2.7 絶対値

[定理 **2.5.10**] 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$.

[定理 **2.5.10**] 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$.

任意の実数 a について，定理 **2.5.10** により $a^2 \geq 0$ なので，根号の定義により実数 $\sqrt{a^2}$ が存在する；これを a の絶対値という.

[定理 **2.5.10**] 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$.

任意の実数 a について，定理 **2.5.10** により $a^2 \geq 0$ なので，根号の定義により実数 $\sqrt{a^2}$ が存在する；これを a の絶対値という.

[定義] 任意の実数 a に対して，$\sqrt{a^2}$ を a の絶対値といい，$|a|$ と書き表す：

$$|a| = \sqrt{a^2} \ .$$

[定理 **2.5.10**]　任意の実数 a について　$a^2 \geq 0$.

任意の実数 a について，定理 **2.5.10** により　$a^2 \geq 0$　なので，根号の定義により実数 $\sqrt{a^2}$ が存在する；これを a の絶対値という.

[定義]　任意の実数 a に対して，$\sqrt{a^2}$ を a の絶対値といい，$|a|$ と書き表す：

$$|a| = \sqrt{a^2} \ .$$

例えば，

$$|3| = \sqrt{3^2} = 3 \ , \quad |-5| = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \ , \quad \left|\sqrt{7}\right| = \sqrt{\sqrt{7}^{\,2}} = \sqrt{7} \ .$$

[定理 **2.5.10**] 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$.

任意の実数 a について，定理 **2.5.10** により $a^2 \geq 0$ なので，根号の定義により実数 $\sqrt{a^2}$ が存在する；これを a の絶対値という.

[定義] 任意の実数 a に対して，$\sqrt{a^2}$ を a の絶対値といい，$|a|$ と書き表す：

$$|a| = \sqrt{a^2} \ .$$

例えば，

$$|3| = \sqrt{3^2} = 3 \ , \quad |-5| = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \ , \quad \left|\sqrt{7}\right| = \sqrt{\sqrt{7}^{\,2}} = \sqrt{7} \ .$$

[定理 **2.6.2**] $a \geq 0$ である任意の実数 a に対して $\sqrt{a} \geq 0$.

[定理 **2.5.10**] 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$.

任意の実数 a について，定理 **2.5.10** により $a^2 \geq 0$ なので，根号の定義により実数 $\sqrt{a^2}$ が存在する；これを a の絶対値という.

[定義] 任意の実数 a に対して，$\sqrt{a^2}$ を a の絶対値といい，$|a|$ と書き表す：

$$|a| = \sqrt{a^2} \ .$$

例えば，

$$|3| = \sqrt{3^2} = 3 \ , \quad |-5| = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \ , \quad \left|\sqrt{7}\right| = \sqrt{\sqrt{7}^{\,2}} = \sqrt{7} \ .$$

[定理 **2.6.2**] $a \geq 0$ である任意の実数 a に対して $\sqrt{a} \geq 0$.

この定理により，任意の実数 a について $|a| = \sqrt{a^2} \geq 0$.

[定理 **2.5.10**] 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$.

任意の実数 a について，定理 **2.5.10** により $a^2 \geq 0$ なので，根号の定義により実数 $\sqrt{a^2}$ が存在する；これを a の絶対値という.

[定義] 任意の実数 a に対して，$\sqrt{a^2}$ を a の絶対値といい，$|a|$ と書き表す：

$$|a| = \sqrt{a^2} \ .$$

例えば，

$$|3| = \sqrt{3^2} = 3 \ , \quad |-5| = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \ , \quad \left|\sqrt{7}\right| = \sqrt{\sqrt{7}^{\,2}} = \sqrt{7} \ .$$

[定理 **2.6.2**] $a \geq 0$ である任意の実数 a に対して $\sqrt{a} \geq 0$.

この定理により，任意の実数 a について $|a| = \sqrt{a^2} \geq 0$.

[定理 **2.7.1**] 任意の実数 a について $|a| \geq 0$.

[定理 **2.6.2**] $a \geq 0$ である任意の実数 a に対して $\sqrt{a}^2 = a$.

[定理 **2.6.4**] $a \leq 0$ である任意の実数 a に対して $\sqrt{a}\,^2 = -a$.

[定理 **2.6.2**]　$a \geq 0$ である任意の実数 a に対して $\sqrt{a}^{\,2} = a$.

[定理 **2.6.4**]　$a \leq 0$ である任意の実数 a に対して $\sqrt{a}^{\;2} = -a$.

実数 a について $a \geq 0$ のとき，定理 **2.6.3** により $\sqrt{a}^{\,2} = a$ なので，

$$|a| = \sqrt{a}^{\,2} = a \ .$$

[定理 **2.6.2**]　$a \geq 0$ である任意の実数 a に対して $\sqrt{a}^2 = a$.

