2.1 四則演算の法則

四則演算の基本的な法則を以下に述べる.

[法則四則演算の法則] 任意の数 a, b, c について以下のことが成り立つ：

（加法の結合法則） $$a+(b+c)=(a+b)+c\ ;$$

（乗法の結合法則） $$a(bc)=(ab)c\ ;$$

（加法の交換法則） $$a+b=b+a\ ;$$

（乗法の交換法則） $$ab=ba\ ;$$

$$0+a=a+0=a\ ;$$

$$1\cdot a=a\cdot 1=a\ ;$$

$$-a+a=a+(-a)=0\ ;$$

$a\neq 0$ のとき $$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1\ ;$$

（分配法則） $$a(b+c)=ab+ac\ ,\qquad (a+b)c=ac+bc\ .$$

四則演算に関するほとんどの性質はこれらの法則から証明できる．例として四則演算の性質を幾つか証明する．

四則演算に関するほとんどの性質はこれらの法則から証明できる．例として四則演算の性質を幾つか証明する．証明の内容はよく分からなくても構わない．とにかく四則演算の法則から証明できるということを理解すること．

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の数 a について $0a = 0$.

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の数 a について $0a = 0$.

$$0 \cdot a = 0 + 0 \cdot a$$

例 次のことを証明する：任意の数 a について $0a = 0$.

$$0 \cdot a = 0 + 0 \cdot a = (-a + a) + 0 \cdot a$$

$$0 = -a + a$$

例 次のことを証明する：任意の数 a について $0a=0$.

$$0 \cdot a = 0 + 0 \cdot a = (-a + a) + 0 \cdot a = -a + (a + 0 \cdot a)$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の数 a について $0a = 0$.

$$0 \cdot a = 0 + 0 \cdot a = (-a + a) + 0 \cdot a = -a + (a + 0 \cdot a)$$

$$a = 1 \cdot a$$

$$= -a + (1 \cdot a + 0 \cdot a)$$

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の数 a について $0a = 0$.

$$0 \cdot a = 0 + 0 \cdot a = (-a + a) + 0 \cdot a = -a + (a + 0 \cdot a)$$

$$= -a + (1 \cdot a + 0 \cdot a) = -a + (1 + 0) \cdot a$$

$$1 \cdot a + 0 \cdot a = (1 + 0) \cdot a$$

例 次のことを証明する：任意の数 a について $0a = 0$.

$$0 \cdot a = 0 + 0 \cdot a = (-a + a) + 0 \cdot a = -a + (a + 0 \cdot a)$$

$$= -a + (1 \cdot a + 0 \cdot a) = -a + (1 + 0) \cdot a = -a + 1 \cdot a$$

$$1 + 0 = 1$$

例 次のことを証明する：任意の数 a について $0a = 0$.

$$0 \cdot a = 0 + 0 \cdot a = (-a + a) + 0 \cdot a = -a + (a + 0 \cdot a)$$

$$= -a + (1 \cdot a + 0 \cdot a) = -a + (1 + 0) \cdot a = -a + 1 \cdot a = -a + a$$

$$1 \cdot a = a$$

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の数 a について $0a = 0$.

$$
\begin{aligned}
0 \cdot a &= 0 + 0 \cdot a = (-a + a) + 0 \cdot a = -a + (a + 0 \cdot a) \\
&= -a + (1 \cdot a + 0 \cdot a) = -a + (1 + 0) \cdot a = -a + 1 \cdot a = -a + a \\
&= 0 \ ,
\end{aligned}
$$

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の数 a について $0a = 0$.

$$\begin{aligned} 0 \cdot a &= 0 + 0 \cdot a = (-a + a) + 0 \cdot a = -a + (a + 0 \cdot a) \\ &= -a + (1 \cdot a + 0 \cdot a) = -a + (1 + 0) \cdot a = -a + 1 \cdot a = -a + a \\ &= 0 \ , \end{aligned}$$

