

3.2 整式の加法・減法・乗法

整式と整式とを足すことを整式の加法といい、整式から整式を引くことを整式の減法という。整式の加法・減法の計算では、分配法則から導かれる次の等式が基になる：自然数 n 及び文字 x が現れない式 A, B に対して、

$$Ax^n \pm Bx^n = (A \pm B)x^n \quad (\text{複号同順}) .$$

例 x の整式 A と B とを $A = 2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6$, $B = ax^2 - 4x - 2$ とおく. $A+B$ と $A-B$ と $B-A$ とを x の整式として降冪の順に整理する.

例 x の整式 A と B とを $A = 2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6$, $B = ax^2 - 4x - 2$ とおく. $A+B$ と $A-B$ と $B-A$ とを x の整式として降冪の順に整理する.

$$\begin{aligned} A+B &= 2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6 + ax^2 - 4x - 2 \\ &= 2x^3 - 4ax^2 + (3a - 4)x + 4 . \end{aligned}$$

例 x の整式 A と B とを $A = 2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6$, $B = ax^2 - 4x - 2$ とおく. $A+B$ と $A-B$ と $B-A$ とを x の整式として降冪の順に整理する.

$$\begin{aligned}A+B &= 2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6 + ax^2 - 4x - 2 \\ &= 2x^3 - 4ax^2 + (3a - 4)x + 4 .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A-B &= 2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6 - (ax^2 - 4x - 2) \\ &= 2x^3 - 6ax^2 + (3a + 4)x + 8 .\end{aligned}$$

例 x の整式 A と B とを $A = 2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6$, $B = ax^2 - 4x - 2$ とおく. $A+B$ と $A-B$ と $B-A$ とを x の整式として降冪の順に整理する.

$$\begin{aligned}A+B &= 2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6 + ax^2 - 4x - 2 \\ &= 2x^3 - 4ax^2 + (3a - 4)x + 4 .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A-B &= 2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6 - (ax^2 - 4x - 2) \\ &= 2x^3 - 6ax^2 + (3a + 4)x + 8 .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B-A &= ax^2 - 4x - 2 - (2x^3 - 5ax^2 + 3ax + 6) \\ &= -2x^3 + 6ax^2 - (3a + 4)x - 8 .\end{aligned}$$

終

問3.2.1 x の整式 A と B とを $A = 3x^2 - 6ax - 2$, $B = 2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5$ とおく. $A + B$ と $A - B$ と $B - A$ とを x の整式として降冪の順に整理せよ.

$$A + B = (3x^2 - 6ax - 2) + (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5)$$

=

$$A - B = (3x^2 - 6ax - 2) - (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5)$$

=

$$B - A = (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) - (3x^2 - 6ax - 2)$$

=

問3.2.1 x の整式 A と B とを $A = 3x^2 - 6ax - 2$, $B = 2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5$ とおく. $A + B$ と $A - B$ と $B - A$ とを x の整式として降冪の順に整理せよ.

$$\begin{aligned} A + B &= (3x^2 - 6ax - 2) + (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) \\ &= 2x^3 + (3 - 7a)x^2 - 3ax - 7 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B &= (3x^2 - 6ax - 2) - (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B - A &= (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) - (3x^2 - 6ax - 2) \\ &= \end{aligned}$$

問3.2.1 x の整式 A と B とを $A = 3x^2 - 6ax - 2$, $B = 2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5$ とおく. $A + B$ と $A - B$ と $B - A$ とを x の整式として降冪の順に整理せよ.

$$\begin{aligned} A + B &= (3x^2 - 6ax - 2) + (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) \\ &= 2x^3 + (3 - 7a)x^2 - 3ax - 7 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B &= (3x^2 - 6ax - 2) - (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) \\ &= -2x^3 + (7a + 3)x^2 - 9ax + 3 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B - A &= (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) - (3x^2 - 6ax - 2) \\ &= \end{aligned}$$

問3.2.1 x の整式 A と B とを $A = 3x^2 - 6ax - 2$, $B = 2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5$ とおく. $A + B$ と $A - B$ と $B - A$ とを x の整式として降冪の順に整理せよ.

$$\begin{aligned} A + B &= (3x^2 - 6ax - 2) + (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) \\ &= 2x^3 + (3 - 7a)x^2 - 3ax - 7 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B &= (3x^2 - 6ax - 2) - (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) \\ &= -2x^3 + (7a + 3)x^2 - 9ax + 3 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B - A &= (2x^3 - 7ax^2 + 3ax - 5) - (3x^2 - 6ax - 2) \\ &= 2x^3 - (7a + 3)x^2 + 9ax - 3 . \end{aligned}$$

