2.3 乘法公式

　記号“$+$”と“$-$”とを上下にくっつけた記号“$\pm$”及び“$\mp$”を用いる．これら 2 個の記号を複号という．

記号“$+$”と“$-$”とを上下にくっつけた記号“$\pm$”及び“$\mp$”を用いる．これら 2 個の記号を複号という．例えば，等式 $a(b+c) = ab+ac$ と等式 $a(b-c) = ab-ac$ とを併せて次のように表現する：

$$a(b \pm c) = ab \pm ac \quad （複号同順）.$$

$$a(b+c) = ab+ac$$

“$a(b \pm c) = ab \pm ac$ （複号同順）”

$$a(b-c) = ab-ac$$

記号“$+$”と“$-$”とを上下にくっつけた記号“$\pm$”及び“$\mp$”を用いる．これら 2 個の記号を複号という．例えば，等式 $a(b+c)=ab+ac$ と等式 $a(b-c)=ab-ac$ とを併せて次のように表現する：

$$a(b\pm c) = ab\pm ac \quad （複号同順）.$$

“（複号同順）”の断り書きが無いとき，等式 $a(b\pm c)=ab\pm ac$ は，4 個の等式 $a(b+c)=ab+ac$ と $a(b+c)=ab-ac$ と $a(b-c)=ab+ac$ と $a(b-c)=ab-ac$ とを併せた式になる．

記号 “$+$” と “$-$” とを上下にくっつけた記号 “$\pm$” 及び “$\mp$” を用いる．これら 2 個の記号を複号という．例えば，等式 $a(b+c)=ab+ac$ と等式 $a(b-c)=ab-ac$ とを併せて次のように表現する：

$$a(b\pm c) = ab\pm ac \quad （複号同順）.$$

また例えば，等式 $-(a+b)=-a-b$ と等式 $-(a-b)=-a+b$ とを併せて次のように表現する：

$$-(a\pm b) = -a\mp b \quad （複号同順）.$$

$$-(a+b) = -a-b$$

“$-(a\pm b) = -a\mp b$ （複号同順）”

$$-(a-b) = -a+b$$

記号“$+$”と“$-$”とを上下にくっつけた記号“$\pm$”及び“$\mp$”を用いる．これら 2 個の記号を複号という．例えば，等式 $a(b+c)=ab+ac$ と等式 $a(b-c)=ab-ac$ とを併せて次のように表現する：

$$a(b\pm c) = ab\pm ac \quad （複号同順）.$$

また例えば，等式 $-(a+b)=-a-b$ と等式 $-(a-b)=-a+b$ とを併せて次のように表現する：

$$-(a\pm b) = -a\mp b \quad （複号同順）.$$

“（複号同順）”の断り書きが無いとき，等式 $-(a\pm b)=-a\mp b$ は，4 個の等式 $-(a+b)=-a+b$ と $-(a+b)=-a-b$ と $-(a-b)=-a+b$ と $-(a-b)=-a-b$ とを併せた式になる．

記号“$+$”と“$-$”とを上下にくっつけた記号“$\pm$”及び“$\mp$”を用いる．これら 2 個の記号を複号という．例えば，等式 $a(b+c)=ab+ac$ と等式 $a(b-c)=ab-ac$ とを併せて次のように表現する：

$$a(b \pm c) = ab \pm ac \quad \text{（複号同順）}.$$

また例えば，等式 $-(a+b)=-a-b$ と等式 $-(a-b)=-a+b$ とを併せて次のように表現する：

$$-(a \pm b) = -a \mp b \quad \text{（複号同順）}.$$

このように，複号“$\pm$”，“$\mp$”が現れる式が複号同順であるとき，複号の上側の記号ばかりを選んだ式と複号の下側の記号ばかりを選んだ式との両方を表す.

a, b, c, d, x は数を表す．四則演算の法則を用いて公式を導びく．

式 $(a+b)^2$ と $(a-b)^2$ とを展開する.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2 \ . \\
(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 \\
&= a^2 - 2ab + b^2 \ .
\end{aligned}
$$

