2.9 複素数の性質

総ての実数は複素数であり，複素数と複素数との和・差・積・商はやはり複素数である．

総ての実数は複素数であり，複素数と複素数との和・差・積・商はやはり複素数である．実数 b と虚数単位 i は複素数なので，それらの積 ib は複素数である．また，複素数 ib と実数 a との和 $a+ib$ も複素数である．つまり，任意の実数 a と b とに対して $a+ib$ は複素数である．

総ての実数は複素数であり，複素数と複素数との和・差・積・商はやはり複素数である．実数 b と虚数単位 i は複素数なので，それらの積 ib は複素数である．また，複素数 ib と実数 a との和 $a+ib$ も複素数である．つまり，任意の実数 a と b とに対して $a+ib$ は複素数である．このような形の複素数どうしの和・差・積・商を考える．

例 複素数 $\alpha = 5 - 4i$ と $\beta = 2 + 3i$ とについて次のように四則演算ができる:

$$\alpha + \beta = 5 - 4i + 2 + 3i = 7 - i \ ,$$

$$\alpha - \beta = 5 - 4i - (2 + 3i) = 3 - 7i \ ,$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (5 - 4i)(2 + 3i) = 10 + 15i - 8i - 12i^2 = 10 + 7i + 12 \\ &= 22 + 7i \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{5 - 4i}{2 + 3i} = \frac{(5 - 4i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{10 - 15i - 8i + 12i^2}{2^2 - 3^2 i^2} = \frac{10 - 23i - 12}{4 + 9} \\ &= -\frac{2}{13} - \frac{23}{13}i \ .\end{aligned}$$

終

例 複素数 $\alpha = 5-4i$ と $\beta = 2+3i$ とについて次のように四則演算ができる:

$$\alpha+\beta = 5-4i+2+3i = 7-i\ ,$$

$$\alpha-\beta = 5-4i-(2+3i) = 3-7i\ ,$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (5-4i)(2+3i) = 10+15i-8i-12i^2 = 10+7i+12\\ &= 22+7i\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{5-4i}{2+3i} = \frac{(5-4i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10-15i-8i+12i^2}{2^2-3^2i^2} = \frac{10-23i-12}{4+9}\\ &= -\frac{2}{13}-\frac{23}{13}i\ .\end{aligned}$$

終

このように計算すると, $a+ib$ (a, b は実数)の形の複素数どうしの和・差・積・商はやはり $a+ib$ (a, b は実数)の形に整理できる.

$a+ib$ （ a,b は実数）の形の複素数どうしの和・差・積・商はやはり $a+ib$ （ a,b は実数）の形に整理できるので，複素数は $a+ib$ （ a,b は実数）の形で総て間に合う.

$a+ib$ （a,b は実数）の形の複素数どうしの和・差・積・商はやはり $a+ib$ （a,b は実数）の形に整理できるので，複素数は $a+ib$ （a,b は実数）の形で総て間に合う．よって，

複素数とは $a+ib$ （a,b は実数）の形で表せる数である

といえる．

$a+ib$ （a, b は実数）の形の複素数どうしの和・差・積・商はやはり $a+ib$ （a, b は実数）の形に整理できるので，複素数は $a+ib$ （a, b は実数）の形で総て間に合う．よって，

複素数とは $a+ib$ （a, b は実数）の形で表せる数である

といえる．

複素数 α について $\alpha = a+ib$（a, b は実数）であるとき，実数 a を複素数 α の実部といい，実数 b を複素数 α の虚部という．

複素数について以下の定理が成り立つ．

[定理 2.9.1]　実数 a と b とについて，

$$a + ib = 0 \iff a = b = 0 \ .$$

[定理 2.9.2]　実数 a, b, c, d について，

$$a + ib = c + id \iff a = c \ \text{かつ} \ b = d \ .$$

[定理 **2.9.2**] 実数 a, b, c, d について,

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ かつ } b = d \ .$$

[定理 **2.9.2**] 実数 a, b, c, d について，

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ かつ } b = d \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 x と y とについて $(2x + y) + i(x + 3y) = 4 - 3i$ とする．このような実数 x, y を求める．

[定理 **2.9.2**] 実数 a, b, c, d について,

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ かつ } b = d \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 x と y とについて $(2x+y)+i(x+3y)=4-3i$ とする. このような実数 x, y を求める. x と y とは実数なので, $2x+y$ と $x+3y$ とは実数である.

