2.5 実数の大小関係

実数には大小関係がある．実数の大小関係を不等号を用いて表す．

例えば，実数 x が 7 以下ということは，x は 7 より小さいかまたは x は 7 に等しいということである：

$$x \leq 7 \iff x < 7 \text{ または } x = 7 \ .$$

例えば，実数 x が 7 以下ということは，x は 7 より小さいかまたは x は 7 に等しいということである：

$$x \leq 7 \iff x < 7 \text{ または } x = 7 \ .$$

[法則 2.5.1]　実数 a と b とについて

$$a \leq b \iff a < b \text{ または } a = b \quad .$$

例えば，実数 x が 7 以下ということは，x は 7 より小さいかまたは x は 7 に等しいということである：

$$x \leq 7 \iff x < 7 \text{ または } x = 7 \ .$$

[法則 **2.5.1**]　実数 a と b とについて

$$a \leq b \iff a < b \text{ または } a = b \quad .$$

この法則により，実数 a と b とについて，$a < b$ と $a = b$ とのどちらかでも成り立てば $a \leq b$ である．例えば，$2 < 3$ なので $2 \leq 3$ ，$5 = 5$ なので $5 \leq 5$ ．

例えば，実数 x が 7 以下ということは，x は 7 より小さいかまたは x は 7 に等しいということである：

$$x \leq 7 \iff x < 7 \text{ または } x = 7 \ .$$

[法則 **2.5.1**]　実数 a と b とについて

$$a \leq b \iff a < b \text{ または } a = b \ .$$

この法則により，実数 a と b とについて，$a < b$ と $a = b$ とのどちらかでも成り立てば $a \leq b$ である．例えば，$2 < 3$ なので $2 \leq 3$，$5 = 5$ なので $5 \leq 5$．

[定理 **2.5.1**]　任意の実数 a と b とについて，

$$a < b \text{ ならば } a \leq b \ , \qquad a = b \text{ ならば } a \leq b \ .$$

例えば，実数 x が 7 より小さくないということは，x は 7 以上ということである：

$$x \not< 7 \iff x \geq 7 \ .$$

例えば，実数 x が 7 より小さくないということは，x は 7 以上ということである：

$$x \not< 7 \iff x \geq 7 \ .$$

[法則 **2.5.2**]　実数 a と b とについて，

$$a \not< b \iff a \geq b \ .$$

$$a \not\leq b \iff a > b \ .$$

例えば，実数 x は 7 より小さいかまたは 7 以上である：$x < 7$ または $x \geq 7$ ．

例えば，実数 x は 7 より小さいかまたは 7 以上である：$x < 7$ または $x \geq 7$ ．

[定理 **2.5.2**] 任意の実数 a と b とについて，$a < b$ または $a \geq b$ ．

証明 $a < b$ または $a \not< b$ ，法則 **2.5.2** により $a \not< b$ ならば $a \geq b$ ，従って $a < b$ または $a \geq b$ ．(証明終了)

[法則 **2.5.2**] 任意の実数 a, b について，$a \not< b \iff a \geq b$ ．

例えば，実数 x が 7 より小さいならば x は 7 と等しくない：$x < 7$ ならば $x \neq 7$ ．

例えば，実数 x が 7 より小さいならば x は 7 と等しくない：$x < 7$ ならば $x \neq 7$ ．

[定理 **2.5.3**]　任意の実数 a と b とについて，$a < b$ ならば $a \neq b$ ．

証明　定理 **2.5.1** により，$a = b$ ならば $a \geq b$ ；法則 **2.5.2** により，$a \geq b$ ならば $a \not< b$ ．従って，$a = b$ ならば $a \not< b$ ．対偶をとると，$a < b$ ならば $a \neq b$ ．　(証明終了)

[定理 **2.5.1**] 任意の実数 a, b について，$a = b$ ならば $a \geq b$ ．

[法則 **2.5.2**] 任意の実数 a, b について，$a \geq b \iff a \not< b$ ．

例えば，実数 x について， $x \leq 7$ かつ $x \geq 7$ ならば， $x = 7$.