式 $(a+b)^2$ と $(a-b)^2$ とを展開する.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = a(a+b)+b(a+b) = a^2+ab+ab+b^2 \\ &= a^2+2ab+b^2 \ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = a(a-b)-b(a-b) = a^2-ab-ab+b^2 \\ &= a^2-2ab+b^2 \ .\end{aligned}$$

こうして次の公式が導かれた:

$$(a\pm b)^2 = a^2\pm 2ab+b^2 \text{（複号同順）} \quad .$$

式 $(ax+b)(cx+d)$ を展開する.

$$\begin{aligned}(ax+b)(cx+d) &= ax(cx+d)+b(cx+d) = acx^2+adx+bcx+bd \\ &= acx^2+(ad+bc)x+bd \ .\end{aligned}$$

式 $(ax+b)(cx+d)$ を展開する.

$$\begin{aligned}(ax+b)(cx+d) &= ax(cx+d)+b(cx+d) = acx^2+adx+bcx+bd \\ &= acx^2+(ad+bc)x+bd\ .\end{aligned}$$

こうして次の公式が導かれた:

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2+(ad+bc)x+bd\ .$$

分配法則により，以下のような等式が成り立つ：

$$A(B+C+D) = AB+AC+AD \ , \qquad (A+B+C)D = AD+BD+CD \ .$$

式 $(a+b+c)^2$ を展開する.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c) \\ &= a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2 \\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \ .\end{aligned}$$

分配法則により，以下のような等式が成り立つ：

$$A(B+C+D) = AB+AC+AD \ , \qquad (A+B+C)D = AD+BD+CD \ .$$

式 $(a+b+c)^2$ を展開する．

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c) \\ &= a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2 \\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \ .\end{aligned}$$

こうして次の公式が導かれた：

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \ .$$

式 $(a+b)^3$ を展開する.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad .\end{aligned}$$

式 $(a+b)^3$ を展開する.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\ &= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2) \\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \ .\end{aligned}$$

式 $(a-b)^3$ を展開する.

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2-2ab+b^2) \\ &= a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2) \\ &= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3 \\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \ .\end{aligned}$$

式 $(a+b)^3$ を展開する.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\
&= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2) \\
&= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad .
\end{aligned}
$$

式 $(a-b)^3$ を展開する.

$$
\begin{aligned}
(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2-2ab+b^2) \\
&= a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2) \\
&= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3 \\
&= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \quad .
\end{aligned}
$$

これら **2** つの公式を併せる：

$$
(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \text{（複号同順）} \quad .
$$

式 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ を展開する.

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)\\ &= a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3\\ &= a^3+b^3 \quad .\end{aligned}$$

式 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ を展開する.

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)\\ &= a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3 \quad .\end{aligned}$$

これら**2**つの結果を併せる：

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3 \text{（複号同順）}.$$

このようにして，四則演算の法則により，乗法公式と呼ばれる公式が導かれる．

[乗法公式] 任意の数 a, b, c, d, x について以下の等式が成り立つ：

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad \text{（複号同順）；}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \ ;$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \ ;$$

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd \ ;$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \ ;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \qquad \text{（複号同順）；}$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3 \qquad \text{（複号同順）．}$$

[定理 2.3.1]　任意の数 a について $(-a)^2 = a^2$.

証明　数 a, b について，

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \ .$$

$b = -a$ とする：

$$a^2 - (-a)^2 = \{a + (-a)\}\{a - (-a)\} = (a-a)(a+a) = 0 \cdot 2a = 0$$

つまり $a^2 - (-a)^2 = 0$ ，よって $a^2 = (-a)^2$.　(証明終了)

[定理 **2.1.1**] 任意の数 a, b について， $ab = 0 \iff a = 0$ または $b = 0$.

[定理 **2.3.2**] 任意の数 a と b とについて

$$a^2 = b^2 \iff a = \pm b \ .$$

証明 数 a, b について， $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ なので，

$$a^2 = b^2 \iff a^2 - b^2 = 0 \iff (a+b)(a-b) = 0 \ .$$

定理 **2.1.1** により

$$(a+b)(a-b) = 0 \iff a+b = 0 \text{ または } a-b = 0$$
$$\iff a = -b \text{ または } a = b \ .$$

終