[定理 **2.9.2**] 実数 a, b, c, d について,

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ かつ } b = d \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 x と y とについて $(2x + y) + i(x + 3y) = 4 - 3i$ とする. このような実数 x, y を求める. x と y とは実数なので, $2x + y$ と $x + 3y$ とは実数である. $(2x + y) + i(x + 3y) = 4 - 3i$ なので, 定理 **2.9.2** により,

$$2x + y = 4 \text{ かつ } x + 3y = -3 \ .$$

[定理 **2.9.2**] 実数 a, b, c, d について，

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ かつ } b = d \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 x と y とについて $(2x+y)+i(x+3y)=4-3i$ とする．このような実数 x, y を求める．x と y とは実数なので，$2x+y$ と $x+3y$ とは実数である． $(2x+y)+i(x+3y)=4-3i$ なので，定理 **2.9.2** により，

$$2x+y = 4 \text{ かつ } x+3y = -3 \ .$$

x と y とに関するこの連立方程式を解くと， $x=3$ かつ $y=-2$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問2.9.1}$ 実数 x と y とについて $(x-4y)+i(2x+3y)=17+i$ とする．このような実数 x,y を求めよ．

　x と y とは実数なので，$x-4y$ と $2x+3y$ とは実数である．$(x-4y)+i(2x+3y)=17+i$ なので，　　　　　　　かつ　　　　　　　．この連立方程式を解くと，$x=$　　かつ $y=$　　．

問2.9.1 実数 x と y とについて $(x-4y)+i(2x+3y)=17+i$ とする．このような実数 x, y を求めよ．

　x と y とは実数なので，$x-4y$ と $2x+3y$ とは実数である．$(x-4y)+i(2x+3y)=17+i$ なので，$x-4y=17$ かつ $2x+3y=1$ ．この連立方程式を解くと，$x=5$ かつ $y=-3$ ．終

[定理 **2.9.2**]　実数 a, b, c, d について，

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ かつ } b = d \ .$$

[定理 **2.9.2**] 実数 a, b, c, d について,

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ かつ } b = d \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 a と b とについて $a(5+2i) + b(4-3i) = 1 - 18i$ とする. このような実数 a, b を求める.

[定理 **2.9.2**] 実数 a, b, c, d について，

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ かつ } b = d \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 a と b とについて $a(5+2i)+b(4-3i)=1-18i$ とする．このような実数 a, b を求める．まず等式の左辺 $a(5+2i)+b(4-3i)$ を整理する：

$$a(5+2i)+b(4-3i) = 5a+2ai+4b-3bi = 5a+4b+i(2a-3b) \ .$$

[定理 **2.9.2**] 実数 a, b, c, d について,

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ かつ } b = d \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 a と b とについて $a(5+2i)+b(4-3i)=1-18i$ とする. このような実数 a, b を求める. まず等式の左辺 $a(5+2i)+b(4-3i)$ を整理する:

$$a(5+2i)+b(4-3i) = 5a+2ai+4b-3bi = 5a+4b+i(2a-3b) \ .$$

a と b とは実数なので, $5a+4b$ と $2a-3b$ とは実数である.

