2.8 複素数

2 の平方根は有理数の中には無かった．そこで，2 の平方根の一つを $\sqrt{2}$ と表して新しい数（有理数でない数）を作った．

　2 の平方根は有理数の中には無かった．そこで，2 の平方根の一つを $\sqrt{2}$ と表して新しい数（有理数でない数）を作った．同じようなことを -1 について考える．-1 の平方根は実数の中に無い．そこで，-1 の平方根の一つを $\sqrt{-1}$ または i と表して新しい数（実数でない数）を作る．

2 の平方根は有理数の中には無かった．そこで，2 の平方根の一つを $\sqrt{2}$ と表して新しい数（有理数でない数）を作った．同じようなことを -1 について考える．-1 の平方根は実数の中に無い．そこで，-1 の平方根の一つを $\sqrt{-1}$ または i と表して新しい数（実数でない数）を作る．この数 i を虚数単位という．虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ は -1 の平方根なので

$$i^2 = -1 \ .$$

有理数に加えて例えば無理数 $\sqrt{2}$ を考えると，四則演算によって，例えば

$$9-\sqrt{2}\ ,\quad 7\sqrt{2}\ ,\quad \frac{9}{4}+3\sqrt{2}\ ,\quad \frac{7-5\sqrt{2}}{4}\ ,\quad \frac{5\sqrt{2}-8}{6+\sqrt{2}}$$

などの数ができる．

有理数に加えて例えば無理数 $\sqrt{2}$ を考えると，四則演算によって，例えば

$$9-\sqrt{2}\ ,\quad 7\sqrt{2}\ ,\quad \frac{9}{4}+3\sqrt{2}\ ,\quad \frac{7-5\sqrt{2}}{4}\ ,\quad \frac{5\sqrt{2}-8}{6+\sqrt{2}}$$

などの数ができる．このことと同様に，実数に加えて虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ を考えると，四則演算によって，例えば

$$9-i\ ,\quad 7i\ ,\quad \frac{9}{4}+3i\ ,\quad \frac{7-5i}{4}\ ,\quad \frac{5i-8}{6+i}$$

などの数ができる．

有理数に加えて例えば無理数 $\sqrt{2}$ を考えると，四則演算によって，例えば

$$9-\sqrt{2}\ ,\quad 7\sqrt{2}\ ,\quad \frac{9}{4}+3\sqrt{2}\ ,\quad \frac{7-5\sqrt{2}}{4}\ ,\quad \frac{5\sqrt{2}-8}{6+\sqrt{2}}$$

などの数ができる．このことと同様に，実数に加えて虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ を考えると，四則演算によって，例えば

$$9-i\ ,\quad 7i\ ,\quad \frac{9}{4}+3i\ ,\quad \frac{7-5i}{4}\ ,\quad \frac{5i-8}{6+i}$$

などの数ができる．更には，$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ や $\sqrt{5}$ なども実数なので，

$$2\sqrt{3}+4i\ ,\quad \frac{5-3\sqrt{2}\,i}{8}\ ,\quad \frac{4+\sqrt{3}\,i}{7i-\sqrt{5}}$$

などの数もできる．

有理数に加えて例えば無理数 $\sqrt{2}$ を考えると，四則演算によって，例えば

$$9-\sqrt{2}\ ,\quad 7\sqrt{2}\ ,\quad \frac{9}{4}+3\sqrt{2}\ ,\quad \frac{7-5\sqrt{2}}{4}\ ,\quad \frac{5\sqrt{2}-8}{6+\sqrt{2}}$$

などの数ができる．このことと同様に，実数に加えて虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ を考えると，四則演算によって，例えば

$$9-i\ ,\quad 7i\ ,\quad \frac{9}{4}+3i\ ,\quad \frac{7-5i}{4}\ ,\quad \frac{5i-8}{6+i}$$

などの数ができる．更には，$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ や $\sqrt{5}$ なども実数なので，

$$2\sqrt{3}+4i\ ,\quad \frac{5-3\sqrt{2}\,i}{8}\ ,\quad \frac{4+\sqrt{3}\,i}{7i-\sqrt{5}}$$

などの数もできる．このようにしてできる数を複素数という．

有理数に加えて例えば無理数 $\sqrt{2}$ を考えると，四則演算によって，例えば

$$9-\sqrt{2}\ ,\quad 7\sqrt{2}\ ,\quad \frac{9}{4}+3\sqrt{2}\ ,\quad \frac{7-5\sqrt{2}}{4}\ ,\quad \frac{5\sqrt{2}-8}{6+\sqrt{2}}$$

