

2.2 冪と指数法則

数 a 及び正の整数 n に対して, a を n 個掛け合わせた積を a^n と書き表し, a の n 乗という:

$$a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ 個の } a \text{ の積}} .$$

数 a 及び正の整数 n に対して、 a を n 個掛け合わせた積を a^n と書き表し、 a の n 乗という：

$$a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ 個の } a \text{ の積}} .$$

例えば、数 c, t, x について、

$$c^2 = c \times c , \quad t^3 = t \times t \times t , \quad x^5 = x \times x \times x \times x \times x .$$

数 a 及び正の整数 n に対して、 a を n 個掛け合わせた積を a^n と書き表し、 a の n 乗という：

$$a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ 個の } a \text{ の積}} .$$

例えば、数 c, t, x について、

$$c^2 = c \times c, \quad t^3 = t \times t \times t, \quad x^5 = x \times x \times x \times x \times x .$$

数 a の 1 乗は a である：

$$a^1 = a .$$

数 a 及び正の自然数 n について,

$$a^n \times a = \overbrace{(a \times a \times a \times \cdots \times a)}^{n \text{ 個の } a \text{ の積}} \times a = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}^{(n+1) \text{ 個の } a \text{ の積}} = a^{n+1}$$

つまり $a^n \times a = a^{n+1}$.

数 a 及び正の自然数 n について,

$$a^n \times a = \overbrace{(a \times a \times a \times \cdots \times a)}^{n \text{ 個の } a \text{ の積}} \times a = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}^{(n+1) \text{ 個の } a \text{ の積}} = a^{n+1}$$

つまり $a^n \times a = a^{n+1}$. この等式は $n=0$ のときも成り立つようにしたい;

つまり $a^0 \times a = a^1 = a$ となるようにしたい.

数 a 及び正の自然数 n について,

$$a^n \times a = \overbrace{(a \times a \times a \times \cdots \times a)}^{n \text{ 個の } a \text{ の積}} \times a = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}^{(n+1) \text{ 個の } a \text{ の積}} = a^{n+1}$$

つまり $a^n \times a = a^{n+1}$. この等式は $n=0$ のときも成り立つようにしたい;

つまり $a^0 \times a = a^1 = a$ となるようにしたい. $a^0 \times a = a$ となるには $a^0 = 1$

となればよい. そこで a の 0 乗 a^0 を次のように定義する.

[定義] 0 以外の任意の数 a に対して $a^0 = 1$.

数 a 及び正の自然数 n について、

$$a^n \times a = \overbrace{(a \times a \times a \times \cdots \times a)}^{n \text{ 個の } a \text{ の積}} \times a = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}^{(n+1) \text{ 個の } a \text{ の積}} = a^{n+1}$$

つまり $a^n \times a = a^{n+1}$. この等式は $n=0$ のときも成り立つようにしたい ;
つまり $a^0 \times a = a^1 = a$ となるようにしたい . $a^0 \times a = a$ となるには $a^0 = 1$
となればよい . そこで a の 0 乗 a^0 を次のように定義する .

[定義] 0 以外の任意の数 a に対して $a^0 = 1$.

このように同じ数を何個か (0 個以上) 掛け合わせた積 (の形の式) を、冪 (べき) または累乗という . また、数 a の n 乗の式 a^n において、 n を指数という .

例として数 a に対して a^2a^3 を計算する：

$$a^2a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a \times a \times a \times a \times a = a^5 .$$

例として数 a に対して a^2a^3 を計算する：

$$a^2a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a \times a \times a \times a \times a = a^5 .$$

一般的に、数 a と自然数 m, n について、

$$\begin{aligned} a^m a^n &= \overbrace{(a \times a \times a \times \cdots \times a)}^{m \text{ 個の } a \text{ の積}} \times \overbrace{(a \times a \times a \times \cdots \times a)}^{n \text{ 個の } a \text{ の積}} = \overbrace{a \times a \times a \times a \times \cdots \times a}^{(m+n) \text{ 個の } a \text{ の積}} \\ &= a^{m+n} , \end{aligned}$$

つまり $a^m a^n = a^{m+n}$.

