

## 8. 拡充2 座標空間における立体領域の体積

$xyz$  座標空間には  $x$  軸と  $y$  軸と  $z$  軸との 3 本の数直線が設定されている.

$xyz$  座標空間には  $x$  軸と  $y$  軸と  $z$  軸との 3 本の数直線が設定されている。

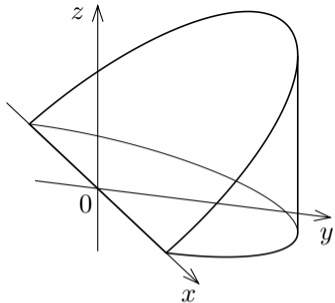
$xyz$  座標空間における立体領域  $V$  の体積を求めるために、

実数  $x$  を座標とする  $x$  軸の点が属し  $x$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分  
を考えると、

実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属し  $y$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分  
を考えると、

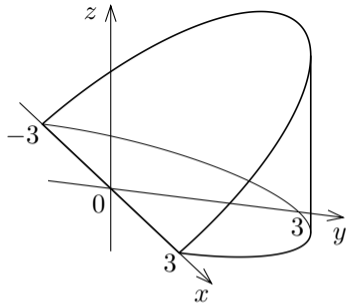
実数  $z$  を座標とする  $z$  軸の点が属し  $z$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分  
を考えるとこの方法がある。

例  $xyz$  座標空間において不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$   
と  $0 \leq z \leq y$  との連立で表される立体領域  $V$   
の体積を求めよ.



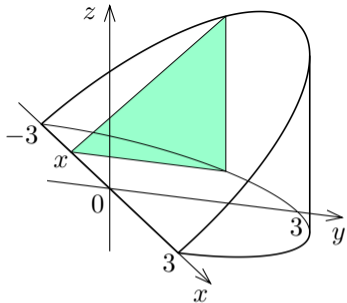
例  $xyz$  座標空間において不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$   
と  $0 \leq z \leq y$  との連立で表される立体領域  $V$   
の体積を求める.

不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  より,  $x^2 - 9 \leq -y^2 \leq 0$ ,  
 $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ .



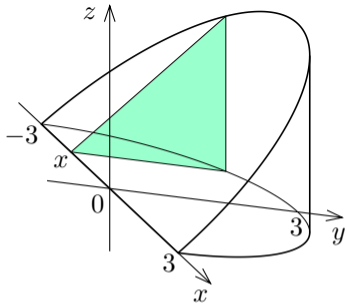
例  $xyz$  座標空間において不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  と  $0 \leq z \leq y$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める.

不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  より,  $x^2 - 9 \leq -y^2 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ . この範囲の実数  $x$  を座標とする  $x$  軸の点に属し  $x$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分の形を考える.



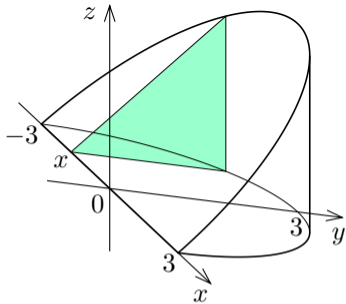
例  $xyz$  座標空間において不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  と  $0 \leq z \leq y$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める.

不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  より,  $x^2 - 9 \leq -y^2 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ . この範囲の実数  $x$  を座標とする  $x$  軸の点に属し  $x$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分の形を考える.  $x$  軸に垂直な平面において, 点の  $x$  座標は一定なので, 点の  $y$  座標と  $z$  座標とだけが様々になる; なので  $x$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分の形は  $yz$  座標平面で表せる.



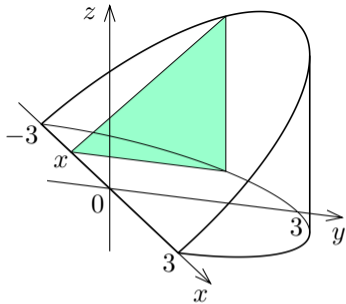
例  $xyz$  座標空間において不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  と  $0 \leq z \leq y$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める.

