

3.6 整式の公約数・公倍数

まず整数の公約数・公倍数について述べる.

まず整数の公約数・公倍数について述べる.

整数 a と b とは 0 でないとする. a と b との公約数とは, a の約数でありかつ b の約数でもある整数のことである. a と b との公約数の中で最大の数を最大公約数という.

まず整数の公約数・公倍数について述べる.

整数 a と b とは 0 でないとする. a と b との公約数とは, a の約数でありかつ b の約数でもある整数のことである. a と b との公約数の中で最大の数を最大公約数という. a と b との公倍数とは, a の倍数でありかつ b の倍数でもある整数のことである. a と b との正の公倍数の中で最小の整数を最小公倍数という.

例 168 と 180 との最大公約数と最小公倍数とを求める．まず 168 と 180 とを素因数分解する：

$$168 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7, \quad 180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5.$$

168 と 180 との最大公約数は両方に共通に現れる因数の（現れる回数を含めた）総ての積である。

$$\begin{array}{r} 168 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times 2 \times \boxed{3} \times 7 \\ 180 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times 3 \times 5 \end{array}$$

最大公約数は $2 \times 2 \times 3 = 12$

168 と 180 との最小公倍数は少なくとも一方に現れる因数の（現れる回数を含めた）総ての積である。

$$\begin{array}{r} 168 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times 2 \times \boxed{3} \times 7 \\ 180 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times 3 \times \boxed{3} \times 5 \times 7 \end{array}$$

最小公倍数は $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2520$

168 と 180 とについて、最大公約数は 12 であり、最小公倍数は 2520 である。

整式 A と B とは 0 でないとする.

整式 A と B とは 0 でないとする. A と B との公約数とは, A の約数でありかつ B の約数でもある整式のことである.

整式 A と B とは 0 でないとする. A と B との公約数とは, A の約数でありかつ B の約数でもある整式のことである. A と B との公約数のなかで次数が最高の整式を A と B との最大公約数という. このように, 整式の最大公約数という言葉の“最大”は次数が最大であるという意味である.

整式 A と B とは 0 でないとする. A と B との公約数とは, A の約数でありかつ B の約数でもある整式のことである. A と B との公約数のなかで次数が最高の整式を A と B との最大公約数という. このように, 整式の最大公約数という言葉の“最大”は次数が最大であるという意味である. A と B との公倍数とは, A の倍数でありかつ B の倍数でもある整数のことである.

整式 A と B とは 0 でないとする. A と B との公約数とは, A の約数でありかつ B の約数でもある整式のことである. A と B との公約数のなかで次数が最高の整式を A と B との最大公約数という. このように, 整式の最大公約数という言葉の“最大”は次数が最大であるという意味である. A と B との公倍数とは, A の倍数でありかつ B の倍数でもある整数のことである. A と B との 0 でない公倍数のなかで次数が最低の整式を A と B との最小公倍数という. このように, 整式の最小公倍数という言葉の“最小”は次数が最小であるという意味である.

例 x の整式 $(x+1)^3(x-2)$ と $(x+1)^2(x-2)(x+3)$ との最大公約数と最小公倍数とを求める．この方法は総ての因数の最高次の項の係数が 1 のときに適用できる．

$(x+1)^3(x-2)$ と $(x+1)^2(x-2)(x+3)$ との最大公約数は両方に共通に現れる因数の（現れる回数を含めた）総ての積である。

$$\begin{array}{l}
 (x+1)^3(x-2) = \boxed{(x+1)} \times \boxed{(x+1)} \times (x+1) \times \boxed{(x-2)} \\
 (x+1)^2(x-2)(x+3) = \boxed{(x+1)} \times \boxed{(x+1)} \times \boxed{(x-2)} \times (x+3) \\
 \text{最大公約数は} \quad (x+1) \times (x+1) \times (x-2)
 \end{array}$$