例えば，実数 x について， $x \leq 7$ かつ $x \geq 7$ ならば， $x = 7$ ．

[定理 **2.5.4**] 任意の実数 a と b とについて， $a \leq b$ かつ $a \geq b$ ならば， $a = b$ ．

証明 $a \leq b$ かつ $a \geq b$ と仮定する． $a \leq b$ なので，法則 **2.5.1** により $a < b$ または $a = b$ ． $a \geq b$ なので，法則 **2.5.2** により $a \not< b$ ．このように， $a < b$ または $a = b$ で， $a \not< b$ なので， $a = b$ ． (証明終了)

[法則 **2.5.1**] 任意の実数 a, b について， $a \leq b \iff a < b$ または $a = b$ ．

[法則 **2.5.2**] 任意の実数 a, b について， $a \geq b \iff a \not< b$ ．

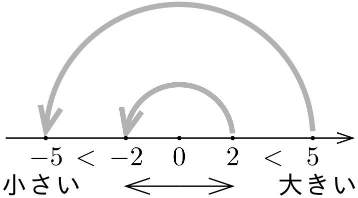
不等号が表す大小関係と加法・乗法とについて，次の法則が基本になる．

[法則 2.5.3]　任意の実数 a, b, c について，

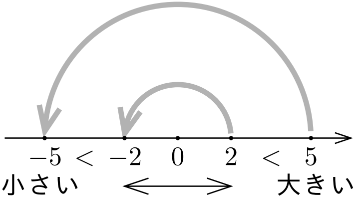
$$a < b \ \text{ならば}\ a + c < b + c \ ,$$

$$a < b \ \text{かつ}\ c > 0 \ \text{ならば}\ ac < bc \ .$$

2 と 5 との大小を比べると $2 < 5$ ，-2 と -5 との大小を比べると $-2 > -5$ ；このように，不等式の両辺の符号（正か負かということ）が反対になると大小関係も反対になる.



　2 と 5 との大小を比べると $2 < 5$ ， -2 と -5 との大小を比べると $-2 > -5$ ；このように，不等式の両辺の符号（正か負かということ）が反対になると大小関係も反対になる．



[定理 **2.5.5**]　任意の実数 a, b について，

$$a < b \text{ ならば } -a > -b \quad , \qquad a \leq b \text{ ならば } -a \geq -b \quad .$$

[定理 **2.5.5**] 任意の実数 a, b について，

$$a < b \text{ ならば } -a > -b \quad , \qquad a \leq b \text{ ならば } -a \geq -b \quad .$$

証明　例として“ $a < b$ ならば $-a > -b$ ”を証明する．

実数 a, b について $a < b$ と仮定する．法則 **2.5.3** により

$$a + (-a - b) < b + (-a - b) \ ,$$

この不等式の左辺は $a + (-a - b) = -b$ で右辺は $b + (-a - b) = -a$ なので，

$$-b < -a \ ,$$

つまり $-a > -b$.　(証明終了)

[法則 **2.5.3**] 任意の実数 a, b, c について， $a < b$ ならば $a + c < b + c$.

[定理 **2.5.6**]　任意の実数 a, b, c について，

$$a < b \text{ かつ } c < 0 \text{ ならば } ac > bc \text{ .}$$

証明　実数 a, b, c について $a < b$ かつ $c < 0$ とする．$c < 0$ なので，定理 **2.5.5** により $-c > -0$ つまり $-c > 0$ ．従って，$a > b$ かつ $-c > 0$ なので，法則 **2.5.3** により $a \cdot (-c) < b \cdot (-c)$ つまり $-ac < -bc$ ．定理 **2.5.5** により $-(-ac) > -(-bc)$ つまり $ac > bc$ ．　(証明終了)

[定理 **2.5.5**]　任意の実数 a, b について，$a < b$ ならば $-a > -b$ ．

[法則 **2.5.3**]　任意の実数 a, b, c について，$a < b$ かつ $c > 0$ ならば，$ac < bc$ ．

[定理 **2.5.5**]　任意の実数 a, b について，$a < b$ ならば $-a > -b$ ．

等号付きの不等号についても同様のことが成り立つ（証明は省く）.

