

3.3 整式の除法

まず単項式の除法から始める．自然数 m, n について $m \geq n$ とする．文字 x が現れない式 A, B に対して， x の単項式 Ax^m を x の単項式 Bx^n で割ると商はやはり x の単項式になる：指数法則（1.2 節参照）により $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ なので，

$$(Ax^m) \div (Bx^n) = \frac{Ax^m}{Bx^n} = \frac{A}{B} \frac{x^m}{x^n} = \frac{A}{B} x^{m-n} .$$

まず単項式の除法から始める．自然数 m, n について $m \geq n$ とする．文字 x が現れない式 A, B に対して， x の単項式 Ax^m を x の単項式 Bx^n で割ると商はやはり x の単項式になる：指数法則（1.2節参照）により $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ なので，

$$(Ax^m) \div (Bx^n) = \frac{Ax^m}{Bx^n} = \frac{A}{B} \frac{x^m}{x^n} = \frac{A}{B} x^{m-n} .$$

例 x の単項式 $4x^5$ を $7x^3$ で割る．

$$(4x^5) \div (7x^3) = \frac{4x^5}{7x^3} = \frac{4}{7} \frac{x^5}{x^3} = \frac{4}{7} x^{5-3} = \frac{4}{7} x^2 .$$

終

整数の除法を復習する．整数を整数で割るとき，整数の範囲で考えた商を整商といい，余りのことを剰余という．例えば，23 を 5 で割ると整商は 4 で剰余は 3 です；このとき $23 = 5 \times 4 + 3$ ， $0 \leq 3 < 5$ である．

有理数の範囲で 23 を 5 で割るときの商は $\frac{23}{5}$ である．この商と区別するために，整数の範囲内での商を特に整商という．

整数の除法を復習する．整数を整数で割るとき，整数の範囲で考えた商を整商といい，余りのことを剰余という．例えば，23 を 5 で割ると整商は 4 で剰余は 3 です；このとき $23 = 5 \times 4 + 3$ ， $0 \leq 3 < 5$ である．

一般に，整数 a を 0 以外の整数 b で割るときの整商 q 及び剰余 r は次のような整数である：

$$a = bq + r \quad \text{かつ} \quad 0 \leq r < |b| .$$

整式を整式で割るときの整商及び剰余では整式の次数が重要になる.

[定義] x の整式 A 及び 0 以外の x の整式 B に対して, A を B で割るときの整商 Q 及び, A を B で割るときの剰余 R は, 次のような整式である:

$A = BQ + R$ かつ R は 0 または B より次数が低い整式である.

整式を整式で割るときの整商及び剰余では整式の次数が重要になる.

[定義] x の整式 A 及び 0 以外の x の整式 B に対して, A を B で割るときの整商 Q 及び, A を B で割るときの剰余 R は, 次のような整式である:

$A = BQ + R$ かつ R は 0 または B より次数が低い整式である.

一つの文字に着目して任意の整式を 0 以外の任意の整式で割るとき, 整商と剰余とが各々唯一つに決まる. 割られる整式と割る整式と整商と剰余との関係は次のようになる: 剰余は 0 かまたは割る整式より次数が低い整式で,

$$(\text{割られる整式}) = (\text{割る整式}) \times (\text{整商}) + (\text{剰余}).$$

整式を整式で割るときの整商及び剰余では整式の次数が重要になる。

[定義] x の整式 A 及び 0 以外の x の整式 B に対して, A を B で割るときの整商 Q 及び, A を B で割るときの剰余 R は, 次のような整式である:

$A = BQ + R$ かつ R は 0 または B より次数が低い整式である.

一つの文字に着目して任意の整式を 0 以外の任意の整式で割るとき, 整商と剰余とが各々唯一つに決まる. 割られる整式と割る整式と整商と剰余との関係は次のようになる: 剰余は 0 かまたは割る整式より次数が低い整式で,

$$(\text{割られる整式}) = (\text{割る整式}) \times (\text{整商}) + (\text{剰余}).$$

例 x の整式 P を x の整式 $x^2 - 2x - 3$ で割ると整商が $x + 2$ で剰余が $4x - 3$ になるとき,

$$\begin{aligned} P &= (x^2 - 2x - 3)(x + 2) + 4x - 3 = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x - 3x - 6 + 4x - 3 \\ &= x^3 - 3x - 9. \end{aligned}$$

