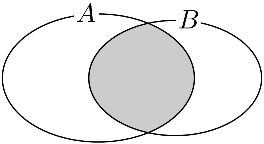
1.8 集合の演算

集合 A と集合 B との両方に属す対象の全体を A と B との共通部分といい，$A \cap B$ と書き表す．共通部分を表す記号 $\cap$ は "キャップ" とか "インターセクション" とかいう．

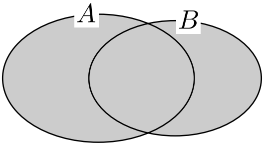
$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \ \text{かつ}\ x \in B \,\} \,.$$



集合 A と集合 B との共通部分 $A \cap B$ の "感じ" を図で表すと右図の網掛けの部分のようになる．

集合 A か集合 B かの少なくともどちらかに属す対象の全体を A と B との合併集合あるいは和集合といい，$A \cup B$ と書き表す．合併集合を表す記号 $\cup$ は“カップ”とか“ユニオン”とかいう．

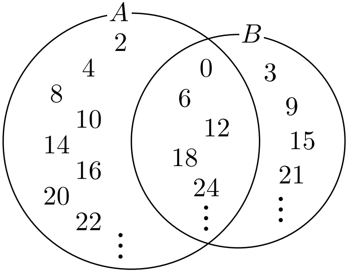
$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \ \text{または} \ x \in B \,\}\ .$$



集合 A と集合 B との合併集合 $A \cup B$ の“感じ”を図で表すと右図の網掛けの部分のようになる．

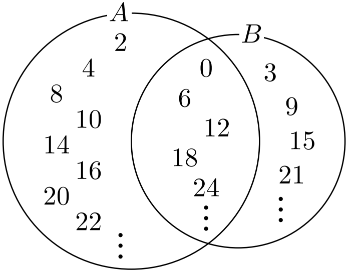
$\boxed{\text{例}}$ 集合 A と集合 B とを次のように定める：

$$A = \{\, n \mid n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 2 \text{ の倍数である} \,\}$$
$$= \{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,\ldots\}\ ,$$
$$B = \{\, n \mid n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 3 \text{ の倍数である} \,\}$$
$$= \{0,3,6,9,12,15,18,21,\ldots\}\ .$$



$\boxed{例}$ 集合 A と集合 B とを次のように定める：

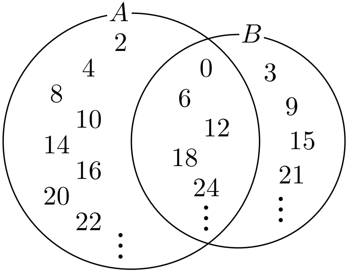
$$A = \{\, n \mid n \text{ は} 0 \text{ 以上の整数で } 2 \text{ の倍数である} \,\}$$
$$= \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \ldots\} \;,$$
$$B = \{\, n \mid n \text{ は} 0 \text{ 以上の整数で } 3 \text{ の倍数である} \,\}$$
$$= \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots\} \;.$$



A と B との共通部分 $A \cap B$ は A と B との両方に属す対象の全体なので

$$A \cap B = \{\, n \mid n \text{ は} 0 \text{ 以上の整数で } 2 \text{ の倍数でありかつ } 3 \text{ の倍数である} \,\}$$
$$= \{0, 6, 12, 18, 24, \ldots\} \;.$$

例 集合 A と集合 B とを次のように定める：



$$A = \{\, n \mid n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 2 \text{ の倍数である} \,\}$$
$$= \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \ldots\}\ ,$$
$$B = \{\, n \mid n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 3 \text{ の倍数である} \,\}$$
$$= \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots\}\ .$$

A と B との共通部分 $A \cap B$ は A と B との両方に属す対象の全体なので

$$A \cap B = \{\, n \mid n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 2 \text{ の倍数でありかつ } 3 \text{ の倍数である} \,\}$$
$$= \{0, 6, 12, 18, 24, \ldots\}\ .$$

A と B との合併集合 $A \cup B$ は A か B か少なくともどちらかに属す対象の全体なので

$$A \cup B = \{\, n \mid n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 2 \text{ の倍数であるかまたは } 3 \text{ の倍数である} \,\}$$
$$= \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, \ldots\}\ .$$