例として数 a に対して $(a^2)^3$ を計算する：

$$(a^2)^3 = (a \times a)^3 = (a \times a) \times (a \times a) \times (a \times a) = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6 .$$

例として数 a に対して $(a^2)^3$ を計算する：

$$(a^2)^3 = (a \times a)^3 = (a \times a) \times (a \times a) \times (a \times a) = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6 .$$

一般的に、数 a と自然数 m, n について、

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= \underbrace{\overbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}^{m \text{ 個の } a \text{ の積}} \times \overbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}^{m \text{ 個の } a \text{ の積}} \times \cdots \times \overbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}^{m \text{ 個の } a \text{ の積}}}_{m \text{ 個の } a \text{ の積が } n \text{ 個}} \\ &= \overbrace{a \times a \times a \times a \times \cdots \times a}^{mn \text{ 個の } a \text{ の積}} = a^{mn} , \end{aligned}$$

つまり $(a^m)^n = a^{mn}$.

例として 0 以外の数 a に対して $\frac{a^5}{a^3}$ を計算する：

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a \times a = a^2 .$$

例として 0 以外の数 a に対して $\frac{a^5}{a^3}$ を計算する：

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a \times a = a^2 .$$

一般的に、0 以外の数 a と自然数 m, n について、 $m \geq n$ のとき、

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}^{m \text{ 個の } a \text{ の積}}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個の } a \text{ の積}}} = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{(m-n) \text{ 個の } a \text{ の積}} = a^{m-n} ,$$

つまり $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

以上の結果を指数法則という.

[自然数指数の指数法則] 任意の数 a と任意の自然数 m, n について,

$$a^m a^n = a^{m+n} , \quad (a^m)^n = a^{mn} ,$$

$$a \neq 0 \text{ で } m \geq n \text{ のとき } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} .$$

例として数 a, b に対して $(ab)^3$ を計算する：

$$(ab)^3 = ab \times ab \times ab = a \times a \times a \times b \times b \times b = (a \times a \times a) \times (b \times b \times b) = a^3 b^3 .$$

例として数 a, b に対して $(ab)^3$ を計算する：

$$(ab)^3 = ab \times ab \times ab = a \times a \times a \times b \times b \times b = (a \times a \times a) \times (b \times b \times b) = a^3 b^3 .$$

一般的に、数 a, b と自然数 n について、

$$\begin{aligned} (ab)^n &= (a \times b)^n = \overbrace{(a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times \cdots \times (a \times b)}^{n \text{ 個の } a \times b \text{ の積}} \\ &= \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ 個の } a \text{ の積}} \times \overbrace{b \times b \times b \times \cdots \times b}^{n \text{ 個の } b \text{ の積}} \\ &= a^n b^n \end{aligned}$$

つまり $(ab)^n = a^n b^n$.

例として数 a, b ($b \neq 0$) に対して $\left(\frac{a}{b}\right)^4$ を計算する：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a \times a}{b \times b \times b \times b} = \frac{a^4}{b^4} .$$

例として数 a, b ($b \neq 0$) に対して $\left(\frac{a}{b}\right)^4$ を計算する：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a \times a \times a}{b \times b \times b \times b} = \frac{a^4}{b^4} .$$

一般的に、数 a, b ($b \neq 0$) と自然数 n について、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \cdots \times \frac{a}{b}}^{n \text{ 個の } \frac{a}{b} \text{ の積}} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ 個の } a \text{ の積}}}{\underbrace{b \times b \times b \times \cdots \times b}_{n \text{ 個の } b \text{ の積}}} = \frac{a^n}{b^n}$$

つまり $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} .$

このようにして次の定理が導かれる．この定理も指数法則といわれる．

[自然数指数の指数法則] 任意の数 a, b と任意の自然数 n について,

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad b \neq 0 \text{ のとき} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} .$$

例 数 a, b, x, y は 0 以外の数とする.

