式 $\sqrt{x^2 - 10x + 25}$ を簡単にする．各実数 A について， $A \geq 0$ のときに限り $\sqrt{A^2} = A$.

各実数 a について $a^2 = (-a)^2$ なので，

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 = \{-(x - 5)\}^2 = (5 - x)^2 .$$

根号 $\sqrt{\quad}$ の中に文字が現れる式を無理式ということがある．無理式の計算では以下のことが基本になる：定理 2.8.2 と定理 2.7.1 とより，各実数 a について，

$$\sqrt{a^2} = a, \quad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases};$$

例 実数 x について $x \leq 5$ とする． x を含む式 $\sqrt{x^2 - 10x + 25}$ を簡単にする．各実数 A について， $A \geq 0$ のときに限り $\sqrt{A^2} = A$.

各実数 a について $a^2 = (-a)^2$ なので，

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 = \{-(x - 5)\}^2 = (5 - x)^2 .$$

$x \leq 5$ より $5 - x \geq 0$ なので，

$$\sqrt{x^2 - 10x + 25} = \sqrt{(5 - x)^2} = 5 - x .$$

終

問3.9.1 実数 x について $x \leq \frac{3}{2}$ とする. x を含む式 $\sqrt{4x^2 - 12x + 9}$ を簡単にせよ.

問3.9.1 実数 x について $x \leq \frac{3}{2}$ とする. x を含む式 $\sqrt{4x^2 - 12x + 9}$ を簡単にせよ.

$x \leq \frac{3}{2}$ より $3 - 2x \geq 0$ なので,

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = \sqrt{(2x - 3)^2} = \sqrt{(3 - 2x)^2} = 3 - 2x .$$

終

例 実数 a について $a \geq 2$ とする. 次の式を計算して簡単にする:

$$(3 + \sqrt{a-2})(5 - 2\sqrt{a-2}).$$

例 実数 a について $a \geq 2$ とする. 次の式を計算して簡単にする:
 $(3 + \sqrt{a-2})(5 - 2\sqrt{a-2})$.

$$\begin{aligned}(3 + \sqrt{a-2})(5 - 2\sqrt{a-2}) &= 3(5 - 2\sqrt{a-2}) + \sqrt{a-2}(5 - 2\sqrt{a-2}) \\ &= 15 - 6\sqrt{a-2} + 5\sqrt{a-2} - 2\sqrt{a-2}^2 \\ &= 15 - 6\sqrt{a-2} + 5\sqrt{a-2} - 2(a-2) \\ &= 19 - 2a - \sqrt{a-2} .\end{aligned}$$

終

問3.9.2 実数 s について次の式を計算して簡単にせよ：

$$(5 + \sqrt{s^2 + 4})(3 - 2\sqrt{s^2 + 4}).$$

問3.9.2 実数 s について次の式を計算して簡単にせよ：

$$(5 + \sqrt{s^2 + 4})(3 - 2\sqrt{s^2 + 4}) .$$

$$\begin{aligned}(5 + \sqrt{s^2 + 4})(3 - 2\sqrt{s^2 + 4}) &= 15 - 10\sqrt{s^2 + 4} + 3\sqrt{s^2 + 4} - 2\sqrt{s^2 + 4}^2 \\ &= 15 - 7\sqrt{s^2 + 4} - 2(s^2 + 4) \\ &= -2s^2 + 7 - 7\sqrt{s^2 + 4} .\end{aligned}$$

例 実数 a について次の式を計算して簡単にする：
$$\frac{\sqrt{a^2 + 3} - a}{\sqrt{a^2 + 3} + a}.$$

例 実数 a について次の式を計算して簡単にする： $\frac{\sqrt{a^2+3}-a}{\sqrt{a^2+3}+a}$. 分子と分母
とに $\sqrt{a^2+3}-a$ を掛ける.

例 実数 a について次の式を計算して簡単にする： $\frac{\sqrt{a^2+3}-a}{\sqrt{a^2+3}+a}$. 分子と分母

とに $\sqrt{a^2+3}-a$ を掛ける.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a^2+3}-a}{\sqrt{a^2+3}+a} &= \frac{(\sqrt{a^2+3}-a)(\sqrt{a^2+3}-a)}{(\sqrt{a^2+3}+a)(\sqrt{a^2+3}-a)} \\ &= \frac{\sqrt{a^2+3}^2 - 2a\sqrt{a^2+3} + a^2}{\sqrt{a^2+3}^2 - a^2} \\ &= \frac{a^2 + 3 - 2a\sqrt{a^2+3} + a^2}{a^2 + 3 - a^2} \\ &= \frac{2a^2 + 3 - 2a\sqrt{a^2+3}}{3} .\end{aligned}$$

終

問3.9.3 実数 a について $a \geq 3$ とする. 次の式を計算して簡単にせよ:

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 9}}{a - \sqrt{a^2 - 9}} .$$

問3.9.3 実数 a について $a \geq 3$ とする. 次の式を計算して簡単にせよ:

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 9}}{a - \sqrt{a^2 - 9}} .$$

$$\begin{aligned} \frac{a + \sqrt{a^2 - 9}}{a - \sqrt{a^2 - 9}} &= \frac{(a + \sqrt{a^2 - 9})(a + \sqrt{a^2 - 9})}{(a - \sqrt{a^2 - 9})(a + \sqrt{a^2 - 9})} \\ &= \frac{a^2 + 2a\sqrt{a^2 - 9} + \sqrt{a^2 - 9}^2}{a^2 - \sqrt{a^2 - 9}^2} = \frac{a^2 + 2a\sqrt{a^2 - 9} + (a^2 - 9)}{a^2 - (a^2 - 9)} \\ &= \frac{2a^2 - 9 + 2a\sqrt{a^2 - 9}}{9} . \end{aligned}$$