終

$\boxed{問1.8.1}$ 集合 A と集合 B とを次のように定める：

$$A = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 30 \text{ の約数である} \,\},$$

$$B = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 40 \text{ の約数である} \,\}.$$

集合 A と集合 B との共通部分 $A \cap B$ と合併集合 $A \cup B$ とを，要素を列挙する表現で書き表せ．

$$A = \qquad\qquad\qquad\qquad , \qquad B = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

これより，

$$A \cap B = \qquad\qquad\qquad\qquad A \cup B = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

$\boxed{問1.8.1}$ 集合 A と集合 B とを次のように定める：

$$A = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 30 \text{ の約数である} \,\}\ ,$$

$$B = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 40 \text{ の約数である} \,\}\ .$$

集合 A と集合 B との共通部分 $A \cap B$ と合併集合 $A \cup B$ とを，要素を列挙する表現で書き表せ．

$$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}\ , \qquad B = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}\ .$$

これより，

$$A \cap B = \qquad\qquad\qquad\qquad A \cup B = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad .$$

$\boxed{\text{問}1.8.1}$ 集合 A と集合 B とを次のように定める：

$$A = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 30 \text{ の約数である} \,\}\ ,$$

$$B = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上の整数で } 40 \text{ の約数である} \,\}\ .$$

集合 A と集合 B との共通部分 $A \cap B$ と合併集合 $A \cup B$ とを，要素を列挙する表現で書き表せ．

$$A = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}\ , \qquad B = \{1,2,4,5,8,10,20,40\}\ .$$

これより，

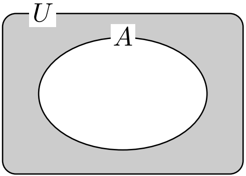
$$A \cap B = \{1,2,5,10\}\ , \qquad A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8,10,15,20,30,40\}\ .$$ $\boxed{\text{終}}$

考える対象の範囲がある集合に限定されているとき，その集合を全体集合という．例えば，整数について考えるときは整数の全体が全体集合である．

考える対象の範囲がある集合に限定されているとき，その集合を全体集合という．例えば，整数について考えるときは整数の全体が全体集合である．

全体集合 U が定まっているとき，U の部分集合 A に対して，U の要素で A に属さない対象の全体を，U に対する A の補集合といい，$\overline{A}$ と書き表す．補集合を表す記号 ‾ は "バー" などという．

$$\overline{A} = \{\, x \mid x \in U \quad \text{かつ} \quad x \notin A \,\}\ .$$



全体集合 U に対する集合 A の補集合 $\overline{A}$ の "感じ" を図で表すと右図の網掛けの部分のようになる．

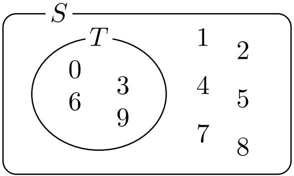
例　全体集合 S 及びその部分集合 T を次のように定める：

$$S = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数である} \,\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} ,$$

$$T = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で } 3 \text{ の倍数である} \,\} = \{0,3,6,9\} .$$

このとき，S に対する T の補集合 $\overline{T}$ は，全体集合 S の要素で T に属さない対象の全体であるから，

$$\overline{T} = \{1,2,4,5,7,8\} .$$



終

$\boxed{\text{問}1.8.2}$ 全体集合 U 及びその部分集合 A を次のように定める：

$$U = \{\, x \mid x \text{ は}9\text{以下の正の整数である}\,\},$$

$$A = \{\, x \mid x \text{ は}9\text{以下の正の整数で素数である}\,\}.$$

U に対する A の補集合 $\overline{A}$ を，要素を列挙する表現で書き表せ.

$A =$ 　　　　　　　　なので $\overline{A} =$ 　　　　　　　　.

$\boxed{問 1.8.2}$ 全体集合 U 及びその部分集合 A を次のように定める：

$$U = \{\, x \mid x \text{ は } 9 \text{ 以下の正の整数である} \,\},$$

$$A = \{\, x \mid x \text{ は } 9 \text{ 以下の正の整数で素数である} \,\}.$$

U に対する A の補集合 $\overline{A}$ を，要素を列挙する表現で書き表せ.