つまり $0a = 0$. $\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の数 a,b について $(-a)(-b)=ab$ ．先に証明したように，任意の数 a について $0\cdot a=0$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の数 a,b について $(-a)(-b) = ab$ ．先に証明したように，任意の数 a について $0 \cdot a = 0$ ．

$$(-a) \cdot (-b) = (-a) \cdot (-b) + 0$$

例 次のことを証明する：任意の数 a,b について $(-a)(-b)=ab$ ．先に証明したように，任意の数 a について $0\cdot a=0$ ．

$$(-a)\cdot(-b)=(-a)\cdot(-b)+0=(-a)\cdot(-b)+0\cdot a$$
$$0=0\cdot a$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の数 a,b について $(-a)(-b)=ab$ ．先に証明したように，任意の数 a について $0\cdot a=0$ ．

$$(-a)\cdot(-b)=(-a)\cdot(-b)+0=(-a)\cdot(-b)+0\cdot a$$

$$0\cdot a=a\cdot 0$$

$$=(-a)\cdot(-b)+a\cdot 0$$

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の数 a,b について $(-a)(-b)=ab$ ．先に証明したように，任意の数 a について $0\cdot a=0$ ．

$$\begin{aligned}(-a)\cdot(-b) &= (-a)\cdot(-b)+0 = (-a)\cdot(-b)+0\cdot a \\ &= (-a)\cdot(-b)+a\cdot 0 = (-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b+b)\end{aligned}$$

$$0=-b+b$$

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の数 a,b について $(-a)(-b)=ab$ ．先に証明したように，任意の数 a について $0 \cdot a = 0$ ．

$$\begin{aligned}(-a)\cdot(-b) &= (-a)\cdot(-b)+0 = (-a)\cdot(-b)+0\cdot a \\ &= (-a)\cdot(-b)+a\cdot 0 = (-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b+b) \\ &= (-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b)+a\cdot b\end{aligned}$$

$a\cdot(-b+b) = a\cdot(-b)+a\cdot b$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の数 a,b について $(-a)(-b)=ab$ ． 先に証明したように，任意の数 a について $0 \cdot a = 0$ ．

$$
\begin{aligned}
(-a)\cdot(-b) &= (-a)\cdot(-b)+0 = (-a)\cdot(-b)+0\cdot a \\
&= (-a)\cdot(-b)+a\cdot 0 = (-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b+b) \\
&= (-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b)+a\cdot b = (-a+a)\cdot(-b)+a\cdot b
\end{aligned}
$$

$$(-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b) = (-a+a)\cdot(-b)$$

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の数 a,b について $(-a)(-b)=ab$ ．先に証明したように，任意の数 a について $0\cdot a=0$ ．

$$
\begin{aligned}
(-a)\cdot(-b) &= (-a)\cdot(-b)+0 = (-a)\cdot(-b)+0\cdot a \\
&= (-a)\cdot(-b)+a\cdot 0 = (-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b+b) \\
&= (-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b)+a\cdot b = (-a+a)\cdot(-b)+a\cdot b \\
&= 0\cdot(-b)+a\cdot b
\end{aligned}
$$

$-a+a=0$

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の数 a,b について $(-a)(-b)=ab$ ． 先に証明したように，任意の数 a について $0\cdot a=0$ ．

$$
\begin{aligned}
(-a)\cdot(-b) &= (-a)\cdot(-b)+0 = (-a)\cdot(-b)+0\cdot a \\
&= (-a)\cdot(-b)+a\cdot 0 = (-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b+b) \\
&= (-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b)+a\cdot b = (-a+a)\cdot(-b)+a\cdot b \\
&= 0\cdot(-b)+a\cdot b = 0+a\cdot b
\end{aligned}
$$

$$0\cdot(-b)=0$$

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の数 a,b について $(-a)(-b) = ab$ ．先に証明したように，任意の数 a について $0 \cdot a = 0$ ．