などの数ができる．このことと同様に，実数に加えて虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ を考えると，四則演算によって，例えば

$$9-i\ ,\quad 7i\ ,\quad \frac{9}{4}+3i\ ,\quad \frac{7-5i}{4}\ ,\quad \frac{5i-8}{6+i}$$

などの数ができる．更には，$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ や $\sqrt{5}$ なども実数なので，

$$2\sqrt{3}+4i\ ,\quad \frac{5-3\sqrt{2}\,i}{8}\ ,\quad \frac{4+\sqrt{3}\,i}{7i-\sqrt{5}}$$

などの数もできる．このようにしてできる数を複素数という．つまり，複素数とは，実数と虚数単位 i とから何回か四則演算を行ってできる数のことである．

複素数の全体 $\mathbf{C}$ は以下の $\mathbf{3}$ 条件を満たす必要最小限の集合である：

(1) 総ての実数は集合 $\mathbf{C}$ に属す；

(2) 虚数単位 i は集合 $\mathbf{C}$ に属す；

(3) 集合 $\mathbf{C}$ の要素の和・差・積・商（0 で割る商は除く）はやはり $\mathbf{C}$ の要素であり，集合 $\mathbf{C}$ の要素について四則演算の法則が成り立つ：つまり，$\mathbf{C}$ の任意の要素 α, β, γ について，

（加法の交換法則） $$\alpha + \beta = \beta + \alpha \ ;$$

（乗法の交換法則） $$\alpha\beta = \beta\alpha \ ;$$

（加法の結合法則） $$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \ ;$$

（乗法の結合法則） $$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \ ;$$

$$0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha \ ;$$

$$1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha \ ;$$

$$-\alpha + \alpha = \alpha + (-\alpha) = 0 \ ;$$

$$\alpha \neq 0 \ \text{のとき} \quad \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1 \quad ;$$

（分配法則） $$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \ , \qquad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \ .$$

　このようにして，実数の範囲より広い複素数の範囲を考える．実数でない複素数を虚数 という．数について次のように分類される：

$$
\text{複素数}\begin{cases}\text{実数}\begin{cases}\text{有理数}\\ \text{有理数でない実数} = \text{無理数}\end{cases}\\ \text{実数でない複素数} = \text{虚数}\end{cases}.
$$

複素数の定義により，複素数と複素数との和・差・積・商はやはり複素数であり，複素数の範囲で，四則演算の法則から導かれる性質は総て成り立つ．例えば，複素数についても乗法公式や指数法則が成り立つ．

複素数の定義により，複素数と複素数との和・差・積・商はやはり複素数であり，複素数の範囲で，四則演算の法則から導かれる性質は総て成り立つ．例えば，複素数についても乗法公式や指数法則が成り立つ．なので，虚数単位 i をあたかも文字のように扱って，複素数についても実数のときと同じように四則演算及び冪が計算できる．

複素数の定義により，複素数と複素数との和・差・積・商はやはり複素数であり，複素数の範囲で，四則演算の法則から導かれる性質は総て成り立つ．例えば，複素数についても乗法公式や指数法則が成り立つ．なので，虚数単位 i をあたかも文字のように扱って，複素数についても実数のときと同じように四則演算及び冪が計算できる．但し，$i^2 = -1$ なので，i^2 は -1 で置き換える．

虚数単位 i を考えると負の各実数の平方根ができる.

虚数単位 i を考えると負の各実数の平方根ができる.

例 $(\pm\sqrt{3})^2 = \sqrt{3}^2 = 3$ なので,

虚数単位 i を考えると負の各実数の平方根ができる.

$\boxed{例}$ $\left(\pm\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{3}^{\,2} = 3$ なので, $x = \pm\sqrt{3}\,i$ とすると,

$$x^2 = \left(\pm\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(\pm\sqrt{3}\right)^2 i^2 = 3\cdot(-1) = -3\ ,$$

虚数単位 i を考えると負の各実数の平方根ができる.

例 $\left(\pm\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{3}^{\,2} = 3$ なので, $x = \pm\sqrt{3}\,i$ とすると,

$$x^2 = \left(\pm\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(\pm\sqrt{3}\right)^2 i^2 = 3\cdot(-1) = -3\ ,$$

よって $x = \pm\sqrt{3}\,i$ は -3 の平方根である. 終

虚数単位 i を考えると負の各実数の平方根ができる.

