1.5 述語の同値性

述語 $\mathcal{P}$ と述語 $\mathcal{Q}$ とについて，$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ とが同値であるとは，

$\mathcal{P}$ から $\mathcal{Q}$ が導かれ，逆に $\mathcal{Q}$ から $\mathcal{P}$ が導かれる

ことである．述語 $\mathcal{P}$ と述語 $\mathcal{Q}$ とが同値であることを次のように書き表す：

$$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}\,.$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する述語 $x-3=0$ から，x に関する述語 $x=3$ が導かれる．逆に，$x=3$ のとき $x-3=0$ なので，述語 $x=3$ から述語 $x-3=0$ が導かれる．従って述語 $x-3=0$ と述語 $x=3$ とは同値である：

$$x-3=0 \iff x=3 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

例 整数を表す変数 n に関する述語“n は 6 の倍数である”と“n は 2 と 3 との公倍数である”とは同値である:

$$n \text{ は } 6 \text{ の倍数である} \iff n \text{ は } 2 \text{ と } 3 \text{ との公倍数である}.$$

終

例 平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形 ABC について考える．辺 AB の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$ と辺 AC の長さ $\overline{\mathrm{AC}}$ とが等しいとすると，角度 $\angle\mathrm{ABC}$ と角度 $\angle\mathrm{ACB}$ とが等しいことが証明できる；つまり述語 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$ から述語 $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ACB}$ が導かれる．逆に，$\angle\mathrm{ABC}$ と $\angle\mathrm{ACB}$ とが等しいとすると，$\overline{\mathrm{AB}}$ と $\overline{\mathrm{AC}}$ とが等しいことが証明できる；つまり述語 $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ACB}$ から述語 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$ が導かれる．従って，述語 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$ と述語 $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ACB}$ とは同値である：

$$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}} \iff \angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ACB} \ .$$

終