終

整式と整式とを掛けることを整式の乗法という。整式の乗法の結果（積）はやはり整式になる。

まず単項式の乗法から始める．自然数 m, n 及び文字 x が現れない式 A, B に対して， x の単項式 Ax^m と Bx^n との積はやはり x の単項式になる：指数法則 $x^m x^n = x^{m+n}$ を用いると，

$$Ax^m \times Bx^n = ABx^m x^n = ABx^{m+n} .$$

多くの場合，整式の乗法の計算では結果を単項式の和か差かの形に整理する．この式変形を（整式の）展開という．

多くの場合，整式の乗法の計算では結果を単項式の和か差かの形に整理する．この式変形を（整式の）展開という．

整式の展開には2.1節で述べた四則演算の法則のうちの分配法則が重要になる：任意の数 a, b, c について，

$$a(b+c) = ab+ac, \quad (a+b)c = ac+bc.$$

例 x の 1 次式 $2x+5$ と $3x-4$ との積を展開して整理する．分配法則を用いる．

$$(2x+5)(3x-4) = 2x(3x-4) + 5(3x-4)$$

$$= 2x \cdot 3x - 2x \cdot 4 + 5 \cdot 3x - 5 \cdot 4$$

$$= 6x^2 - 8x + 15x - 20$$

$$= 6x^2 + 7x - 20 .$$

終

例 x の 1 次式 $2x - 5$ と 2 次式 $3x^2 - x - 7$ との積を展開して整理する.

$$\begin{aligned}(2x - 5)(3x^2 - x - 7) &= 2x(3x^2 - x - 7) - 5(3x^2 - x - 7) \\ &= 2x \cdot 3x^2 - 2x \cdot x - 2x \cdot 7 - 5 \cdot 3x^2 - 5 \cdot (-x) - 5 \cdot (-7) \\ &= 6x^3 - 2x^2 - 14x - 15x^2 + 5x + 35 \\ &= 6x^3 - 17x^2 - 9x + 35 .\end{aligned}$$

例 x の 1 次式 $2x - 5$ と 2 次式 $3x^2 - x - 7$ との積を展開して整理する.

$$\begin{aligned}(2x - 5)(3x^2 - x - 7) &= 2x(3x^2 - x - 7) - 5(3x^2 - x - 7) \\ &= 2x \cdot 3x^2 - 2x \cdot x - 2x \cdot 7 - 5 \cdot 3x^2 - 5 \cdot (-x) - 5 \cdot (-7) \\ &= 6x^3 - 2x^2 - 14x - 15x^2 + 5x + 35 \\ &= 6x^3 - 17x^2 - 9x + 35 .\end{aligned}$$

この展開を次のように計算することもある.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \times \\ \hline 6x^3 \leftarrow (3x^2 - x - 7) \times 2x \\ -15x^2 \leftarrow (3x^2 - x - 7) \times (-5) \\ \hline 6x^3 -17x^2 \leftarrow (3x^2 - x - 7) \times 2x + (3x^2 - x - 7) \times (-5) \end{array} \quad \boxed{\text{終}}$$

例 x の 1 次式 $2x - 5$ と 2 次式 $3x^2 - x - 7$ との積を展開して整理する.

$$\begin{aligned}(2x - 5)(3x^2 - x - 7) &= 2x(3x^2 - x - 7) - 5(3x^2 - x - 7) \\ &= 2x \cdot 3x^2 - 2x \cdot x - 2x \cdot 7 - 5 \cdot 3x^2 - 5 \cdot (-x) - 5 \cdot (-7) \\ &= 6x^3 - 2x^2 - 14x - 15x^2 + 5x + 35 \\ &= 6x^3 - 17x^2 - 9x + 35 .\end{aligned}$$

この展開を次のように計算することもある.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \times \\ \hline 6x^3 \leftarrow (3x^2 - x - 7) \times 2x \\ -15x^2 \leftarrow (3x^2 - x - 7) \times (-5) \\ \hline 6x^3 -17x^2 \leftarrow (3x^2 - x - 7) \times 2x + (3x^2 - x - 7) \times (-5) \end{array} \quad \boxed{\text{終}}$$

原則として、展開した結果は降冪の順（或いは昇冪の順）に整理する.