$\boxed{例}$ $(\pm\sqrt{3})^2 = \sqrt{3}^{\,2} = 3$ なので, $x = \pm\sqrt{3}\,i$ とすると,

$$x^2 = (\pm\sqrt{3}\,i)^2 = (\pm\sqrt{3})^2 i^2 = 3\cdot(-1) = -3 \ ,$$

よって $x = \pm\sqrt{3}\,i$ は -3 の平方根である. $\boxed{終}$

一般に, 実数 b について $b > 0$ のとき, $(\pm\sqrt{b})^2 = b$ なので,

$$(\pm\sqrt{b}\,i)^2 = (\pm\sqrt{b})^2 i^2 = b\cdot(-1) = -b \ .$$

虚数単位 i を考えると負の各実数の平方根ができる.

$\boxed{\text{例}}$ $\left(\pm\sqrt{3}\right)^2=\sqrt{3}^{\,2}=3$ なので, $x=\pm\sqrt{3}\,i$ とすると,

$$x^2 = \left(\pm\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(\pm\sqrt{3}\right)^2 i^2 = 3\cdot(-1) = -3\ ,$$

よって $x=\pm\sqrt{3}\,i$ は -3 の平方根である. $\boxed{\text{終}}$

一般に, 実数 b について $b>0$ のとき, $\left(\pm\sqrt{b}\right)^2=b$ なので,

$$\left(\pm\sqrt{b}\,i\right)^2 = \left(\pm\sqrt{b}\right)^2 i^2 = b\cdot(-1) = -b\ .$$

ここで $-b=a$ とおく. $b>0$ なので $a<0$, つまり a は負の実数である.

虚数単位 i を考えると負の各実数の平方根ができる.

例 $\left(\pm\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{3}^{\,2} = 3$ なので, $x = \pm\sqrt{3}\,i$ とすると,

$$x^2 = \left(\pm\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(\pm\sqrt{3}\right)^2 i^2 = 3\cdot(-1) = -3\ ,$$

よって $x = \pm\sqrt{3}\,i$ は -3 の平方根である. 終

一般に, 実数 b について $b > 0$ のとき, $\left(\pm\sqrt{b}\right)^2 = b$ なので,

$$\left(\pm\sqrt{b}\,i\right)^2 = \left(\pm\sqrt{b}\right)^2 i^2 = b\cdot(-1) = -b\ ,$$

ここで $-b = a$ とおく. $b > 0$ なので $a < 0$, つまり a は負の実数である. $b = -a > 0$ なので,

$$\left(\pm\sqrt{-a}\,i\right)^2 = \left(\pm\sqrt{b}\,i\right)^2 = -b = a\ ;$$

虚数単位 i を考えると負の各実数の平方根ができる．

$\boxed{\text{例}}$ $\left(\pm\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{3}^{\,2} = 3$ なので， $x = \pm\sqrt{3}\,i$ とすると，

$$x^2 = \left(\pm\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(\pm\sqrt{3}\right)^2 i^2 = 3\cdot(-1) = -3 \ ,$$

よって $x = \pm\sqrt{3}\,i$ は -3 の平方根である． $\boxed{\text{終}}$

一般に，実数 b について $b > 0$ のとき， $\left(\pm\sqrt{b}\right)^2 = b$ なので，

$$\left(\pm\sqrt{b}\,i\right)^2 = \left(\pm\sqrt{b}\right)^2 i^2 = b\cdot(-1) = -b \ .$$

ここで $-b = a$ とおく． $b > 0$ なので $a < 0$ ，つまり a は負の実数である．
$b = -a > 0$ なので，

$$\left(\pm\sqrt{-a}\,i\right)^2 = \left(\pm\sqrt{b}\,i\right)^2 = -b = a \ ;$$

このように $\pm\sqrt{-a}\,i$ の 2 乗は a なので，$\pm\sqrt{-a}\,i$ は a の平方根である．

　虚数単位 i を考えると負の各実数の平方根ができる．

$\boxed{例}$ $\left(\pm\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{3}^{\,2} = 3$ なので， $x = \pm\sqrt{3}\,i$ とすると，

$$x^2 = \left(\pm\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(\pm\sqrt{3}\right)^2 i^2 = 3\cdot(-1) = -3 \ ,$$