問3.3.1 x の整式 P を $x^2 - 4x + 5$ で割ると整商は $2x + 3$ で剰余は $5x - 7$ である. この整式 P を求めよ.

$$P =$$

問3.3.1 x の整式 P を $x^2 - 4x + 5$ で割ると整商は $2x + 3$ で剰余は $5x - 7$ である. この整式 P を求めよ.

$$\begin{aligned} P &= (x^2 - 4x + 5)(2x + 3) + 5x - 7 \\ &= (x^2 - 4x + 5) \cdot 2x + (x^2 - 4x + 5) \cdot 3 + 5x - 7 \\ &= 2x^3 - 8x^2 + 10x + 3x^2 - 12x + 15 + 5x - 7 \\ &= 2x^3 - 5x^2 + 3x + 8 . \end{aligned}$$

終

ある文字に着目して整式を整式で割るときの整商と剰余とを求めることを整式の除法という.

例 x の整式 $A = 6x^2 + 5x - 7$ を x
の整式 $B = 2x - 1$ で割るときの整商
と剰余とを求めよ.

$$B = 2x - 1 \overline{) 6x^2 + 5x - 7} = A$$

例 x の整式 $A = 6x^2 + 5x - 7$ を x の整式 $B = 2x - 1$ で割るときの整商と剰余とを求めよ． $6x^2$ を $2x$ で割って $3x$ を立てる．

$$B = 2x - 1 \overline{) 6x^2 + 5x - 7} = A$$

例 x の整式 $A = 6x^2 + 5x - 7$ を x の整式 $B = 2x - 1$ で割るときの整商と剰余とを求めよ． $6x^2$ を $2x$ で割って $3x$ を立てる． $A = 6x^2 + 5x - 7$ から $B \cdot 3x = 6x^2 - 3x$ を引くと $8x - 7$.

$$\begin{array}{r} 3x \\ B = 2x - 1 \overline{) 6x^2 + 5x - 7} = A \\ \underline{B \cdot 3x = 6x^2 - 3x} \\ A - B \cdot 3x = 8x - 7 \end{array}$$

例 x の整式 $A = 6x^2 + 5x - 7$ を x の整式 $B = 2x - 1$ で割るときの整商と剰余とを求める. $6x^2$ を $2x$ で割って $3x$ を立てる. $A = 6x^2 + 5x - 7$ から $B \cdot 3x = 6x^2 - 3x$ を引くと $8x - 7$. $8x$ を $2x$ で割って 4 を立てる.

$$\begin{array}{r} 3x+4 \\ B = 2x-1 \overline{) 6x^2+5x-7} = A \\ \underline{B \cdot 3x = 6x^2-3x} \\ A - B \cdot 3x = 8x-7 \end{array}$$

例 x の整式 $A = 6x^2 + 5x - 7$ を x の整式 $B = 2x - 1$ で割るときの整商と剰余とを求めよ． $6x^2$ を $2x$ で割って $3x$ を立てよ． $A = 6x^2 + 5x - 7$ から $B \cdot 3x = 6x^2 - 3x$ を引くと $8x - 7$ ． $8x$ を $2x$ で割って 4 を立てよ． $A - B \cdot 3x = 8x - 7$ から $B \cdot 4 = 8x - 4$ を引くと -3 ．

$$\begin{array}{r}
 3x+4 \\
 B = 2x - 1 \overline{) 6x^2 + 5x - 7} = A \\
 \underline{B \cdot 3x = 6x^2 - 3x} \\
 A - B \cdot 3x = 8x - 7 \\
 \underline{B \cdot 4 = 8x - 4} \\
 A - B \cdot 3x - B \cdot 4 = -3
 \end{array}$$

例 x の整式 $A = 6x^2 + 5x - 7$ を x の整式 $B = 2x - 1$ で割るときの整商と剰余とを求めよ． $6x^2$ を $2x$ で割って $3x$ を立てよ． $A = 6x^2 + 5x - 7$