$$
\begin{aligned}
(-a)\cdot(-b) &= (-a)\cdot(-b) + 0 = (-a)\cdot(-b) + 0\cdot a \\
&= (-a)\cdot(-b) + a\cdot 0 = (-a)\cdot(-b) + a\cdot(-b+b) \\
&= (-a)\cdot(-b) + a\cdot(-b) + a\cdot b = (-a+a)\cdot(-b) + a\cdot b \\
&= 0\cdot(-b) + a\cdot b = 0 + a\cdot b \\
&= a\cdot b \ .
\end{aligned}
$$

例 次のことを証明する：任意の数 a,b について $(-a)(-b)=ab$ ． 先に証明したように，任意の数 a について $0\cdot a=0$ ．

$$\begin{aligned}(-a)\cdot(-b) &= (-a)\cdot(-b)+0=(-a)\cdot(-b)+0\cdot a\\ &= (-a)\cdot(-b)+a\cdot 0=(-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b+b)\\ &= (-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b)+a\cdot b=(-a+a)\cdot(-b)+a\cdot b\\ &= 0\cdot(-b)+a\cdot b=0+a\cdot b\\ &= a\cdot b\ .\end{aligned}$$

つまり $(-a)(-b)=ab$ ． 終

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の数 a,b について $(-a)(-b)=ab$ ．先に証明したように，任意の数 a について $0\cdot a=0$ ．

$$\begin{aligned}(-a)\cdot(-b) &= (-a)\cdot(-b)+0=(-a)\cdot(-b)+0\cdot a\\ &= (-a)\cdot(-b)+a\cdot 0=(-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b+b)\\ &= (-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b)+a\cdot b=(-a+a)\cdot(-b)+a\cdot b\\ &= 0\cdot(-b)+a\cdot b=0+a\cdot b\\ &= a\cdot b\ .\end{aligned}$$

つまり $(-a)(-b)=ab$ ． $\boxed{\text{終}}$

このことが，負の数と負の数との積が正の数であることの根拠である．

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の数 a 及び 0 以外の任意の数 b, c について $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$.

$$\frac{ac}{bc} = (ac)\frac{1}{bc}$$

例 次のことを証明する：任意の数 a 及び 0 以外の任意の数 b, c について $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$ ．

$$\frac{ac}{bc} = (ac)\frac{1}{bc} = \{a(1 \cdot c)\}\frac{1}{bc}$$

$$c = 1 \cdot c$$

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の数 a 及び 0 以外の任意の数 b, c について $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$.

$$\frac{ac}{bc} = (ac)\frac{1}{bc} = \{a(1 \cdot c)\}\frac{1}{bc} = \left[a\left\{\left(\frac{1}{b}b\right)c\right\}\right]\frac{1}{bc}$$

$$1 = \frac{1}{b}b$$

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の数 a 及び 0 以外の任意の数 b, c について $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$.

$$\frac{ac}{bc} = (ac)\frac{1}{bc} = \{a(1 \cdot c)\}\frac{1}{bc} = \left[a\left\{\left(\frac{1}{b}b\right)c\right\}\right]\frac{1}{bc} = \left[a\left\{\frac{1}{b}(bc)\right\}\right]\frac{1}{bc}$$

$$\left(\frac{1}{b}b\right)c = \frac{1}{b}(bc)$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の数 a 及び 0 以外の任意の数 b, c について $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$.

$$\begin{aligned}\frac{ac}{bc} &= (ac)\frac{1}{bc} = \{a(1\cdot c)\}\frac{1}{bc} = \left[a\left\{\left(\frac{1}{b}b\right)c\right\}\right]\frac{1}{bc} = \left[a\left\{\frac{1}{b}(bc)\right\}\right]\frac{1}{bc}\\ &= \left\{\left(a\frac{1}{b}\right)(bc)\right\}\frac{1}{bc}\end{aligned}$$