[定理 2.5.7]　任意の実数 a, b, c について,

$$a \leq b \text{ ならば } a + c \leq b + c \quad ;$$

$$a \leq b \text{ かつ } c \geq 0 \text{ ならば } ac \leq bc \quad ;$$

$$a \leq b \text{ かつ } c \leq 0 \text{ ならば } ac \geq bc \quad .$$

[定理 **2.5.8**]　任意の実数 a と b とについて，

$$a > 0 \quad \text{かつ} \quad b > 0 \quad \text{ならば} \quad ab > 0 \ ,$$
$$a > 0 \quad \text{かつ} \quad b < 0 \quad \text{ならば} \quad ab < 0 \ ,$$
$$a < 0 \quad \text{かつ} \quad b > 0 \quad \text{ならば} \quad ab < 0 \ ,$$
$$a < 0 \quad \text{かつ} \quad b < 0 \quad \text{ならば} \quad ab > 0 \ .$$

証明　一部のみ証明する．他の部分も同様に証明できる．法則 **2.5.3** により

$$0 < a \quad \text{かつ} \quad b > 0 \quad \text{ならば} \quad 0b < ab \ ,$$

$0b = 0$ なので

$$a > 0 \quad \text{かつ} \quad b > 0 \quad \text{ならば} \quad ab > 0 \ .$$

定理 **2.5.6** により

$$a < 0 \quad \text{かつ} \quad b < 0 \quad \text{ならば} \quad ab > 0b \ ,$$

$0b = 0$ なので

$$a < 0 \quad \text{かつ} \quad b < 0 \quad \text{ならば} \quad ab > 0 \ .$$

(証明終了)

[法則 **2.5.3**]　任意の実数 a, b, c について，$a < b$ かつ $c > 0$ ならば，$ac < bc$.

[定理 **2.5.6**]　任意の実数 a, b, c について，$a < b$ かつ $c < 0$ ならば，$ac > bc$.

等号付きの不等号についても同様のことが成り立つ（証明は省く）.

[定理 2.5.9] 任意の実数 a と b とについて,

$$
\begin{array}{llll}
a \geq 0 & \text{かつ} \ b \geq 0 & \text{ならば} & ab \geq 0 \ , \\
a \geq 0 & \text{かつ} \ b \leq 0 & \text{ならば} & ab \leq 0 \ , \\
a \leq 0 & \text{かつ} \ b \geq 0 & \text{ならば} & ab \leq 0 \ , \\
a \leq 0 & \text{かつ} \ b \leq 0 & \text{ならば} & ab \geq 0 \ .
\end{array}
$$

[定理 2.5.10]　任意の実数 a について $a^2 \geq 0$ ．

証明　定理 **2.5.9** により，

$$a \geq 0 \text{ かつ } a \geq 0 \quad \text{ならば} \quad aa \geq 0 \text{ ．}$$

つまり， $a \geq 0$ ならば $a^2 \geq 0$ ． また，定理 **2.5.8** により，

$$a < 0 \text{ かつ } a < 0 \quad \text{ならば} \quad aa > 0 \text{ ．}$$

つまり， $a < 0$ ならば $a^2 > 0$ ． 定理 **2.5.1** により $a^2 > 0$ ならば $a^2 \geq 0$ なので， $a < 0$ ならば $a^2 \geq 0$ ．

　このように， $a \geq 0$ ならば $a^2 \geq 0$ ， $a < 0$ ならば $a^2 \geq 0$ ． 定理 **2.5.2** により $a \geq 0$ または $a < 0$ ； $a \geq 0$ のときも $a < 0$ のときも $a^2 \geq 0$ ．

(証明終了)

[定理 2.5.9] 任意の実数 a, b について， $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ ならば， $ab \geq 0$ ．

[定理 2.5.8] 任意の実数 a, b について， $a < 0$ かつ $b < 0$ ならば， $ab > 0$ ．

[定理 2.5.1] 任意の実数 a, b について， $a > b$ ならば $a \geq b$ ．

[定理 2.5.2] 任意の実数 a, b について， $a \geq b$ または $a < b$ ．

[定理 2.5.11]　任意の実数 a について，

$$a^2 \leq 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0 \ .$$

証明　定理 **2.5.10** により $a^2 \geq 0$ なので，$a^2 \leq 0$ ならば，定理 **2.5.4** により $a^2 = 0$ ，定理 **2.1.2** により $a = 0$ ．逆に，$a = 0$ ならば，$a^2 = 0$ なので，定理 **2.5.1** により $a^2 \leq 0$ ．故に

$$a^2 \leq 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0 \ .$$

(証明終了)