$A = \{2,3,5,7\}$ なので $\overline{A} = \{1,4,6,8,9\}$. $\boxed{終}$

例　全体集合 U 及びその部分集合 A と B とを次のように定める：

$$U = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数である} \,\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\ ,$$

$$A = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で } 2 \text{ の倍数である} \,\} = \{0,2,4,6,8\}\ ,$$

$$B = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で } 3 \text{ の倍数である} \,\} = \{0,3,6,9\}\ .$$

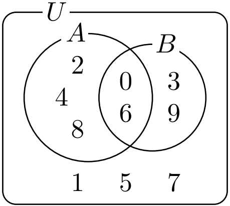
このとき次のようになる：

$\overline{A} = \{1,3,5,7,9\}$ なので $\overline{A} \cap B = \{3,9\}$,

$\overline{A} = \{1,3,5,7,9\}$ なので $\overline{A} \cup B = \{0,1,3,5,6,7,9\}$,

$A \cap B = \{0,6\}$ なので $\overline{A \cap B} = \{1,2,3,4,5,7,8,9\}$,

$A \cup B = \{0,2,3,4,6,8,9\}$ なので $\overline{A \cup B} = \{1,5,7\}$.



終

$\boxed{\text{問}1.8.3}$ 全体集合 U 及びその部分集合 A と B とを次のように定める：

$$U = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数である} \,\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\ ,$$

$$A = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で } 28 \text{ の約数である} \,\} = \{1,2,4,7\}\ ,$$

$$B = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で } 30 \text{ の約数である} \,\} = \{1,2,3,5,6\}\ .$$

以下の集合を，要素を列挙する表現で書き表せ.

(1)$A \cap \overline{B}$.　　(2)$A \cup \overline{B}$.　　(3)$\overline{A \cap B}$.　　(4)$\overline{A \cup B}$.

(1)　$\overline{B} =$ 　　　　　なので　$A \cap \overline{B} =$ 　　　.

(2)　$\overline{B} =$ 　　　　　なので　$A \cup \overline{B} =$ 　　　　　.

(3)　$A \cap B =$ 　　　なので　$\overline{A \cap B} =$ 　　　　　.

(4)　$A \cup B =$ 　　　　　　なので　$\overline{A \cup B} =$ 　　　.

$\boxed{問1.8.3}$ 全体集合 U 及びその部分集合 A と B とを次のように定める：

$$U = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数である} \,\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\ ,$$

$$A = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で } 28 \text{ の約数である} \,\} = \{1,2,4,7\}\ ,$$

$$B = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で } 30 \text{ の約数である} \,\} = \{1,2,3,5,6\}\ .$$

以下の集合を，要素を列挙する表現で書き表せ.

(1)$A \cap \overline{B}$.　　(2)$A \cup \overline{B}$.　　(3)$\overline{A \cap B}$.　　(4)$\overline{A \cup B}$.

(1)　$\overline{B} = \{0,4,7,8,9\}$ なので $A \cap \overline{B} = \{4,7\}$.

(2)　$\overline{B} =$ 　　　　なので $A \cup \overline{B} =$ 　　　　.

(3)　$A \cap B =$ 　　　　なので $\overline{A \cap B} =$ 　　　　.

(4)　$A \cup B =$ 　　　　なので $\overline{A \cup B} =$ 　　　　.

$\boxed{問1.8.3}$ 全体集合 U 及びその部分集合 A と B とを次のように定める：

$$U = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数である} \,\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\ ,$$

$$A = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で } 28 \text{ の約数である} \,\} = \{1,2,4,7\}\ ,$$

$$B = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で } 30 \text{ の約数である} \,\} = \{1,2,3,5,6\}\ .$$

以下の集合を，要素を列挙する表現で書き表せ.

(1)$A \cap \overline{B}$.　(2)$A \cup \overline{B}$.　(3)$\overline{A \cap B}$.　(4)$\overline{A \cup B}$.

(1) $\overline{B} = \{0,4,7,8,9\}$ なので $A \cap \overline{B} = \{4,7\}$.

(2) $\overline{B} = \{0,4,7,8,9\}$ なので $A \cup \overline{B} = \{0,1,2,4,7,8,9\}$.

(3) $A \cap B =$ 　　　　なので $\overline{A \cap B} =$ 　　　　　　　　.

(4) $A \cup B =$ 　　　　　　　　なので $\overline{A \cup B} =$ 　　　　.