よって $x = \pm\sqrt{3}\,i$ は -3 の平方根である． $\boxed{終}$

　一般に，実数 b について $b > 0$ のとき， $\left(\pm\sqrt{b}\right)^2 = b$ なので，

$$\left(\pm\sqrt{b}\,i\right)^2 = \left(\pm\sqrt{b}\right)^2 i^2 = b\cdot(-1) = -b \ .$$

ここで $-b = a$ とおく． $b > 0$ なので $a < 0$ ，つまり a は負の実数である．
$b = -a > 0$ なので，

$$\left(\pm\sqrt{-a}\,i\right)^2 = \left(\pm\sqrt{b}\,i\right)^2 = -b = a \ ;$$

このように $\pm\sqrt{-a}\,i$ の 2 乗は a なので， $\pm\sqrt{-a}\,i$ は a の平方根である．

[定理 **2.8.1**]　負の実数 a に対して，虚数 $\pm i\sqrt{-a}$ は a の平方根である．

[定理 **2.8.1**] 負の実数 a について，虚数 $\pm i\sqrt{-a}$ は a の平方根である.

負の実数 a の平方根 $i\sqrt{-a}$ を $\sqrt{a}$ と表記する.

[定理 **2.8.1**] 負の実数 a について，虚数 $\pm i\sqrt{-a}$ は a の平方根である．

負の実数 a の平方根 $i\sqrt{-a}$ を $\sqrt{a}$ と表記する．

[定義] 負実数 a に対して $\sqrt{a}$ を次のように定義する：

$$\sqrt{a} = i\sqrt{-a} \ .$$

例えば，

$$\sqrt{-5} = \sqrt{-(-5)}\,i = \sqrt{5}\,i \ , \qquad \sqrt{-9} = \sqrt{-(-9)}\,i = \sqrt{9}\,i = 3i \ .$$

こうして，実数 a について， $a \geq 0$ のときも $a < 0$ のときも $\sqrt{a}$ の値が定義された．但し $a < 0$ のときは $\sqrt{a}$ は虚数である．

こうして，実数 a について， $a \geq 0$ のときも $a < 0$ のときも $\sqrt{a}$ の値が定義された．但し $a < 0$ のときは $\sqrt{a}$ は虚数である． $a \geq 0$ のとき $\sqrt{a}^2 = a$ ． $a < 0$ のとき，定理 **2.8.1** により，虚数 $\sqrt{a} = i\sqrt{-a}$ は a の平方根なので $\sqrt{a}^2 = a$ ．このように， $a \geq 0$ のときも $a < 0$ のとき $\sqrt{a}^2 = a$ ．

こうして，実数 a について， $a \geq 0$ のときも $a < 0$ のときも $\sqrt{a}$ の値が定義された．但し $a < 0$ のときは $\sqrt{a}$ は虚数である． $a \geq 0$ のとき $\sqrt{a}^2 = a$ ． $a < 0$ のとき，定理 **2.8.1** により，虚数 $\sqrt{a} = i\sqrt{-a}$ は a の平方根なので $\sqrt{a}^2 = a$ ．このように， $a \geq 0$ のときも $a < 0$ のときも $\sqrt{a}^2 = a$ ．

[定理 **2.8.2**]　任意の実数 a について $\sqrt{a}^2 = a$ ．

こうして，実数 a について，$a \geq 0$ のときも $a < 0$ のときも $\sqrt{a}$ の値が定義された．但し $a < 0$ のときは $\sqrt{a}$ は虚数である．$a \geq 0$ のとき $\sqrt{a}^2 = a$ ．$a < 0$ のとき，定理 **2.8.1** により，虚数 $\sqrt{a} = i\sqrt{-a}$ は a の平方根なので $\sqrt{a}^2 = a$ ．このように，$a \geq 0$ のときも $a < 0$ のときも $\sqrt{a}^2 = a$ ．

[定理 **2.8.2**]　任意の実数 a について $\sqrt{a}^2 = a$ ．

更にこの定理により，任意の実数 a について，$\left(-\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a}^2$

[定理 **2.3.1**] 任意の数 a について $(-a)^2 = a^2$ ．

こうして，実数 a について， $a \geq 0$ のときも $a < 0$ のときも $\sqrt{a}$ の値が定義された．但し $a < 0$ のときは $\sqrt{a}$ は虚数である． $a \geq 0$ のとき ${\sqrt{a}}^2 = a$ ． $a < 0$ のとき，定理 **2.8.1** により，虚数 $\sqrt{a} = i\sqrt{-a}$ は a の平方根なので ${\sqrt{a}}^2 = a$ ．このように， $a \geq 0$ のときも $a < 0$ のときも ${\sqrt{a}}^2 = a$ ．