不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  より,  $x^2 - 9 \leq -y^2 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ . この範囲の実数  $x$  を座標とする  $x$  軸の点が属し  $x$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  を  $y$  について解く:



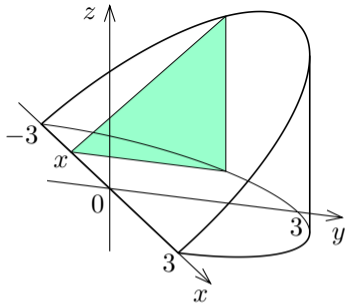
例  $xyz$  座標空間において不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  と  $0 \leq z \leq y$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める。

不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  より,  $x^2 - 9 \leq -y^2 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ . この範囲の実数  $x$  を座標とする  $x$  軸の点が属し  $x$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  を  $y$  について解く:  $y^2 - (9 - x^2) \leq 0$ ,  $(y + \sqrt{9 - x^2})(y - \sqrt{9 - x^2}) \leq 0$ ,  $-\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$ .



例  $xyz$  座標空間において不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  と  $0 \leq z \leq y$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める。

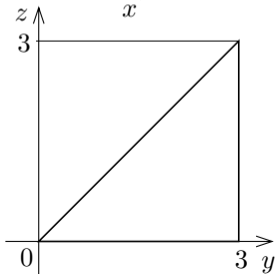
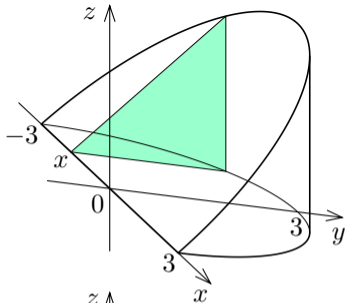
不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  より,  $x^2 - 9 \leq -y^2 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ . この範囲の実数  $x$  を座標とする  $x$  軸の点が属し  $x$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  を  $y$  について解く:  $y^2 - (9 - x^2) \leq 0$ ,  $(y + \sqrt{9 - x^2})(y - \sqrt{9 - x^2}) \leq 0$ ,  $-\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$ . この不等式と不等式  $y \geq 0$  とより  $0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$ .



例  $xyz$  座標空間において不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  と  $0 \leq z \leq y$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める。

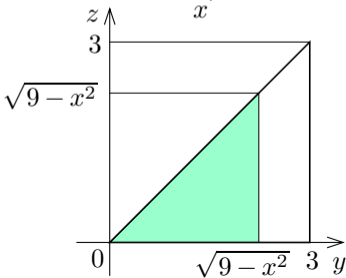
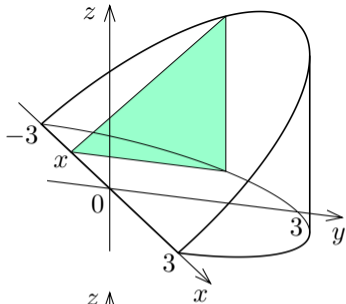
不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  より,  $x^2 - 9 \leq -y^2 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ . この範囲の実数  $x$  を座標とする  $x$  軸の点が属し  $x$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  を  $y$  について解く:  $y^2 - (9 - x^2) \leq 0$ ,  $(y + \sqrt{9 - x^2})(y - \sqrt{9 - x^2}) \leq 0$ ,  $-\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$ . この不等式と不等式  $y \geq 0$  とより  $0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$ . この不等式と不等式  $0 \leq z \leq y$  との連立は,  $yz$  座標平面において,

囲まれる領域を表す.