から $B \cdot 3x = 6x^2 - 3x$ を引くと $8x - 7$ ． $8x$ を $2x$ で割って 4 を立てよ． $A - B \cdot 3x = 8x - 7$ から $B \cdot 4 = 8x - 4$ を引くと -3 ．これより、

$$A - B \cdot 3x - B \cdot 4 = -3 ,$$

$$A = B \cdot 3x + B \cdot 4 - 3 = B(3x - 4) - 3 .$$

$$\begin{array}{r}
 \overline{3x + 4} \\
 B = 2x - 1 = A \\
 \underline{B \cdot 3x = 6x^2 - 3x} \\
 A - B \cdot 3x = 8x - 7 \\
 \underline{B \cdot 4 = 8x - 4} \\
 A - B \cdot 3x - B \cdot 4 = -3
 \end{array}$$

例 x の整式 $A = 6x^2 + 5x - 7$ を x の整式 $B = 2x - 1$ で割るときの整商と剰余とを求めよ. $6x^2$ を $2x$ で割って $3x$ を立てよ.

$$\begin{array}{r} 3x+4 \leftarrow \text{整商} \\ 2x-1 \overline{) 6x^2+5x-7} \\ \underline{6x^2-3x} \\ 8x-7 \\ \underline{8x-4} \\ -3 \leftarrow \text{剰余} \end{array}$$

から $B \cdot 3x = 6x^2 - 3x$ を引くと

$8x - 7$. $8x$ を $2x$ で割って 4 を立て

よ. $A - B \cdot 3x = 8x - 7$ から $B \cdot 4 = 8x - 4$ を引くと -3 . これより,

$$A - B \cdot 3x - B \cdot 4 = 3,$$

$$A = B \cdot 3x + B \cdot 4 - 3 = B(3x + 4) - 3.$$

整式 -3 の次数は 0 で $B = 2x - 1$ の次数 1 より低いので, 整式 $A = 6x^2 + 5x - 7$ を整式 $B = 2x - 1$ で割ると整商は $3x + 4$ であり剰余は -3 である.

終

例 x の整式 $A = 3x^3 - 4x^2 + 2$
を整式 $B = x^2 - 3x + 2$ で割で
割るときの整商と剰余とを求め
る.

$$B = x^2 - 3x + 2 \overline{) 3x^3 - 4x^2} + 2 = A$$

例 x の整式 $A = 3x^3 - 4x^2 + 2$ を整式 $B = x^2 - 3x + 2$ で割で割るときの整商と剰余とを求め
る. $3x^2$ を x^2 で割って $3x$ を立てる.

$$B = x^2 - 3x + 2 \overline{) 3x^3 - 4x^2 = A} \quad \begin{array}{r} 3x \\ + 2 \end{array}$$

例 x の整式 $A = 3x^3 - 4x^2 + 2$

を整式 $B = x^2 - 3x + 2$ で割で

割るときの整商と剰余とを求め

る. $3x^2$ を x^2 で割って $3x$ を

立てる. $A = 3x^3 - 4x^2 + 2$ から

$B \cdot 3x = 3x^3 - 9x^2 + 6x$ を引くと $5x^2 - 6x + 2$.

$$\begin{array}{r} \overline{3x} \\ B = x^2 - 3x + 2 \overline{) 3x^3 - 4x^2} + 2 = A \\ \underline{B \cdot 3x = 3x^3 - 9x^2 + 6x} \\ \underline{A - B \cdot 3x = 5x^2 - 6x + 2} \end{array}$$

例 x の整式 $A = 3x^3 - 4x^2 + 2$

を整式 $B = x^2 - 3x + 2$ で割で

割るときの整商と剰余とを求め

る. $3x^2$ を x^2 で割って $3x$ を

立てる. $A = 3x^3 - 4x^2 + 2$ から

$B \cdot 3x = 3x^3 - 9x^2 + 6x$ を引くと $5x^2 - 6x + 2$. $5x^2$ を x^2 で割って 5 を立て

る.

$$\begin{array}{r} \overline{3x + 5} \\ B = x^2 - 3x + 2 \overline{) 3x^3 - 4x^2 = A} \\ \underline{B \cdot 3x = 3x^3 - 9x^2 + 6x} \\ A - B \cdot 3x = 5x^2 - 6x + 2 \end{array}$$