[定理 **2.8.2**]　任意の実数 a について ${\sqrt{a}}^2 = a$ ．

更にこの定理により，任意の実数 a について， $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = {\sqrt{a}}^2 = a$ なので，

こうして，実数 a について， $a \geq 0$ のときも $a < 0$ のときも $\sqrt{a}$ の値が定義された．但し $a < 0$ のときは $\sqrt{a}$ は虚数である． $a \geq 0$ のとき $\sqrt{a}^2 = a$ ． $a < 0$ のとき，定理 **2.8.1** により，虚数 $\sqrt{a} = i\sqrt{-a}$ は a の平方根なので $\sqrt{a}^2 = a$ ．このように， $a \geq 0$ のときも $a < 0$ のときも $\sqrt{a}^2 = a$ ．

[定理 **2.8.2**]　任意の実数 a について $\sqrt{a}^2 = a$ ．

更にこの定理により，任意の実数 a について， $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a}^2 = a$ なので， $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ とは a の平方根である；

こうして，実数 a について， $a \geq 0$ のときも $a < 0$ のときも $\sqrt{a}$ の値が定義された．但し $a < 0$ のときは $\sqrt{a}$ は虚数である． $a \geq 0$ のとき $\sqrt{a}^2 = a$ ． $a < 0$ のとき，定理 **2.8.1** により，虚数 $\sqrt{a} = i\sqrt{-a}$ は a の平方根なので $\sqrt{a}^2 = a$ ．このように， $a \geq 0$ のときも $a < 0$ のときも $\sqrt{a}^2 = a$ ．

[定理 **2.8.2**]　任意の実数 a について $\sqrt{a}^2 = a$ ．

更にこの定理により，任意の実数 a について， $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a}^2 = a$ なので， $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ とは a の平方根である；これ以外に a の平方根は無いので， a の平方根は $\pm\sqrt{a}$ である．ここで複号 $\pm$ を忘れないこと．

$\boxed{\text{例}}$ $-\dfrac{11}{75}$ の平方根をなるべく簡単に表す.

$\boxed{\text{例}}$ $-\dfrac{11}{75}$ の平方根をなるべく簡単に表す.

$$\sqrt{-\frac{11}{75}} = \sqrt{-\left(-\frac{11}{75}\right)}\,i$$

実数 a について $a<0$ のとき $\sqrt{a}=\sqrt{-a}\,i$.

$\boxed{\text{例}}$ $-\dfrac{11}{75}$ の平方根をなるべく簡単に表す.

$$\sqrt{-\frac{11}{75}} = \sqrt{-\left(-\frac{11}{75}\right)}i = \sqrt{\frac{11}{75}}i = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3 \cdot 5^2}}i = \frac{\sqrt{11}\sqrt{3}}{3 \cdot 5}i = \frac{\sqrt{33}}{15}i \ .$$

例 $-\dfrac{11}{75}$ の平方根をなるべく簡単に表す.

$$\sqrt{-\frac{11}{75}} = \sqrt{-\left(-\frac{11}{75}\right)}i = \sqrt{\frac{11}{75}}i = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3\cdot 5^2}}i = \frac{\sqrt{11}\sqrt{3}}{3\cdot 5}i = \frac{\sqrt{33}}{15}i\ .$$

$-\dfrac{11}{75}$ の平方根は $\pm\dfrac{\sqrt{33}}{15}i$ である. ここで複号 $\pm$ を忘れないこと.

例 $-\dfrac{11}{75}$ の平方根をなるべく簡単に表す.

$$\sqrt{-\frac{11}{75}}=\sqrt{-\left(-\frac{11}{75}\right)}\,i=\sqrt{\frac{11}{75}}\,i=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3\cdot 5^2}}\,i=\frac{\sqrt{11}\sqrt{3}}{3\cdot 5}\,i=\frac{\sqrt{33}}{15}\,i\ .$$

$-\dfrac{11}{75}$ の平方根は $\pm\dfrac{\sqrt{33}}{15}i$ である. 終

$\boxed{\text{問}2.8.1}$ $-\dfrac{13}{98}$ の平方根をなるべく簡単に表せ．根号が現れる回数はなるべく少なくして，根号の中は自然数にせよ．