$a\left\{\frac{1}{b}(bc)\right\} = \left(a\frac{1}{b}\right)(bc)$

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の数 a 及び 0 以外の任意の数 b, c について $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$ ．

$$\frac{ac}{bc} = (ac)\frac{1}{bc} = \{a(1\cdot c)\}\frac{1}{bc} = \left[a\left\{\left(\frac{1}{b}b\right)c\right\}\right]\frac{1}{bc} = \left[a\left\{\frac{1}{b}(bc)\right\}\right]\frac{1}{bc}$$

$$= \left\{\left(a\frac{1}{b}\right)(bc)\right\}\frac{1}{bc} = \left(a\frac{1}{b}\right)\left\{(bc)\frac{1}{bc}\right\}$$

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の数 a 及び 0 以外の任意の数 b, c について $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$.

$$\frac{ac}{bc} = (ac)\frac{1}{bc} = \{a(1 \cdot c)\}\frac{1}{bc} = \left[a\left\{\left(\frac{1}{b}b\right)c\right\}\right]\frac{1}{bc} = \left[a\left\{\frac{1}{b}(bc)\right\}\right]\frac{1}{bc}$$

$$= \left\{\left(a\frac{1}{b}\right)(bc)\right\}\frac{1}{bc} = \left(a\frac{1}{b}\right)\left\{(bc)\frac{1}{bc}\right\} = \left(a\frac{1}{b}\right) \cdot 1$$

$$(bc)\frac{1}{bc} = 1$$

$\boxed{\text{例}}$ 次のことを証明する：任意の数 a 及び 0 以外の任意の数 b, c について $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$.

$$\frac{ac}{bc} = (ac)\frac{1}{bc} = \{a(1 \cdot c)\}\frac{1}{bc} = \left[a\left\{\left(\frac{1}{b}b\right)c\right\}\right]\frac{1}{bc} = \left[a\left\{\frac{1}{b}(bc)\right\}\right]\frac{1}{bc}$$
$$= \left\{\left(a\frac{1}{b}\right)(bc)\right\}\frac{1}{bc} = \left(a\frac{1}{b}\right)\left\{(bc)\frac{1}{bc}\right\} = \left(a\frac{1}{b}\right) \cdot 1 = a\frac{1}{b}$$

$\boxed{例}$ 次のことを証明する：任意の数 a 及び 0 以外の任意の数 b, c について $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$.

$$\begin{aligned}\frac{ac}{bc} &= (ac)\frac{1}{bc} = \{a(1\cdot c)\}\frac{1}{bc} = \left[a\left\{\left(\frac{1}{b}b\right)c\right\}\right]\frac{1}{bc} = \left[a\left\{\frac{1}{b}(bc)\right\}\right]\frac{1}{bc} \\ &= \left\{\left(a\frac{1}{b}\right)(bc)\right\}\frac{1}{bc} = \left(a\frac{1}{b}\right)\left\{(bc)\frac{1}{bc}\right\} = \left(a\frac{1}{b}\right)\cdot 1 = a\frac{1}{b} \\ &= \frac{a}{b}\ ,\end{aligned}$$

例 次のことを証明する：任意の数 a 及び 0 以外の任意の数 b, c について $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{ac}{bc} &= (ac)\frac{1}{bc} = \{a(1\cdot c)\}\frac{1}{bc} = \left[a\left\{\left(\frac{1}{b}b\right)c\right\}\right]\frac{1}{bc} = \left[a\left\{\frac{1}{b}(bc)\right\}\right]\frac{1}{bc} \\
&= \left\{\left(a\frac{1}{b}\right)(bc)\right\}\frac{1}{bc} = \left(a\frac{1}{b}\right)\left\{(bc)\frac{1}{bc}\right\} = \left(a\frac{1}{b}\right)\cdot 1 = a\frac{1}{b} \\
&= \frac{a}{b} \ ,
\end{aligned}
$$

つまり $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$. 終

例えば，負の数と負の数との積が正の数になる理由は，そのことが数学的に証明されるからである．また例えば，分数で割るために分数の分母と分子を逆にして掛ける（逆数を掛ける）理由は，それらの結果が等しいことが数学的に証明されるからである．

次のことに注意すること：

分母が 0 の分数が表す数は無い.