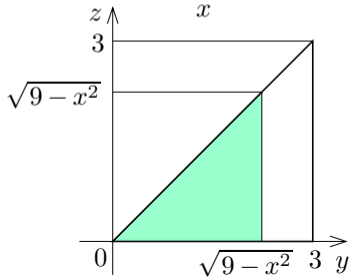
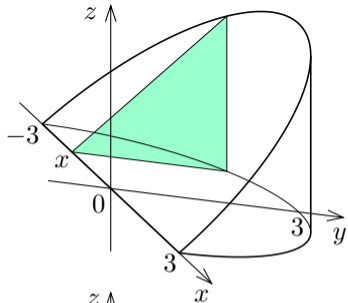


例  $xyz$  座標空間において不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  と  $0 \leq z \leq y$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める。

不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  より,  $x^2 - 9 \leq -y^2 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ . この範囲の実数  $x$  を座標とする  $x$  軸の点が属し  $x$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  を  $y$  について解く:  $y^2 - (9 - x^2) \leq 0$ ,  $(y + \sqrt{9 - x^2})(y - \sqrt{9 - x^2}) \leq 0$ ,  $-\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$ . この不等式と不等式  $y \geq 0$  とより  $0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$ . この不等式と不等式  $0 \leq z \leq y$  との連立は,  $yz$  座標平面において, 直角を挟む 2 辺の長さが  $\sqrt{9 - x^2}$  である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す.

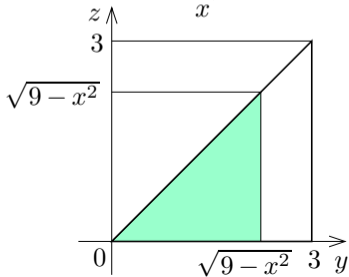
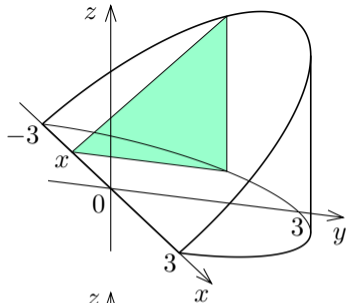


$-3 \leq x \leq 3$  である実数  $x$  を座標とする  $x$  軸の点が属し  $x$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分の形は直角を挟む 2 辺の長さが  $\sqrt{9-x^2}$  である直角二等辺三角形なので、



$-3 \leq x \leq 3$  である実数  $x$  を座標とする  $x$  軸の点が属し  $x$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分の形は直角を挟む 2 辺の長さが  $\sqrt{9-x^2}$  である直角二等辺三角形なので、その面積  $S(x)$  は

$$S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{9-x^2} \sqrt{9-x^2} = \frac{9-x^2}{2} .$$

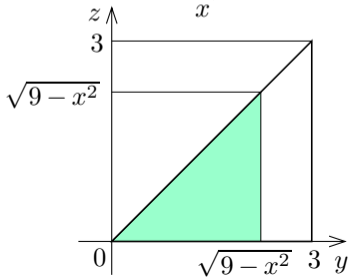
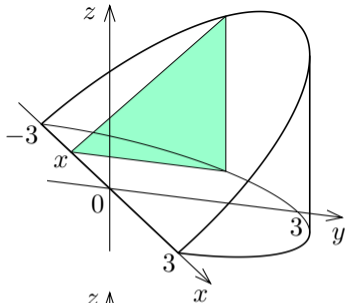


$-3 \leq x \leq 3$  である実数  $x$  を座標とする  $x$  軸の点が属し  $x$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分の形は直角を挟む 2 辺の長さが  $\sqrt{9-x^2}$  である直角二等辺三角形なので、その面積  $S(x)$  は

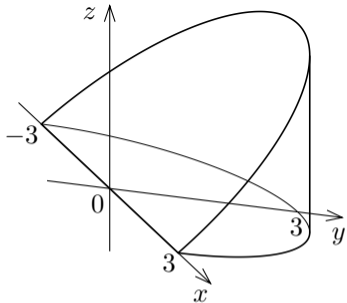
$$S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{9-x^2} \sqrt{9-x^2} = \frac{9-x^2}{2} .$$

立体領域  $V$  の体積は、

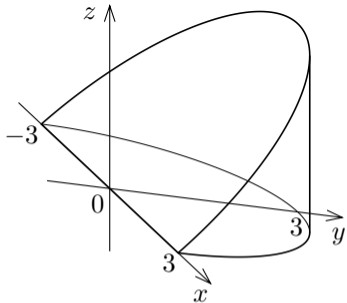
$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 S(x) dx &= \int_{-3}^3 \frac{9-x^2}{2} dx = \left[ \frac{9}{2}x - \frac{1}{6}x^3 \right]_{-3}^3 \\ &= 18 . \end{aligned}$$