$\boxed{\text{問}2.8.1}$ $-\dfrac{13}{98}$ の平方根をなるべく簡単に表せ．根号が現れる回数はなるべく少なくして，根号の中は自然数にせよ．

$$\sqrt{-\frac{13}{98}} = \sqrt{\frac{13}{98}}i = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2\cdot 7^2}}i = \frac{\sqrt{13}\sqrt{2}}{2\cdot 7}i = \frac{\sqrt{26}}{14}i \ .$$

$-\dfrac{13}{98}$ の平方根は $\pm\dfrac{\sqrt{26}}{14}i$ である． $\boxed{\text{終}}$

複素数の四則演算を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 複素数 $\alpha = 5 - 2i$ と $\beta = 3 + 4i$ とに対して，和 $\alpha + \beta$，差 $\alpha - \beta$，積 $\alpha\beta$ を計算する．虚数単位 i をあたかも文字のように扱って計算する．

$\boxed{\text{例}}$ 複素数 $\alpha = 5 - 2i$ と $\beta = 3 + 4i$ とに対して，和 $\alpha + \beta$，差 $\alpha - \beta$，積 $\alpha\beta$ を計算する．虚数単位 i をあたかも文字のように扱って計算する．

$$\alpha + \beta = 5 - 2i + 3 + 4i = (5 + 3) + (-2 + 4)i = 8 + 2i \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 複素数 $\alpha = 5-2i$ と $\beta = 3+4i$ とに対して，和 $\alpha+\beta$，差 $\alpha-\beta$，積 $\alpha\beta$ を計算する．虚数単位 i をあたかも文字のように扱って計算する．

$$\alpha+\beta = 5-2i+3+4i = (5+3)+(-2+4)i = 8+2i \ .$$

$$\alpha-\beta = 5-2i-(3+4i) = 5-2i-3-4i = (5-3)+(-2-4)i = 2-6i \ .$$

例 複素数 $\alpha = 5-2i$ と $\beta = 3+4i$ とに対して，和 $\alpha+\beta$，差 $\alpha-\beta$，積 $\alpha\beta$ を計算する．虚数単位 i をあたかも文字のように扱って計算する．

$$\alpha+\beta = 5-2i+3+4i = (5+3)+(-2+4)i = 8+2i \ .$$

$$\alpha-\beta = 5-2i-(3+4i) = 5-2i-3-4i = (5-3)+(-2-4)i = 2-6i \ .$$

$i^2 = -1$ なので，

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (5-2i)(3+4i) = 5(3+4i)-2i(3+4i) \\ &= 15+20i-6i-8i^2 = 15+14i-8(-1) \\ &= 23+14i \ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}2.8.2}$ 複素数 $\alpha=-4+5i$ と $\beta=-3-2i$ とに対して，和 $\alpha+\beta$，差 $\alpha-\beta$，積 $\alpha\beta$ を計算せよ．

$\boxed{\text{問}2.8.2}$ 複素数 $\alpha = -4 + 5i$ と $\beta = -3 - 2i$ とに対して，和 $\alpha + \beta$，差 $\alpha - \beta$，積 $\alpha\beta$ を計算せよ．

$$\alpha + \beta = -4 + 5i - 3 - 2i = -7 + 3i \ .$$

$\boxed{問2.8.2}$ 複素数 $\alpha = -4 + 5i$ と $\beta = -3 - 2i$ とに対して，和 $\alpha + \beta$，差 $\alpha - \beta$，積 $\alpha\beta$ を計算せよ.

$$\alpha + \beta = -4 + 5i - 3 - 2i = -7 + 3i \ .$$

$$\alpha - \beta = -4 + 5i - (-3 - 2i) = -1 + 7i \ .$$

$\boxed{問2.8.2}$　複素数 $\alpha = -4+5i$ と $\beta = -3-2i$ とに対して，和 $\alpha+\beta$，差 $\alpha-\beta$，積 $\alpha\beta$ を計算せよ．

$$\alpha+\beta = -4+5i-3-2i = -7+3i\ .$$

$$\alpha-\beta = -4+5i-(-3-2i) = -1+7i\ .$$

$$\alpha\beta = (-4+5i)(-3-2i) = 12+8i-15i-10i^2 = 12-7i+10 = 22-7i\ .$$

複素数 α の中の虚数単位 i を総て $-i$ で置き換えてできる複素数を，α の共役複素数という.

