

1. 拡充2 命題の真偽と同値性

命題 P と命題 Q について、 P と Q とが同値である、つまり、
“ P ならば Q ” が成り立ち、“ Q ならば P ” も成り立つ
ということは、

P が正しいとき Q も正しく、 Q が正しいとき P も正しい、
つまり

P が真のとき Q も真で、 Q が真のとき P も真である
ということなので、

P と Q との両方とも真であるか両方とも偽である
ことである。つまり、命題 P と命題 Q とが同値であるとは、命題 P と命題
 Q との真偽が同じになることである。

命題 A と B とからできる命題 “ A でないかまたは B ” の真偽を考える。
 B が真のとき, “ A でないかまたは B ” は真. A が偽のとき, “ A でない” は真なので “ A でないかまたは B ” は真. A が真で B が偽のとき, “ A でない” は偽なので “ A でないかまたは B ” は偽.

命題 A と B とからできる命題 “ A でないかまたは B ” の真偽を考える。
 B が真のとき, “ A でないかまたは B ” は真. A が偽のとき, “ A でない” は真なので “ A でないかまたは B ” は真. A が真で B が偽のとき, “ A でない” は偽なので “ A でないかまたは B ” は偽. 命題 “ A でないかまたは B ” 及び命題 “ A ならば B ” の真理値表を作る.

A	B	A でない	A でないかまたは B	A ならば B
真	真	偽	真	真
真	偽	偽	偽	偽
偽	真	真	真	真
偽	偽	真	真	真

命題 A と B とからできる命題 “ A でないかまたは B ” の真偽を考える。
 B が真のとき, “ A でないかまたは B ” は真. A が偽のとき, “ A でない” は真なので “ A でないかまたは B ” は真. A が真で B が偽のとき, “ A でない” は偽なので “ A でないかまたは B ” は偽. 命題 “ A でないかまたは B ” 及び命題 “ A ならば B ” の真理値表を作る.

A	B	A でない	A でないかまたは B	A ならば B
真	真	偽	真	真
真	偽	偽	偽	偽
偽	真	真	真	真
偽	偽	真	真	真

この真理値表から分かるように, 命題 “ A でないかまたは B ” の真偽と命題 “ A ならば B ” の真偽とは常に同じである. つまり, 命題 “ A でないかまたは B ” と命題 “ A ならば B ” とは同値である.

命題 A と B に対して、命題 “ A ならば、 B ” の真偽と、命題 “ B でないならば、 A でない” の真偽とを考える。真理値表は次のようになる。

A	B	B でない	A でない	B でないならば、 A でない	A ならば B
真	真	偽	偽	真	真
真	偽	真	偽	偽	偽
偽	真	偽	真	真	真
偽	偽	真	真	真	真

命題 A と B に対して、命題 “ A ならば、 B ” の真偽と、命題 “ B でないならば、 A でない” の真偽とを考える。真理値表は次のようになる。

A	B	B でない	A でない	B でないならば、 A でない	A ならば B
真	真	偽	偽	真	真
真	偽	真	偽	偽	偽
偽	真	偽	真	真	真
偽	偽	真	真	真	真

このように、命題 “ A ならば B ” の真偽と、命題 “ B でないならば、 A でない” の真偽とは常に同じになる。つまり、命題 “ A ならば B ” とその命題 “ B でないならば、 A でない” とは同値になる。