　次のことに注意すること：

分母が 0 の分数が表す数は無い.

この根拠を説明する.

次のことに注意すること：

分母が 0 の分数が表す数は無い.

この根拠を説明する．仮に分数 $\dfrac{1}{0}$ が表す数があるならば，四則演算の法則 **2.1.8** により $0 \cdot \dfrac{1}{0} = 1$ **;** しかし，先に証明したように任意の数 a について $0 \cdot a = 0$ なので，$0 \cdot \dfrac{1}{0} = 0$ ；従って $0 = 1$.

次のことに注意すること：

分母が 0 の分数が表す数は無い.

この根拠を説明する．仮に分数 $\dfrac{1}{0}$ が表す数があるならば，四則演算の法則 **2.1.8** により $0\cdot\dfrac{1}{0}=1$ **;** しかし，先に証明したように任意の数 a について $0\cdot a=0$ なので，$0\cdot\dfrac{1}{0}=0$ ；従って $0=1$ ．このように，分数 $\dfrac{1}{0}$ が表す数があるとすると $0=1$ であり矛盾が生じる.

次のことに注意すること：

分母が 0 の分数が表す数は無い.

この根拠を説明する．仮に分数 $\dfrac{1}{0}$ が表す数があるならば，四則演算の法則 **2.1.8** により $0\cdot\dfrac{1}{0}=1$ **;** しかし，先に証明したように任意の数 a について $0\cdot a=0$ なので，$0\cdot\dfrac{1}{0}=0$ ；従って $0=1$ ．このように，分数 $\dfrac{1}{0}$ が表す数があるとすると $0=1$ であり矛盾が生じる．なので分数 $\dfrac{1}{0}$ が表す数は無い.

従ってまた a がどんな数であっても分数 $\dfrac{a}{0}=a\cdot\dfrac{1}{0}$ が表す数は無い.

[定理 2.1.1]　任意の数 a と b とについて

$$ab = 0 \iff a = 0 \text{ または } b = 0 \quad .$$

証明　$a = 0$ ならば $ab = 0 \cdot b = 0$ ． $b = 0$ ならば $ab = a \cdot 0 = 0$ ． 従って，$a = 0$ または $b = 0$ ならば，$ab = 0$ ．

　$ab = 0$ と仮定する． $a \neq 0$ とする． a の逆数 $\dfrac{1}{a}$ がある． $ab = 0$ の両辺に $\dfrac{1}{a}$ を掛ける：

$$\frac{1}{a}ab = \frac{1}{a}0 \ .$$

この等式の左辺は，$\dfrac{1}{a}a = 1$ より $\dfrac{1}{a}ab = 1b = b$ ；右辺は $\dfrac{1}{a}0 = 0$ ． よって $b = 0$ ． このように，$a \neq 0$ ならば $b = 0$ ． $a = 0$ または $a \neq 0$ で，$a \neq 0$ ならば $b = 0$ なので，$a = 0$ または $b = 0$ ．

　故に，$a = 0$ または $b = 0$ ならば，$ab = 0$ ． $ab = 0$ ならば，$a = 0$ または $b = 0$ ． (証明終了)

[定理 2.1.1]　数 a と b とについて，$ab = 0 \iff a = 0$ または $b = 0$.

[定理 2.1.2]　任意の数 a について，

$$a^2 = 0 \iff a = 0 .$$

証明　定理 2.1.1 により，数 a について，

$$aa = 0 \iff a = 0 \text{ または } a = 0 ,$$

つまり

$$a^2 = 0 \iff a = 0 .$$ 終