$(x+1)^3(x-2)$ と $(x+1)^2(x-2)(x+3)$ との最小公倍数は少なくとも一方に現れる因数の（現れる回数を含めた）総ての積である。

$$\begin{array}{l}
 (x+1)^3(x-2) = \boxed{(x+1)} \times \boxed{(x+1)} \times (x+1) \times \boxed{(x-2)} \\
 (x+1)^2(x-2)(x+3) = \boxed{(x+1)} \times \boxed{(x+1)} \times (x+1) \times \boxed{(x-2)} \times (x+3) \\
 \text{最小公倍数は} \quad (x+1) \times (x+1) \times (x+1) \times (x-2) \times (x+3)
 \end{array}$$

整式 $(x+1)^3(x-2)$ と $(x+1)^2(x-2)(x+3)$ について、最大公約数は $(x+1)^2(x-2)$ であり、最小公倍数は $(x+1)^3(x-2)(x+3)$ である。

例 x の整式 $x^2 - 5x + 6$ と $3x^2 - 7x - 6$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ.

例 x の整式 $x^2 - 5x + 6$ と $3x^2 - 7x - 6$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ。各々の整式を因数分解する：

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3), \quad 3x^2 - 7x - 6 = (x - 3)(3x + 2).$$

例 x の整式 $x^2 - 5x + 6$ と $3x^2 - 7x - 6$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ。各々の整式を因数分解する：

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3), \quad 3x^2 - 7x - 6 = (x - 3)(3x + 2).$$

最大公約数は両方に共通に現れる因数の総ての積 $x - 3$ であり、最小公倍数は少なくとも一方に現れる因数の総ての積 $(x - 2)(x - 3)(3x + 2)$ である。

例 x の整式 $x^2 - 5x + 6$ と $3x^2 - 7x - 6$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ。各々の整式を因数分解する：

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3), \quad 3x^2 - 7x - 6 = (x - 3)(3x + 2).$$

最大公約数は両方に共通に現れる因数の総ての積 $x - 3$ であり、最小公倍数は少なくとも一方に現れる因数の総ての積 $(x - 2)(x - 3)(3x + 2)$ である。

因数分解されている式は、特に要求されない限り、敢えて展開する必要はない。

終

問3.6.1 x の整式 $x^2 - 6x + 8$ と $2x^2 - 7x + 6$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ.

各々の整式を因数分解する：

$$x^2 - 6x + 8 = (\quad)(\quad), \quad 2x^2 - 7x + 6 = (\quad)(\quad).$$

最大公約数は \quad であり、最小公倍数は $(\quad)(\quad)(\quad)$ である.

問3.6.1 x の整式 $x^2 - 6x + 8$ と $2x^2 - 7x + 6$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ.

各々の整式を因数分解する：

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4) , \quad 2x^2 - 7x + 6 = (x - 2)(2x - 3) .$$

最大公約数は $x - 2$ であり、最小公倍数は $(x - 2)(x - 4)(2x - 3)$ である. 終

例 x の整式 $3(x-1)(x+4)$ と $3(x-2)(x+4)$ との公約数を考える.

終

例 x の整式 $3(x-1)(x+4)$ と $3(x-2)(x+4)$ との公約数を考える．整式 $x+4$ も $3(x+4)$ も公約数であり，どちらも 1 次式なので，どちらも最大公約数である（公約数の次数は 1 が最高である）．最大公約数として簡単な方の $x+4$ をとればよい．

終

例 x の整式 $3(x-1)(x+4)$ と $3(x-2)(x+4)$ との公約数を考える．整式 $x+4$ も $3(x+4)$ も公約数であり，どちらも 1 次式なので，どちらも最大公約数である（公約数の次数は 1 が最高である）．最大公約数として簡単な方の $x+4$ をとればよい．次に， x の整式 $3(x-1)(x+4)$ と $3(x-2)(x+4)$ との公倍数を考える．