[定理 **2.9.2**] 実数 a, b, c, d について,

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ かつ } b = d \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 a と b とについて $a(5+2i)+b(4-3i)=1-18i$ とする. このような実数 a, b を求める. まず等式の左辺 $a(5+2i)+b(4-3i)$ を整理する:

$$a(5+2i)+b(4-3i) = 5a+2ai+4b-3bi = 5a+4b+i(2a-3b) \ .$$

a と b とは実数なので, $5a+4b$ と $2a-3b$ とは実数である.
$5a+4b+i(2a-3b)=1-18i$ なので, 定理 **2.9.2** により,

$$5a+4b=1 \text{ かつ } 2a-3b=-18 \ .$$

[定理 **2.9.2**] 実数 a,b,c,d について,

$$a+ib = c+id \iff a=c \text{ かつ } b=d \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 a と b とについて $a(5+2i)+b(4-3i)=1-18i$ とする. このような実数 a,b を求める. まず等式の左辺 $a(5+2i)+b(4-3i)$ を整理する:

$$a(5+2i)+b(4-3i) = 5a+2ai+4b-3bi = 5a+4b+i(2a-3b) \ .$$

a と b とは実数なので, $5a+4b$ と $2a-3b$ とは実数である.
$5a+4b+i(2a-3b)=1-18i$ なので, 定理 **2.9.2** により,

$$5a+4b=1 \text{ かつ } 2a-3b=-18 \ .$$

a と b とに関するこの連立方程式を解くと, $a=-3$ かつ $b=4$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}2.9.2}$ 実数 a と b とについて $a(3+4i)-b(5-2i)=19+8i$ とする．このような実数 a,b を求めよ．

$$a(3+4i)-b(5-2i)=$$

a と b とは実数なので，　　　と　　　とは実数である．

　　　　　　　　なので，　　　　　かつ　　　　　．この連立方程式を解くと，$a=$　　かつ $b=$　　．

$\boxed{問 2.9.2}$ 実数 a と b とについて $a(3+4i)-b(5-2i)=19+8i$ とする．このような実数 a,b を求めよ．

$$a(3+4i)-b(5-2i) = 3a+4ai-5b+2bi = 3a-5b+i(4a+2b)\ .$$

a と b とは実数なので，$3a-5b$ と $4a+2b$ とは実数である．
$3a-5b+i(4a+2b)=19+8i$ なので，$3a-5b=19$ かつ $4a+2b=8$ ．この連立方程式を解くと，$a=3$ かつ $b=-2$ ． $\boxed{終}$

複素数は $a+ib$（a,b とは実数）の形で表せる．ここで $b=0$ のとき，$a+ib=a+i\cdot 0=a$ は実数である．かたや，$b\neq 0$ のときは，$a+ib$ は実数でない複素数つまり虚数になる．

複素数は $a+ib$（a,b とは実数）の形で表せる．ここで $b=0$ のとき，$a+ib=a+i\cdot 0=a$ は実数である．かたや，$b\neq 0$ のときは，$a+ib$ は実数でない複素数つまり虚数になる．

[定理 **2.9.3**]　実数 a と b とについて，

$$\text{複素数 } a+ib \text{ が実数である} \iff b=0 \quad ,$$

$$\begin{aligned}\text{複素数 } a+ib \text{ が虚数である} &\iff \text{複素数 } a+ib \text{ が実数でない}\\ &\iff b\neq 0 \quad .\end{aligned}$$

[定理 **2.9.3**] 実数 a と b とについて，

$$\text{複素数 } a+ib \text{ が実数である} \iff b = 0 \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数を表す変数 x について，複素数 $(3-2i)(x+4i)$ が実数である条件をなるべく簡単に表す.