例 x の整式 $A = 3x^3 - 4x^2 + 2$

を整式 $B = x^2 - 3x + 2$ で割で

割るときの整商と剰余とを求め

る. $3x^2$ を x^2 で割って $3x$ を

立てる. $A = 3x^3 - 4x^2 + 2$ から

$B \cdot 3x = 3x^3 - 9x^2 + 6x$ を引くと $5x^2 - 6x + 2$. $5x^2$ を x^2 で割って 5 を立て

る. $A - B \cdot 3x = 5x^2 - 6x + 2$ から $B \cdot 5 = 5x^2 - 15x + 10$ を引くと $9x - 8$.

$$\begin{array}{r} \overline{3x + 5} \\ B = x^2 - 3x + 2 \overline{) 3x^3 - 4x^2 = A} \\ \underline{B \cdot 3x = 3x^3 - 9x^2 + 6x} \\ A - B \cdot 3x = 5x^2 - 6x + 2 \\ \underline{B \cdot 5 = 5x^2 - 15x + 10} \\ A - B \cdot 3x - B \cdot 5 = 9x - 8 \end{array}$$

例 x の整式 $A = 3x^3 - 4x^2 + 2$

を整式 $B = x^2 - 3x + 2$ で割で

割るときにの整商と剰余とを求め

る. $3x^2$ を x^2 で割って $3x$ を

立てる. $A = 3x^3 - 4x^2 + 2$ から

$B \cdot 3x = 3x^3 - 9x^2 + 6x$ を引くと $5x^2 - 6x + 2$. $5x^2$ を x^2 で割って 5 を立て

る. $A - B \cdot 3x = 5x^2 - 6x + 2$ から $B \cdot 5 = 5x^2 - 15x + 10$ を引くと $9x - 8$.

よって,

$$A - B \cdot 3x - B \cdot 5 = 9x - 8,$$

$$A = B \cdot 3x + B \cdot 5 + 9x - 8 = B(3x + 5) + 9x - 8.$$

$$\begin{array}{r} \overline{3x^3 - 4x^2} = A \\ B \cdot 3x = \underline{3x^3 - 9x^2 + 6x} \\ A - B \cdot 3x = 5x^2 - 6x + 2 \\ B \cdot 5 = \underline{5x^2 - 15x + 10} \\ A - B \cdot 3x - B \cdot 5 = 9x - 8 \end{array}$$

例 x の整式 $A = 3x^3 - 4x^2 + 2$

を整式 $B = x^2 - 3x + 2$ で割で

割るときに整商と剰余とを求め

る. $3x^2$ を x^2 で割って $3x$ を

立てる. $A = 3x^3 - 4x^2 + 2$ から

$B \cdot 3x = 3x^3 - 9x^2 + 6x$ を引くと $5x^2 - 6x + 2$. $5x^2$ を x^2 で割って 5 を立て

る. $A - B \cdot 3x = 5x^2 - 6x + 2$ から $B \cdot 5 = 5x^2 - 15x + 10$ を引くと $9x - 8$.

よって,

$$A - B \cdot 3x - B \cdot 5 = 9x - 8,$$

$$A = B \cdot 3x + B \cdot 5 + 9x - 8 = B(3x + 5) + 9x - 8.$$

整式 $9x - 8$ の次数は 1 で $B = x^2 - 3x + 2$ の次数 2 より小さいので, 整式

$A = 3x^3 - 4x^2 + 2$ を整式 $B = x^2 - 3x + 2$ で割ると整商は $3x + 5$ であり剰

余は $9x - 8$ である.

$$\begin{array}{r} 3x + 5 \leftarrow \text{整商} \\ x^2 - 3x + 2 \overline{) 3x^3 - 4x^2 + 2} \\ \underline{3x^3 - 9x^2 + 6x} \\ 5x^2 - 6x + 2 \\ \underline{5x^2 - 15x + 10} \\ 9x - 8 \leftarrow \text{剰余} \end{array}$$

終

例 x の整式 $A = 3x^3 - 7x$ を整式 $B = 2x - 3$

で割るときの整商と剰余とを求める.

$$B = 2x - 3 \overline{) 3x^3 \quad \quad - 7x = A}$$

例 x の整式 $A = 3x^3 - 7x$ を整式 $B = 2x - 3$

で割るときの整商と剰余とを求める． $3x^3$ を
 $2x$ で割って $\frac{3}{2}x^2$ を立てる．

$$B = 2x - 3 \overline{) 3x^3 \qquad \frac{3}{2}x^2 \qquad - 7x = A}$$

例 x の整式 $A = 3x^3 - 7x$ を整式 $B = 2x - 3$

で割るときの整商と剰余とを求める. $3x^3$ を
 $2x$ で割って $\frac{3}{2}x^2$ を立てる. $A = 3x^3 - 7x$

から $B\frac{3}{2}x^2 = 3x^3 - \frac{9}{2}x^2$ を引くと $\frac{9}{2}x^2 - 7x$.