終

例 x の整式 $3(x-1)(x+4)$ と $3(x-2)(x+4)$ との公約数を考える. 整式 $x+4$ も $3(x+4)$ も公約数であり, どちらも 1 次式なので, どちらも最大公約数である (公約数の次数は 1 が最高である). 最大公約数として簡単な方の $x+4$ をとればよい. 次に, x の整式 $3(x-1)(x+4)$ と $3(x-2)(x+4)$ との公倍数を考える. x の整式 $3(x-1)(x-2)(x+4)$ は公倍数であり, これに $\frac{1}{3}$ を掛けた整式 $\frac{1}{3}3(x-1)(x-2)(x+4) = (x-1)(x-2)(x+4)$ もやはり公倍数である. どちらも 3 次式なので, どちらも最小公倍数である (公倍数の次数は 3 が最低である). 最小公倍数として簡単な方の $(x-1)(x-2)(x+4)$ をとればよい.

終

例 y の整式 $2y^2 + 6y - 8$ と $4y^2 - 4y - 8$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ.

例 y の整式 $2y^2 + 6y - 8$ と $4y^2 - 4y - 8$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ。各々の整式を因数分解する：

$$2y^2 + 6y - 8 = 2(y^2 + 3y - 4) = 2(y - 1)(y + 4) ,$$

$$4y^2 - 4y - 8 = 4(y^2 - y - 2) = 4(y + 1)(y - 2) .$$

例 y の整式 $2y^2 + 6y - 8$ と $4y^2 - 4y - 8$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ。各々の整式を因数分解する：

$$2y^2 + 6y - 8 = 2(y^2 + 3y - 4) = 2(y - 1)(y + 4) ,$$

$$4y^2 - 4y - 8 = 4(y^2 - y - 2) = 4(y + 1)(y - 2) .$$

定数の因数を無視して、 y の整式 $(y - 1)(y + 4)$ と $(y + 1)(y - 2)$ との最大公約数・最小公倍数を考えればよい。

例 y の整式 $2y^2 + 6y - 8$ と $4y^2 - 4y - 8$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ。各々の整式を因数分解する：

$$2y^2 + 6y - 8 = 2(y^2 + 3y - 4) = 2(y - 1)(y + 4) ,$$

$$4y^2 - 4y - 8 = 4(y^2 - y - 2) = 4(y + 1)(y - 2) .$$

定数の因数を無視して、 y の整式 $(y - 1)(y + 4)$ と $(y + 1)(y - 2)$ との最大公約数・最小公倍数を考えればよい。最大公約数は 1 であり、最小公倍数は $(y + 1)(y - 1)(y - 2)(y + 4)$ である。

終

問3.6.2 y の整式 $4y^2 - 12y + 8$ と $4y^2 - 2y - 6$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ.

各々の整式を因数分解する：

$$4y^2 - 12y + 8 =$$

$$4y^2 - 2y - 6 =$$

従って、整式 $4y^2 - 12y + 4$ と $4y^2 - 2y - 6$ との最大公約数は であり、最小公倍数は である. 終

問3.6.2 y の整式 $4y^2 - 12y + 8$ と $4y^2 - 2y - 6$ との最大公約数と最小公倍数とを求めよ.

各々の整式を因数分解する：

$$4y^2 - 12y + 8 = 4(y^2 - 3y + 2) = 4(y - 1)(y - 2) ,$$

$$4y^2 - 2y - 6 = 2(2y^2 - y - 3) = 2(y + 1)(2y - 3) .$$

従って、整式 $4y^2 - 12y + 4$ と $4y^2 - 2y - 6$ との最大公約数は 1 であり、最小公倍数は $(y + 1)(y - 1)(y - 2)(2y - 3)$ である. **終**

例えば x の整式 $4(x+1)(x-2)$ と $4(x+2)(x-3)$ との公約数を考えると、両方に共通の 1 以上の次数の因数はない。このように、整式 A と整式 B との両方に共通の 1 以上の次数の因数がないとき、 A と B とは互いに素であるという。