例 数 a, b, x, y は 0 以外の数とする.

$$\begin{aligned}2a^3b(3ab^3)^2 &= 2a^3b \cdot 3^2a^2(b^3)^2 = 2a^3b \cdot 9a^2b^6 = 18a^{3+2}b^{1+6} \\ &= 18a^5b^7 .\end{aligned}$$

例 数 a, b, x, y は 0 以外の数とする.

$$\begin{aligned}2a^3b(3ab^3)^2 &= 2a^3b \cdot 3^2a^2(b^3)^2 = 2a^3b \cdot 9a^2b^6 = 18a^{3+2}b^{1+6} \\ &= 18a^5b^7 .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6x^5y\left(\frac{y^2}{3x}\right)^2 &= 6x^5y\frac{(y^2)^2}{(3x)^2} = 6x^5y\frac{y^{2 \cdot 2}}{3^2x^2} = 6x^5y\frac{y^4}{9x^2} = \frac{6}{9}x^{5-2}y^{1+4} \\ &= \frac{2}{3}x^3y^5 .\end{aligned}$$

終

問2.2 数 a, b, c, d, x, y は 0 でないとする. 以下の式を計算して簡単にせよ.

(1) $3ab^2(2a^2b)^3$.

(2) $\frac{4y^7}{3x^4} \left(\frac{x^2}{2y} \right)^3$.

(3) $\frac{(3c^2d)^3}{6c^4d}$.

問2.2 数 a, b, c, d, x, y は 0 でないとする. 以下の式を計算して簡単にせよ.

(1) $3ab^2(2a^2b)^3$.

(2) $\frac{4y^7}{3x^4} \left(\frac{x^2}{2y} \right)^3$.

(3) $\frac{(3c^2d)^3}{6c^4d}$.

(1)

$$3ab^2(2a^2b)^3 = 3ab^2 \cdot 2^3(a^2)^3b^3 = 3ab^2 \cdot 8a^6b^3 = 24a^{1+6}b^{2+3} = 24a^7b^5.$$

問2.2 数 a, b, c, d, x, y は 0 でないとする. 以下の式を計算して簡単にせよ.

$$(1) \quad 3ab^2(2a^2b)^3. \qquad (2) \quad \frac{4y^7}{3x^4} \left(\frac{x^2}{2y} \right)^3. \qquad (3) \quad \frac{(3c^2d)^3}{6c^4d}.$$

(1)

$$3ab^2(2a^2b)^3 = 3ab^2 \cdot 2^3(a^2)^3b^3 = 3ab^2 \cdot 8a^6b^3 = 24a^{1+6}b^{2+3} = 24a^7b^5.$$

(2)

$$\frac{4y^7}{3x^4} \left(\frac{x^2}{2y} \right)^3 = \frac{4y^7}{3x^4} \frac{(x^2)^3}{(2y)^3} = \frac{4y^7}{3x^4} \frac{x^6}{8y^3} = \frac{1}{6} x^{6-4} y^{7-3} = \frac{x^2 y^4}{6}.$$

問2.2 数 a, b, c, d, x, y は 0 でないとする. 以下の式を計算して簡単にせよ.

$$(1) \quad 3ab^2(2a^2b)^3. \qquad (2) \quad \frac{4y^7}{3x^4} \left(\frac{x^2}{2y} \right)^3. \qquad (3) \quad \frac{(3c^2d)^3}{6c^4d}.$$

(1)

$$3ab^2(2a^2b)^3 = 3ab^2 \cdot 2^3(a^2)^3b^3 = 3ab^2 \cdot 8a^6b^3 = 24a^{1+6}b^{2+3} = 24a^7b^5.$$

(2)

$$\frac{4y^7}{3x^4} \left(\frac{x^2}{2y} \right)^3 = \frac{4y^7}{3x^4} \frac{(x^2)^3}{(2y)^3} = \frac{4y^7}{3x^4} \frac{x^6}{8y^3} = \frac{1}{6} x^{6-4} y^{7-3} = \frac{x^2 y^4}{6}.$$

(3)

$$\frac{(3c^2d)^3}{6c^4d} = \frac{3^3(c^2)^3d^3}{6c^4d} = \frac{3^3c^6d^3}{6c^4d} = \frac{9c^2d^2}{2}.$$