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2}x^2 \\ B = 2x - 3 \overline{) 3x^3 = A} \\ \underline{B\frac{3}{2}x^2 = 3x^3 - \frac{9}{2}x^2} \\ A - B\frac{3}{2}x^2 = \frac{9}{2}x^2 - 7x \end{array}$$

例 x の整式 $A = 3x^3 - 7x$ を整式 $B = 2x - 3$

で割るときの整商と剰余とを求める. $3x^3$ を
 $2x$ で割って $\frac{3}{2}x^2$ を立てる. $A = 3x^3 - 7x$

から $B\frac{3}{2}x^2 = 3x^3 - \frac{9}{2}x^2$ を引くと $\frac{9}{2}x^2 - 7x$.

$\frac{9}{2}x^2$ を $2x$ で割って $\frac{9}{4}x$ を立てる.

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x \\ B = 2x - 3 \overline{) 3x^3 = A} \\ \underline{B\frac{3}{2}x^2 = 3x^3 - \frac{9}{2}x^2} \\ A - B\frac{3}{2}x^2 = \frac{9}{2}x^2 - 7x \end{array}$$

例 x の整式 $A = 3x^3 - 7x$ を整式 $B = 2x - 3$

で割るときの整商と剰余とを求める. $3x^3$ を
 $2x$ で割って $\frac{3}{2}x^2$ を立てる. $A = 3x^3 - 7x$

から $B\frac{3}{2}x^2 = 3x^3 - \frac{9}{2}x^2$ を引くと $\frac{9}{2}x^2 - 7x$.

$\frac{9}{2}x^2$ を $2x$ で割って $\frac{9}{4}x$ を立てる.

$A - B\frac{3}{2}x^2 = \frac{9}{2}x^2 - 7x$ から $B\frac{9}{4}x = \frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x$

を引くと $-\frac{1}{4}x$.

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x \\ B = 2x - 3 \overline{) 3x^3 = A} \\ \underline{B\frac{3}{2}x^2 = 3x^3 - \frac{9}{2}x^2} \\ A - B\frac{3}{2}x^2 = \frac{9}{2}x^2 - 7x \\ \underline{B\frac{9}{4}x = \frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x} \\ A - B\frac{3}{2}x^2 - B\frac{9}{4}x = -\frac{1}{4}x \end{array}$$

例 x の整式 $A = 3x^3 - 7x$ を整式 $B = 2x - 3$

で割るときの整商と剰余とを求める. $3x^3$ を
 $2x$ で割って $\frac{3}{2}x^2$ を立てる. $A = 3x^3 - 7x$

から $B\frac{3}{2}x^2 = 3x^3 - \frac{9}{2}x^2$ を引くと $\frac{9}{2}x^2 - 7x$.

$\frac{9}{2}x^2$ を $2x$ で割って $\frac{9}{4}x$ を立てる.

$A - B\frac{3}{2}x^2 = \frac{9}{2}x^2 - 7x$ から $B\frac{9}{4}x = \frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x$

を引くと $-\frac{1}{4}x$. $-\frac{1}{4}x$ を $2x$ で割って $-\frac{1}{8}$

を立てる.

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{1}{8} \\ B = 2x - 3 \overline{) 3x^3 = A} \\ \underline{B\frac{3}{2}x^2 = 3x^3 - \frac{9}{2}x^2} \\ A - B\frac{3}{2}x^2 = \frac{9}{2}x^2 - 7x \\ \underline{B\frac{9}{4}x = \frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x} \\ A - B\frac{3}{2}x^2 - B\frac{9}{4}x = -\frac{1}{4}x \end{array}$$

例 x の整式 $A = 3x^3 - 7x$ を整式 $B = 2x - 3$

で割るときの整商と剰余とを求める. $3x^3$ を
 $2x$ で割って $\frac{3}{2}x^2$ を立てる. $A = 3x^3 - 7x$

から $B\frac{3}{2}x^2 = 3x^3 - \frac{9}{2}x^2$ を引くと $\frac{9}{2}x^2 - 7x$.