　複素数 α の中の虚数単位 i を総て $-i$ で置き換えてできる複素数を，α の共役複素数という．例えば，複素数 $2+3i$ の共役複素数は $2+3(-i)=2-3i$ で，複素数 $-\dfrac{9}{2}-\sqrt{5}i$ の共役複素数は $-\dfrac{9}{2}-\sqrt{5}(-i)=-\dfrac{9}{2}+\sqrt{5}i$ である．

複素数 α の中の虚数単位 i を総て $-i$ で置き換えてできる複素数を，α の共役複素数という．例えば，複素数 $2+3i$ の共役複素数は $2+3(-i)=2-3i$ で，複素数 $-\dfrac{9}{2}-\sqrt{5}i$ の共役複素数は $-\dfrac{9}{2}-\sqrt{5}(-i)=-\dfrac{9}{2}+\sqrt{5}i$ である．$7=7+0i$ なので，7 の共役複素数は $7+0(-i)=7$ である；つまり，実数 7 の共役複素数は 7 自身である．

複素数 α の中の虚数単位 i を総て $-i$ で置き換えてできる複素数を，α の共役複素数という．例えば，複素数 $2+3i$ の共役複素数は $2+3(-i)=2-3i$ で，複素数 $-\dfrac{9}{2}-\sqrt{5}i$ の共役複素数は $-\dfrac{9}{2}-\sqrt{5}(-i)=-\dfrac{9}{2}+\sqrt{5}i$ である．$7=7+0i$ なので，7 の共役複素数は $7+0(-i)=7$ である；つまり，実数 7 の共役複素数は 7 自身である．また，虚数単位 $5i$ の共役複素数は $5(-i)=-5i$ であり，複素数 $-\dfrac{8}{3}i$ の共役複素数は $-\dfrac{8}{3}(-i)=\dfrac{8}{3}i$ である．

複素数 α の中の虚数単位 i を総て $-i$ で置き換えてできる複素数を，α の共役複素数という．例えば，複素数 $2+3i$ の共役複素数は $2+3(-i)=2-3i$ で，複素数 $-\dfrac{9}{2}-\sqrt{5}i$ の共役複素数は $-\dfrac{9}{2}-\sqrt{5}(-i)=-\dfrac{9}{2}+\sqrt{5}i$ である．$7=7+0i$ なので，7 の共役複素数は $7+0(-i)=7$ である；つまり，実数 7 の共役複素数は 7 自身である．また，虚数単位 $5i$ の共役複素数は $5(-i)=-5i$ であり，複素数 $-\dfrac{8}{3}i$ の共役複素数は $-\dfrac{8}{3}(-i)=\dfrac{8}{3}i$ である．一般的に，実数 a と b とに対して，

複素数 $a+ib$ の共役複素数は $a+(-i)b=a-ib$ であり，
複素数 $a-ib$ の共役複素数は $a-(-i)b=a+ib$ である．

実数 a と b とに対して，複素数 $a+bi$ とその共役複素数 $a-bi$ との積は実数になる：

実数 a と b とに対して，複素数 $a+bi$ とその共役複素数 $a-bi$ との積は実数になる：乗法公式 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ と指数法則と $i^2=-1$ とにより，

$$(a+bi)(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2-b^2i^2 = a^2-b^2(-1) = a^2+b^2 \ .$$

実数 a と b とに対して，複素数 $a+bi$ とその共役複素数 $a-bi$ との積は実数になる：乗法公式 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ と指数法則と $i^2=-1$ とにより，

$$(a+bi)(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2-b^2i^2 = a^2-b^2(-1) = a^2+b^2 \ .$$

a と b とは実数なので，a^2+b^2 は実数である．

実数 a と b とに対して，複素数 $a+bi$ とその共役複素数 $a-bi$ との積は実数になる：乗法公式 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ と指数法則と $i^2=-1$ とにより，

$$(a+bi)(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2-b^2i^2 = a^2-b^2(-1) = a^2+b^2 \ .$$

a と b とは実数なので，a^2+b^2 は実数である．

分数の分母が虚数であるとき，分母の共役複素数を分母と分子とに掛けて計算する．

例 複素数 $\alpha = 5 - 2i$ と $\beta = 3 + 4i$ とに対して，商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ と $\dfrac{\beta}{\alpha}$ とを計算する．

$\boxed{\text{例}}$ 複素数 $\alpha = 5-2i$ と $\beta = 3+4i$ とに対して，商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ と $\dfrac{\beta}{\alpha}$ とを計算する．

分数 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ の分母 $\beta = 3+4i$ の共役複素数 $3-4i$ を分子と分母とに掛ける．

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{5-2i}{3+4i} = \frac{(5-2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{5(3-4i)-2i(3-4i)}{3^2-(4i)^2} \\
&= \frac{15-20i-6i+8i^2}{9-16i^2} = \frac{15-26i+8(-1)}{9-16(-1)} \\
&= \frac{7-26i}{25} \quad .
\end{aligned}
$$

例 複素数 $\alpha = 5-2i$ と $\beta = 3+4i$ とに対して，商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ と $\dfrac{\beta}{\alpha}$ とを計算する.

