2. 拡充 2

2 の平方根は無理数であることの証明

正の 2 の平方根つまり $\sqrt{2}$ は小数で表せるので実数である．しかし $\sqrt{2}$ は有理数ではない；つまり $\sqrt{2}$ は無理数である．このことを証明する．

整数 m と n とが互いに素であるとは，m と n との公約数は 1 と -1 とだけであることである．

有理数は分母と分子とが整数である分数で表される．そのような分数は，できる限り約分していくと，いつかは約分できない分数になる．分数が約分できないとき，分母の整数と分子の整数との公約数は 1 と -1 とだけである；つまり分母の整数と分子の整数とは互いに素になる．このようにして次の定理が証明される．

[補助定理 **A**] 任意の有理数 x に対して $x = \dfrac{m}{n}$ となる互いに素な整数 m と n とがある．

補助定理をもう**1**つ準備する．

[補助定理 **B**] 任意の整数 m について，m^2 が偶数ならば m は偶数である．

証明　整数 m が奇数であれば，適当な整数 k を選ぶと $m = 2k+1$ となるので，

$$m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \ ;$$

従って m^2 も奇数である．つまり次のことがいえる：m が奇数ならば m^2 は奇数である．この対偶をとると次のことがいえる：m^2 が奇数でないならば m も奇数でない．奇数でない整数は偶数なので，次のことがいえる：m^2 が偶数ならば m は偶数である．　証明終了

有理数でない実数を無理数という．先に述べた 2 個の補助定理を用いて，$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明する．$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定して矛盾を導く．

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する．補助定理 **A** により，$\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ となる互いに素な **2** つの整数 m と n とがある．

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \sqrt{2}^2 \ ,$$

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \ ,$$

$$2n^2 = m^2 \ .$$

$2n^2$ は偶数であるので m^2 は偶数である．従って，補助定理 **B** により，m も偶数である．なので，$k = \dfrac{m}{2}$ とおくと，k は整数である．上の等式 $2n^2 = m^2$ 及び $m = 2k$ より，

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2 \ ,$$

$$n^2 = 2k^2 \ .$$

$2k^2$ は偶数であるので n^2 は偶数である，従って，上の補助定理 **B** により，n も偶数である．このように，m も n も偶数である．

このように，$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると，m も n も偶数であるので，2 は m と n との公約数である．ところが，m と n とは互いに素である．つまり，m と n の公約数は 1 と -1 とだけである．$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると矛盾が生じるので，$\sqrt{2}$ が有理数であるという仮定は間違いである．つまり $\sqrt{2}$ は有理数ではない．