$\frac{9}{2}x^2$ を $2x$ で割って $\frac{9}{4}x$ を立てる.

$A - B\frac{3}{2}x^2 = \frac{9}{2}x^2 - 7x$ から $B\frac{9}{4}x = \frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x$

を引くと $-\frac{1}{4}x$. $-\frac{1}{4}x$ を $2x$ で割って $-\frac{1}{8}$

を立てる. $A - B\frac{3}{2}x^2 - B\frac{9}{4}x = -\frac{1}{4}x$ から

$B\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{8}$ を引くと $-\frac{3}{8}$.

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{1}{8} \\ B = 2x - 3 \overline{) 3x^3 = A} \\ \underline{B\frac{3}{2}x^2 = 3x^3 - \frac{9}{2}x^2} \\ A - B\frac{3}{2}x^2 = \frac{9}{2}x^2 - 7x \\ \underline{B\frac{9}{4}x = \frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x} \\ A - B\frac{3}{2}x^2 - B\frac{9}{4}x = -\frac{1}{4}x \\ \underline{B\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{8}} \\ A - B\frac{3}{2}x^2 - B\frac{9}{4}x - B\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{8} \end{array}$$

例 x の整式 $A = 3x^3 - 7x$ を整式 $B = 2x - 3$

で割るときの整商と剰余とを求める. $3x^3$ を
 $2x$ で割って $\frac{3}{2}x^2$ を立てる. $A = 3x^3 - 7x$

から $B\frac{3}{2}x^2 = 3x^3 - \frac{9}{2}x^2$ を引くと $\frac{9}{2}x^2 - 7x$.

$\frac{9}{2}x^2$ を $2x$ で割って $\frac{9}{4}x$ を立てる.

$A - B\frac{3}{2}x^2 = \frac{9}{2}x^2 - 7x$ から $B\frac{9}{4}x = \frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x$

を引くと $-\frac{1}{4}x$. $-\frac{1}{4}x$ を $2x$ で割って $-\frac{1}{8}$

を立てる. $A - B\frac{3}{2}x^2 - B\frac{9}{4}x = -\frac{1}{4}x$ から

$B\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{8}$ を引くと $-\frac{3}{8}$. よって,

$$A - B\frac{3}{2}x^2 - B\frac{9}{4}x - B\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{8}.$$

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{1}{8} \\ B = 2x - 3 \overline{) 3x^3 = A} \\ \underline{B\frac{3}{2}x^2 = 3x^3 - \frac{9}{2}x^2} \\ A - B\frac{3}{2}x^2 = \frac{9}{2}x^2 - 7x \\ \underline{B\frac{9}{4}x = \frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x} \\ A - B\frac{3}{2}x^2 - B\frac{9}{4}x = -\frac{1}{4}x \\ \underline{B\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{8}} \\ A - B\frac{3}{2}x^2 - B\frac{9}{4}x - B\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{8} \end{array}$$

$$A - B\frac{3}{2}x^2 - B\frac{9}{4}x - B\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{8},$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{1}{8} \\
 2x - 3 \overline{) 3x^3 - 7x} \\
 \underline{3x^3 + \frac{9}{2}x^2} \\
 \frac{9}{2}x^2 - 7x \\
 \underline{\frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x} \\
 \phantom{\frac{9}{2}x^2 -} - \frac{1}{4}x \\
 \phantom{\frac{9}{2}x^2 -} - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8} \\
 \phantom{\frac{9}{2}x^2 -} \underline{ \frac{3}{8}} \\
 \phantom{\frac{9}{2}x^2 -} - \frac{3}{8}
 \end{array}$$

$$A - B\frac{3}{2}x^2 - B\frac{9}{4}x - B\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{8},$$

$$A = B\frac{3}{2}x^2 + B\frac{9}{4}x + B\left(-\frac{1}{8}\right) - \frac{3}{8}$$