[定理 **2.9.3**] 実数 a と b とについて,

$$\text{複素数 } a+ib \text{ が実数である} \iff b=0 \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数を表す変数 x について，複素数 $(3-2i)(x+4i)$ が実数である条件をなるべく簡単に表す.

$$(3-2i)(x+4i)=3x+12i-2xi-8\cdot(-1)=3x+8+i(12-2x)\ .$$

[定理 **2.9.3**] 実数 a と b とについて,

$$\text{複素数 } a+ib \text{ が実数である} \iff b=0 \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数を表す変数 x について，複素数 $(3-2i)(x+4i)$ が実数である条件をなるべく簡単に表す.

$$(3-2i)(x+4i) = 3x+12i-2xi-8\cdot(-1) = 3x+8+i(12-2x) \ .$$

$3x+8$ と $12-2x$ とは実数なので，複素数 $(3-2i)(x+4i)$ が実数である条件は，$12-2x=0$ ，つまり $x=6$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}2.9.3}$ 実数を表す変数 x について，複素数 $(4-3i)(x+6i)$ が実数である条件をなるべく簡単に表せ.

$$(4-3i)(x+6i) =$$

と　　　　とは実数なので，複素数 $(4-3i)(x+6i)$ が実数である条件は，　　　　，つまり $x =$　.

問2.9.3 実数を表す変数 x について，複素数 $(4-3i)(x+6i)$ が実数である条件をなるべく簡単に表せ.

$$(4-3i)(x+6i) = 4x+24i-3xi+18 = 4x+18+i(24-3x)\ .$$

$4x+18$ と $24-3x$ とは実数なので，複素数 $(4-3i)(x+6i)$ が実数である条件は， $24-3x=0$ ，つまり $x=8$. 終

[定理 **2.9.3**]　実数 a と b とについて，

$$\text{複素数 } a+ib \text{ が虚数である} \iff \text{複素数 } a+ib \text{ が実数でない} \iff b \neq 0 \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$　実数を表す変数 x について，複素数 $(2+3i)(x-6i)$ が虚数である条件をなるべく簡単に表す.

[定理 **2.9.3**] 実数 a と b とについて,

$$\text{複素数 } a+ib \text{ が虚数である} \iff \text{複素数 } a+ib \text{ が実数でない}$$

$$\iff b \neq 0 \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数を表す変数 x について,複素数 $(2+3i)(x-6i)$ が虚数である条件をなるべく簡単に表す.

$$(2+3i)(x-6i) = 2x-12i+3xi+18 = 2x+18+i(3x-12) \ .$$

[定理 **2.9.3**] 実数 a と b とについて，

$$\text{複素数 } a+ib \text{ が虚数である} \iff \text{複素数 } a+ib \text{ が実数でない}$$
$$\iff b \neq 0 \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数を表す変数 x について，複素数 $(2+3i)(x-6i)$ が虚数である条件をなるべく簡単に表す.

$$(2+3i)(x-6i) = 2x-12i+3xi+18 = 2x+18+i(3x-12) \ .$$

$2x+18$ と $3x-12$ とは実数なので，複素数 $(2+3i)(x-6i)$ が虚数である条件は， $3x-12 \neq 0$ ，つまり $x \neq 4$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}2.9.4}$ 実数を表す変数 x について，複素数 $(3-4i)(x+8i)$ が虚数である条件をなるべく簡単に表せ.

$\boxed{問2.9.4}$ 実数を表す変数 x について，複素数 $(3-4i)(x+8i)$ が虚数である条件をなるべく簡単に表せ.

$$(3-4i)(x+8i) = 3x+24i-4xi+32 = 3x+32+i(24-4x) \ .$$

$3x+32$ と $24-4x$ とは実数なので，

$\boxed{問2.9.4}$ 実数を表す変数 x について，複素数 $(3-4i)(x+8i)$ が虚数である条件をなるべく簡単に表せ．

$$(3-4i)(x+8i) = 3x+24i-4xi+32 = 3x+32+i(24-4x)\ .$$

$3x+32$ と $24-4x$ とは実数なので，複素数 $(3-4i)(x+8i)$ が虚数である条件は，$24-4x \neq 0$ ，つまり $x \neq 6$ ． $\boxed{終}$

なお，虚数については大小関係を考えない．なので，不等式の右辺及び左辺の数は実数に限る．