$\boxed{\text{問}1.8.3}$ 全体集合 U 及びその部分集合 A と B とを次のように定める：

$$U = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数である} \,\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\ ,$$

$$A = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で } 28 \text{ の約数である} \,\} = \{1,2,4,7\}\ ,$$

$$B = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で } 30 \text{ の約数である} \,\} = \{1,2,3,5,6\}\ .$$

以下の集合を，要素を列挙する表現で書き表せ.

(1)$A \cap \overline{B}$.　　(2)$A \cup \overline{B}$.　　(3)$\overline{A \cap B}$.　　(4)$\overline{A \cup B}$.

(1) $\overline{B} = \{0,4,7,8,9\}$ なので $A \cap \overline{B} = \{4,7\}$.

(2) $\overline{B} = \{0,4,7,8,9\}$ なので $A \cup \overline{B} = \{0,1,2,4,7,8,9\}$.

(3) $A \cap B = \{1,2\}$ なので $\overline{A \cap B} = \{0,3,4,5,6,7,8,9\}$.

(4) $A \cup B =$ 　　　　　　　　なので $\overline{A \cup B} =$ 　　　　.

$\boxed{\text{問}1.8.3}$ 全体集合 U 及びその部分集合 A と B とを次のように定める：

$$U = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数である} \,\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\ ,$$

$$A = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で } 28 \text{ の約数である} \,\} = \{1,2,4,7\}\ ,$$

$$B = \{\, x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上 } 9 \text{ 以下の整数で } 30 \text{ の約数である} \,\} = \{1,2,3,5,6\}\ .$$

以下の集合を，要素を列挙する表現で書き表せ.

(1)$A \cap \overline{B}$.　(2)$A \cup \overline{B}$.　(3)$\overline{A \cap B}$.　(4)$\overline{A \cup B}$.

(1) $\overline{B} = \{0,4,7,8,9\}$ なので $A \cap \overline{B} = \{4,7\}$.

(2) $\overline{B} = \{0,4,7,8,9\}$ なので $A \cup \overline{B} = \{0,1,2,4,7,8,9\}$.

(3) $A \cap B = \{1,2\}$ なので $\overline{A \cap B} = \{0,3,4,5,6,7,8,9\}$.

(4) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ なので $\overline{A \cup B} = \{0,8,9\}$. $\boxed{\text{終}}$

対象 a と b とをこの順に並べた対 (a,b) を，a と b との順序対あるいは2項対という．対象 a と b との順序対 (a,b) において a 及び b を成分という．

対象 a と b とをこの順に並べた対 (a,b) を，a と b との順序対あるいは 2 項対という．対象 a と b との順序対 (a,b) において a 及び b を成分という．任意の対象 u,v,x,y について，順序対 (u,v) と (x,y) とが等しいとは，1 番めの成分 u と x とが等しく 2 番めの成分 v と y とが等しいことである：

$$(u,v) = (x,y) \iff u = x \text{ かつ } v = y \ .$$

例えば，順序対 $(1,2)$ と順序対 $(2,1)$ とは異なる対象である：$(1,2) \neq (2,1)$ ．

対象 a と b とをこの順に並べた対 (a,b) を，a と b との順序対あるいは2項対という．対象 a と b との順序対 (a,b) において a 及び b を成分という．任意の対象 u,v,x,y について，順序対 (u,v) と (x,y) とが等しいとは，1番めの成分 u と x とが等しく2番めの成分 v と y とが等しいことである：

$$(u,v) = (x,y) \iff u = x \text{ かつ } v = y \ .$$

例えば，順序対 $(1,2)$ と順序対 $(2,1)$ とは異なる対象である：$(1,2) \neq (2,1)$．

日本人の姓名は，通常，家系で決まる“姓”の部分と個人の“名”の部分とから成る．数学的にはこのような日本人の姓名は姓と名との順序対と考えられる．例えば，“山田太郎”という姓名は，“山田”という姓と“太郎”という名との順序対 (山田,太郎) である．

対象 a と b とをこの順に並べた対 (a,b) を，a と b との順序対あるいは2項対という．対象 a と b との順序対 (a,b) において a 及び b を成分という．任意の対象 u,v,x,y について，順序対 (u,v) と (x,y) とが等しいとは，1番めの成分 u と x とが等しく2番めの成分 v と y とが等しいことである：

$$(u,v) = (x,y) \iff u = x \text{ かつ } v = y \ .$$

例えば，順序対 $(1,2)$ と順序対 $(2,1)$ とは異なる対象である：$(1,2) \neq (2,1)$ ．

日本人の姓名は，通常，家系で決まる“姓”の部分と個人の“名”の部分とから成る．数学的にはこのような日本人の姓名は姓と名との順序対と考えられる．例えば，“山田太郎”という姓名は，“山田”という姓と“太郎”という名との順序対 (山田,太郎) である．