$$= B\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{1}{8}\right) - \frac{3}{8}.$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{1}{8} \\
 2x - 3 \overline{) 3x^3 - 7x} \\
 \underline{3x^3 + \frac{9}{2}x^2} \\
 \frac{9}{2}x^2 - 7x \\
 \underline{\frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x} \\
 \phantom{\frac{9}{2}x^2 -} - \frac{1}{4}x \\
 \phantom{\frac{9}{2}x^2 -} - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8} \\
 \phantom{\frac{9}{2}x^2 -} \underline{ \frac{3}{8}} \\
 \phantom{\frac{9}{2}x^2 -} - \frac{3}{8}
 \end{array}$$

$$A - B\frac{3}{2}x^2 - B\frac{9}{4}x - B\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{8},$$

$$\begin{aligned} A &= B\frac{3}{2}x^2 + B\frac{9}{4}x + B\left(-\frac{1}{8}\right) - \frac{3}{8} \\ &= B\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{1}{8}\right) - \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

整式 $-\frac{3}{8}$ の次数は 0 で $B = 2x - 3$ の次数 1 より低いので, $A = 3x^3 - 7x$ を整式 $B = 2x - 3$ で割ると整商は $\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{1}{8}$ であり剰余は $-\frac{3}{8}$ である.

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{1}{8} \leftarrow \text{整商} \\ 2x - 3 \overline{) 3x^3 \\ \underline{3x^3 + \frac{9}{2}x^2} \\ \frac{9}{2}x^2 - 7x \\ \underline{\frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x} \\ \phantom{\frac{9}{2}x^2 -} - \frac{1}{4}x \\ \phantom{\frac{9}{2}x^2 -} \underline{- \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}} \\ \phantom{\frac{9}{2}x^2 -} \phantom{- \frac{1}{4}x +} - \frac{3}{8} \leftarrow \text{剰余} \end{array}$$

終

問3.3.2 x の整式 $6x^2 - 8x - 13$ を x の整式 $3x + 2$ で割るときの整商と剰余とを求めよ.

問3.3.2 x の整式 $6x^2 - 8x - 13$ を x の整式 $3x + 2$ で割るときの整商と剰余とを求めよ.

$$\begin{array}{r} 2x - 4 \\ 3x + 2 \overline{) 6x^2 - 8x - 13} \\ \underline{6x^2 + 4x} \\ -12x - 13 \\ \underline{-12x - 8} \\ -5 \end{array}$$

整商は $2x - 4$ で剰余は -5 である.

問3.3.3 x の整式 $2x^3 - 7x^2$ を x の整式 $x^2 - 2x - 4$ で割るときの整商と剰余とを求めよ.

問3.3.4 x の整式 $5x^3 - 3x^2 - 9$ を x の整式 $2x - 3$ で割るときの整商と剰余とを求めよ.

問3.3.4 x の整式 $5x^3 - 3x^2 - 9$ を x の整式 $2x - 3$ で割るときの整商と剰余とを求めよ.

$$\begin{array}{r}
 \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{27}{8} \\
 2x - 3 \overline{) 5x^3 - 3x^2 - 9} \\
 \underline{5x^3 - \frac{15}{2}x^2} \\
 \frac{9}{2}x^2 \\
 \underline{\frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x} \\
 \phantom{\frac{9}{2}x^2 -} \frac{27}{4}x - 9 \\
 \phantom{\frac{9}{2}x^2 -} \underline{\frac{27}{4}x - \frac{81}{8}} \\
 \phantom{\frac{9}{2}x^2 -} \phantom{\frac{27}{4}x -} \frac{9}{8}
 \end{array}$$

整商は $\frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{27}{8}$ で剰余は $\frac{9}{8}$ である.

一般に、自然数 m と n について、 $m \geq n$ のとき、

x の m 次式を x の n 次式で割るときの整商は x の $(m - n)$ 次式である。

整式という式の種類は、数の種類でいうと整数に似ている。整数と整数との和・差・積は必ず整数であるが、整数を整数で割ると整数の範囲では割り切れないことがよくある。同様に、整式と整式との和・差・積は必ず整式であるが、整式を整式で割ると整式の範囲では割り切れないことがよくある。