例 y の整式 $(2y - k)(y^2 - 3y + 2k)$ を展開して降冪の順に整理する.

$$\begin{aligned}(2y - k)(y^2 - 3y + 2k) &= 2y(y^2 - 3y + 2k) - k(y^2 - 3y + 2k) \\ &= 2y^3 - 6y^2 + 4ky - ky^2 + 3ky - 2k^2 \\ &= 2y^3 - (k + 6)y^2 + 7ky - 2k^2 .\end{aligned}$$

終

問3.2.2 以下の整式を展開して x の整式として降幂の順に整理せよ.

(1) $\left(3x + \frac{7}{2}\right)(2x^2 - 6x + 3).$

(2) $(3x - 2k)(x^2 + 2kx - 3).$

問3.2.2 以下の整式を展開して x の整式として降幂の順に整理せよ.

(1) $\left(3x + \frac{7}{2}\right)(2x^2 - 6x + 3)$.

(2) $(3x - 2k)(x^2 + 2kx - 3)$.

(1)

$$\begin{aligned}\left(3x + \frac{7}{2}\right)(2x^2 - 6x + 3) &= 6x^3 - 18x^2 + 9x + x^2 - 21x + \frac{21}{2} \\ &= 6x^3 - 11x^2 - 12x + \frac{21}{2} .\end{aligned}$$

問3.2.2 以下の整式を展開して x の整式として降幂の順に整理せよ.

$$(1) \left(3x + \frac{7}{2}\right)(2x^2 - 6x + 3). \quad (2) (3x - 2k)(x^2 + 2kx - 3).$$

(1)

$$\begin{aligned} \left(3x + \frac{7}{2}\right)(2x^2 - 6x + 3) &= 6x^3 - 18x^2 + 9x + x^2 - 21x + \frac{21}{2} \\ &= 6x^3 - 11x^2 - 12x + \frac{21}{2}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (3x - 2k)(x^2 + 2kx - 3) &= 3x^3 + 6kx^2 - 9x - (2kx^2 + 4k^2x - 6k) \\ &= 3x^3 + 4kx^2 - (4k^2 + 9)x + 6k. \end{aligned}$$

整式の展開に 2.3 節の乗法公式を使うこともある：任意の数 a, b, c, d, x について、

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (\text{複号同順}) ,$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 ,$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab ,$$

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd ,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \quad (\text{複号同順}) ,$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3 \quad (\text{複号同順}) .$$

例 x の整式 $(2x - 3)(x - 2k + 1)$ を展開して降冪の順に整理する. 乗法公式 $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$ を用いる.

例 x の整式 $(2x - 3)(x - 2k + 1)$ を展開して降冪の順に整理する．乗法公式 $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$ を用いる．

$$\begin{aligned}(2x - 3)(x - 2k + 1) &= (2x - 3)\{x + (-2k + 1)\} \\ &= 2x^2 + \{2(-2k + 1) - 3\}x - 3(-2k + 1) \\ &= 2x^2 + (-4k - 1)x + 6k - 3 \\ &= 2x^2 - (4k + 1)x + 6k - 3 .\end{aligned}$$

終

問3.2.3 x の整式 $(ax + 2)(3x - 4a)$ を展開して降冪の順に整理せよ.

$$(ax + 2)(3x - 4a) =$$

問3.2.3 x の整式 $(ax + 2)(3x - 4a)$ を展開して降冪の順に整理せよ.

$$(ax + 2)(3x - 4a) = 3ax^2 + (-4a^2 + 6)x - 8a = 3ax^2 + (6 - 4a^2)x - 8a .$$

例 y の整式 $\left(y + \frac{2}{3}\right)^3$ を展開して降冪の順に整理する．乗法公式 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ を用いる．

$$\left(y + \frac{2}{3}\right)^3 = y^3 + 3y^2 \frac{2}{3} + 3y \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27} .$$

終

問3.2.4 y の整式 $\left(y - \frac{4}{3}\right)^3$ を展開して降冪の順に整理せよ.

$$\left(y - \frac{4}{3}\right)^3 =$$

問3.2.4 y の整式 $\left(y - \frac{4}{3}\right)^3$ を展開して降冪の順に整理せよ.

$$\left(y - \frac{4}{3}\right)^3 = y^3 - 3y^2 \frac{4}{3} + 3y \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^3 = y^3 - 4y^2 + \frac{16}{3}y - \frac{64}{27} .$$

一般に、自然数 m と n について、

m 次式と n 次式との積は $(m+n)$ 次式

になる。