[定理 **2.6.4**]　$a \leq 0$ である任意の実数 a に対して $\sqrt{a}\,^2 = -a$.

　実数 a について $a \geq 0$ のとき，定理 **2.6.3** により $\sqrt{a}^2 = a$ なので，

$$|a| = \sqrt{a}^2 = a \ .$$

実数 a について $a < 0$ のとき，定理 **2.6.4** により $\sqrt{a}^2 = -a$ なので，

$$|a| = \sqrt{a}^2 = -a \ .$$

[定理 **2.6.2**]　$a \geq 0$ である任意の実数 a に対して $\sqrt{a}^{\,2} = a$.

[定理 **2.6.4**]　$a \leq 0$ である任意の実数 a に対して $\sqrt{a}^{\;2} = -a$.

実数 a について $a \geq 0$ のとき，定理 **2.6.3** により $\sqrt{a}^{\,2} = a$ なので，

$$|a| = \sqrt{a}^{\,2} = a \ .$$

実数 a について $a < 0$ のとき，定理 **2.6.4** により $\sqrt{a}^{\,2} = -a$ なので，

$$|a| = \sqrt{a}^{\,2} = -a \ .$$

[定理 **2.7.2**]　任意の実数 a について

$$|a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (\ a \geq 0 \ \text{のとき}) \\ -a & (\ a < 0 \ \text{のとき}) \end{cases} \ .$$

[定理 2.7.3]　任意の実数 a について，$|a|=0$ ならば $a=0$ ．

証明　$|a|=0$ とすると，$\sqrt{a^2}=0$ ，$\sqrt{a^2}^{\,2}=0$ ，$a^2 \geq 0$ なので定理 **2.6.3** により $\sqrt{a^2}^{\,2}=a^2$ ，従って $a^2=0$ なので $a=0$ ．

(証明終了)

[定理 **2.7.4**]　任意の実数 a と b とについて，

$$|a||b| = |ab| \ , \qquad b \neq 0 \ \text{のとき} \quad \frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right| \ .$$

証明　絶対値の定義と定理 **2.6.6** と指数法則とにより

$$|a||b| = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{(ab)^2} = |ab| \ .$$

定理 **2.7.3** により，$|b| = 0$ ならば $b = 0$ ．$b \neq 0$ とする．$|b| \neq 0$ ．定理 **2.5.11** により $b^2 > 0$ ．絶対値の定義と定理 **2.6.6** と指数法則とにより

$$\frac{|a|}{|b|} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \left|\frac{a}{b}\right| \ .$$

(証明終了)

[定理 **2.6.6**]　$a \geq 0$ ，$b \geq 0$ である任意の実数 a, b について，$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ，$b > 0$ のとき $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ ．

[定理 **2.7.3**]　任意の実数 a について，$|a| = 0$ ならば $a = 0$ ．

[定理 **2.5.11**]　任意の実数 a について，$a \neq 0 \iff a^2 > 0$ ．

[定理 2.7.5]　任意の実数 a について $|a|^2 = a^2$.

証明　定理 **2.5.10** により $a^2 \geq 0$ なので定理 **2.6.3** により $\sqrt{a^2}^{\,2} = a^2$ ，従って

$$|a|^2 = \sqrt{a^2}^{\,2} = a^2 \ .$$

(証明終了)

[定理 2.5.10] 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$.

[定理 2.6.3] $a \geq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a}^{\,2} = a$.

[定理 2.7.6]　任意の実数 a について $|-a| = |a|$.

証明　定理 **2.3.1** により

$$|-a| = \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a| \ .$$

(証明終了)

[定理 2.3.1] 任意の実数 a について $(-a)^2 = a^2$.

[定理 **2.7.7**]　数直線上の任意の実数 a と b とについて，a と b との間の距離は $|a-b|$ である．

証明　定理 **2.5.2** により，$a \geq b$ または $a < b$ ．$a \geq b$ のとき，a と b との間の距離は $a-b$ であり，$a-b \geq 0$ なので定理 **2.7.2** により $|a-b| = a-b$ ，よって a と b との間の距離は $|a-b|$ である．$a < b$ のとき，a と b との間の距離は $b-a$ であり，$a-b < 0$ なので定理 **2.7.2** により $|a-b| = -(a-b) = b-a$ ，よって a と b との間の距離は $|a-b|$ である．故にどちらのときも a と b との間の距離は $|a-b|$ である．(証明終了)

[定理 **2.5.2**]　任意の実数 a と b とについて，$a < b$ または $a \geq b$ ．

[定理 **2.7.2**]　任意の実数 a について，$a \geq 0$ のとき $|a| = a$ ，$a \leq 0$ のとき $|a| = -a$ ．