集合 A と B とに対して，A の要素 x と B の要素 y との順序対 (x,y) の全体を A と B との直積集合といい，$A \times B$ と書き表す：

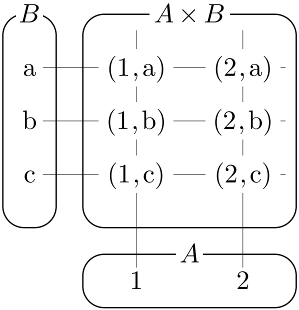
$$A \times B = \{\ (x,y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B\ \}\ .$$

例 集合 $A=\{1,2\}$ と集合 $B=\{\mathrm{a,b,c}\}$ とを考える．A と B との直積集合 $A\times B$ は右図のようになる．直積集合 $A\times B$ と直積集合 $B\times A$ とは次のようになる：

$$A\times B=\{(1,\mathrm{a}),(1,\mathrm{b}),(1,\mathrm{c}),(2,\mathrm{a}),(2,\mathrm{b}),(2,\mathrm{c})\}\ .$$

$$B\times A=\{(\mathrm{a},1),(\mathrm{a},2),(\mathrm{b},1),(\mathrm{b},2),(\mathrm{c},1),(\mathrm{c},2)\}\ .$$

よってこのとき $A\times B\neq B\times A$ ．



終

3 個の対象 a と b と c について，a と b との順序対 (a,b) と c との順序対 $\big((a,b),c\big)$ を a と b と c との 3 項組といい，単に (a,b,c) と書き表す：

$$(a,b,c) = \big((a,b),c\big) \ .$$

3 個の対象 a と b と c について，a と b との順序対 (a,b) と c との順序対 $\bigl((a,b),c\bigr)$ を a と b と c との 3 項組といい，単に (a,b,c) と書き表す：

$$(a,b,c) = \bigl((a,b),c\bigr) \ .$$

任意の対象 u,v,w,x,y,z について，

$$\begin{aligned}(u,v,w)=(x,y,z) &\iff \bigl((u,v),w\bigr)=\bigl((x,y),z\bigr)\\ &\iff (u,v)=(x,y) \ \text{かつ}\ w=z\\ &\iff u=x \ \text{かつ}\ v=y \ \text{かつ}\ w=z \ .\end{aligned}$$

3 個の対象 a と b と c について，a と b との順序対 (a,b) と c との順序対 $\bigl((a,b),c\bigr)$ を a と b と c との 3 項組といい，単に (a,b,c) と書き表す：

$$(a,b,c) = \bigl((a,b),c\bigr)\ .$$

任意の対象 u,v,w,x,y,z について，

$$\begin{aligned}(u,v,w)=(x,y,z) &\iff \bigl((u,v),w\bigr)=\bigl((x,y),z\bigr)\\ &\iff (u,v)=(x,y) \text{ かつ } w=z\\ &\iff u=x \text{ かつ } v=y \text{ かつ } w=z\ .\end{aligned}$$

通常の電話番号は，数学的には，市外局番と市内局番と加入者番号との 3 項組である．例えば，豊田工業高等専門学校の代表電話番号 0565-32-8811 は，数学的には，市外局番 0565 と市内局番 32 と加入者番号 8811 との 3 項組 $(0565,32,8811)$ である．

集合 A と B と C とに対して，A の要素 x と B の要素 y と C の要素 z との 3 項組 $(x,y,z) = \bigl((x,y),z\bigr)$ の全体を A と B と C との直積集合といい，$A \times B \times C$ と書き表す：

$$\begin{aligned} A \times B \times C &= \{\, (x,y,z) \mid x \in A \ \text{かつ}\ y \in B \ \text{かつ}\ z \in C \,\} \\ &= \{\, \bigl((x,y),z\bigr) \mid (x,y) \in A \times B \ \text{かつ}\ z \in C \,\} \\ &= \{\, (w,z) \mid w \in A \times B \ \text{かつ}\ z \in C \,\} \\ &= (A \times B) \times C \ . \end{aligned}$$