[定理 **2.5.10**] 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$ ．

[定理 **2.5.4**] 任意の実数 a, b について，$a \leq b$ かつ $a \geq b$ ならば，$a = b$ ．

[定理 **2.1.2**] 任意の数 a について，$a^2 = 0 \iff a = 0$ ．

[定理 **2.5.1**] 任意の実数 a, b について，$a = b$ ならば $a \leq b$ ．

1.6 節で次のことを述べた：述語 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ とについて，“ $\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$ ” のとき “ $\mathcal{A}$ でない $\iff$ $\mathcal{B}$ でない ”.

[定理 2.5.12]　任意の実数 a について，

$$a^2 > 0 \iff a^2 \neq 0 \iff a \neq 0 \ .$$

証明　定理 2.5.11 により

$$a^2 \leq 0 \iff a = 0 \ .$$

これより

$$a^2 \not\leq 0 \iff a \neq 0 \ .$$

法則 2.5.2 により，

$$a^2 > 0 \iff a^2 \not\leq 0 \iff a \neq 0 \ .$$

(証明終了)

[法則 2.5.11] 任意の実数 a, b について， $a^2 \leq 0 \iff a = 0$.

[法則 2.5.2] 任意の実数 a, b について， $a > b \iff a \not\leq b$.

[定理 2.5.13]　実数 a, b について,

$$a^2 + b^2 \leq 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = 0 \text{ かつ } b = 0 .$$

証明　定理 **2.5.10** により $b^2 \geq 0$ ，定理 **2.5.5** により $-b^2 \leq 0$ ． $a^2 + b^2 \leq 0$ ならば， $a^2 \leq -b^2 \leq 0$ ，定理 **2.5.11** により $a = 0$ ．同様に， $a^2 \geq 0$ より $-a^2 \leq 0$ なので， $a^2 + b^2 \leq 0$ ならば， $b^2 \leq -a^2 \leq 0$ ，定理 **2.5.11** により $b = 0$ ．逆に， $a = 0$ かつ $b = 0$ ならば， $a^2 + b^2 = 0$ なので，定理 **2.5.1** により $a^2 + b^2 \leq 0$ ． (証明終了)

[定理 2.5.10] 任意の実数 a について $a^2 \geq 0$ ．

[定理 2.5.5] 任意の実数 a, b について， $a \geq b$ ならば $-a \leq -b$ ．

[定理 2.5.11] 任意の実数 a について， $a^2 \leq 0 \iff a = 0$ ．

[定理 2.5.1] 任意の実数 a, b について， $a = b$ ならば $a \leq b$ ．

[定理 **2.5.14**]　任意の実数 a について，

$$a > 0 \text{ ならば } \frac{1}{a} > 0 , \qquad a < 0 \text{ ならば } \frac{1}{a} < 0 .$$

証明　“ $a > 0$ ならば $\dfrac{1}{a} > 0$ ” を証明する．

実数 a について $a > 0$ と仮定する．定理 **2.5.3** により $a \neq 0$ ．定理 **2.5.1** により $a \geq 0$ ．仮に $\dfrac{1}{a} \leq 0$ とすると，定理 **2.5.9** により $a \cdot \dfrac{1}{a} \leq 0$ つまり $1 \leq 0$ ；これは矛盾である．よって $\dfrac{1}{a} \not\leq 0$ ，法則 **2.5.2** により $\dfrac{1}{a} > 0$(証明終了)

[定理 **2.5.3**] 任意の実数 a, b について， $a > b$ ならば $a \neq b$ ．

[定理 **2.5.1**] 任意の実数 a, b について， $a > b$ ならば $a \geq b$ ．

[定理 **2.5.9**] 任意の実数 a, b について， $a \geq 0$ かつ $b \leq 0$ ならば， $ab \leq 0$ ．

[法則 **2.5.2**] 任意の実数 a, b について， $a \not\leq b \iff a > b$ ．