分数 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ の分母 $\beta = 3+4i$ の共役複素数 $3-4i$ を分子と分母とに掛ける.

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{5-2i}{3+4i} = \frac{(5-2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{5(3-4i)-2i(3-4i)}{3^2-(4i)^2} \\
&= \frac{15-20i-6i+8i^2}{9-16i^2} = \frac{15-26i+8(-1)}{9-16(-1)} \\
&= \frac{7-26i}{25} \ .
\end{aligned}$$

分数 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ の分母 $\alpha = 5-2i$ の共役複素数 $5+2i$ を分子と分母とに掛ける.

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{\alpha} &= \frac{3+4i}{5-2i} = \frac{(3+4i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{3(5+2i)+4i(5+2i)}{5^2-(2i)^2} \\
&= \frac{15+6i+20i+8i^2}{25-4i^2} = \frac{15+26i+8(-1)}{25-4(-1)} \\
&= \frac{7+26i}{29} \ .
\end{aligned}$$

終

$\boxed{問2.8.3}$ 複素数 $\alpha = 3 - 2i$ と $\beta = -4 + 5i$ とに対して，商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ と $\dfrac{\beta}{\alpha}$ とを計算せよ．

$\boxed{問 2.8.3}$ 複素数 $\alpha = 3 - 2i$ と $\beta = -4 + 5i$ とに対して，商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ と $\dfrac{\beta}{\alpha}$ とを計算せよ．

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3-2i}{-4+5i} = \frac{(3-2i)(-4-5i)}{(-4+5i)(-4-5i)} = \frac{-12-15i+8i+10i^2}{(-4)^2-5^2i^2} = \frac{-12-7i-10}{16+25}$$

$$= -\frac{22+7i}{41} \ .$$

$\boxed{問2.8.3}$ 複素数 $\alpha = 3 - 2i$ と $\beta = -4 + 5i$ とに対して，商 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ と $\dfrac{\beta}{\alpha}$ とを計算せよ．

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3-2i}{-4+5i} = \frac{(3-2i)(-4-5i)}{(-4+5i)(-4-5i)} = \frac{-12-15i+8i+10i^2}{(-4)^2-5^2i^2} = \frac{-12-7i-10}{16+25}$$
$$= -\frac{22+7i}{41} \ .$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-4+5i}{3-2i} = \frac{(-4+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{-12-8i+15i+10i^2}{3^2-2^2i^2} = \frac{-12+7i-10}{9+4}$$
$$= \frac{-22+7i}{13} \ .$$

指数法則 $a^{m+n} = a^m a^n$ ，$a^{mn} = (a^m)^n$ を用いると次の等式が導かれる：

$$i^3 = i^{2+1} = i^2 i^1 = -1 \cdot i = -i \ ;$$

$$i^4 = i^{2\cdot 2} = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 \ .$$

これらの等式は覚えておくこと：

$$i^2 = -1 \ , \qquad i^3 = -i \ , \qquad i^4 = 1 \ .$$

例 複素数 $(2-3i)^3$ を計算する．乗法公式 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ を用いる． $i^3 = -i$ ．

$$\begin{aligned}(2-3i)^3 &= 2^3 - 3 \cdot 2^2 3i + 3 \cdot 2 \cdot (3i)^2 - (3i)^3 \\ &= 8 - 36i + 54i^2 - 27i^3 = 8 - 36i - 54 + 27i \\ &= -46 - 9i \ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}2.8.4}$ 複素数 $(3-2i)^3$ を計算せよ.

$\boxed{問 2.8.4}$ 複素数 $(3-2i)^3$ を計算せよ.

$$(3-2i)^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 2i + 3 \cdot 3 \cdot (2i)^2 - (2i)^3 = 27 - 54i - 36 + 8i$$
$$= -9 - 46i \ .$$

$\boxed{終}$