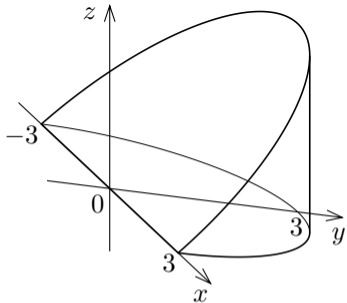
$y$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分  
を考えてもよい.



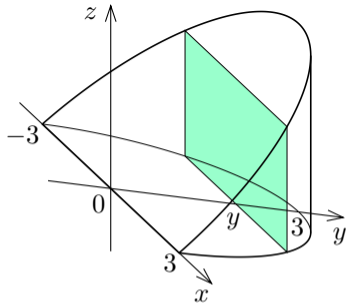
不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  より,  $y^2 - 9 \leq -x^2 \leq 0$  ,  
 $(y+3)(y-3) \leq 0$  ,  $-3 \leq y \leq 3$  .



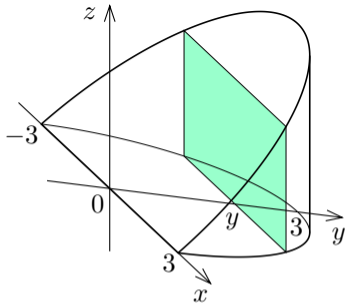
不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  より,  $y^2 - 9 \leq -x^2 \leq 0$  ,  
 $(y+3)(y-3) \leq 0$  ,  $-3 \leq y \leq 3$  . 更に  $y \geq 0$   
なので  $0 \leq y \leq 3$  .



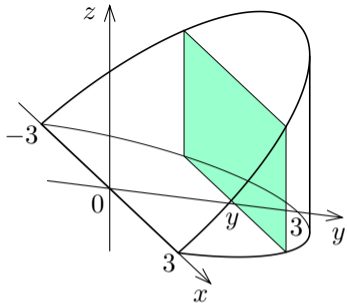
不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  より,  $y^2 - 9 \leq -x^2 \leq 0$  ,  
 $(y+3)(y-3) \leq 0$  ,  $-3 \leq y \leq 3$  . 更に  $y \geq 0$   
なので  $0 \leq y \leq 3$  . この範囲の実数  $y$  を  
座標とする  $y$  軸の点が属し  $y$  軸に垂直な  
平面と  $V$  との共通部分の形を考える.



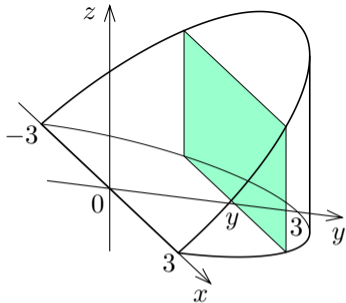
不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  より,  $y^2 - 9 \leq -x^2 \leq 0$ ,  
 $(y+3)(y-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq y \leq 3$ . 更に  $y \geq 0$   
なので  $0 \leq y \leq 3$ . この範囲の実数  $y$  を  
座標とする  $y$  軸の点が属し  $y$  軸に垂直な  
平面と  $V$  との共通部分の形を考える.  $y$  軸  
に垂直な平面において, 点の  $y$  座標は一定なの  
で, 点の  $x$  座標と  $z$  座標とだけが様々になる; な  
ので  $y$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分の形は  
 $xz$  座標平面で表せる.



不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  より,  $y^2 - 9 \leq -x^2 \leq 0$ ,  
 $(y+3)(y-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq y \leq 3$ . 更に  $y \geq 0$   
なので  $0 \leq y \leq 3$ . この範囲の実数  $y$  を  
座標とする  $y$  軸の点が属し  $y$  軸に垂直な  
平面と  $V$  との共通部分の形を考える.  
不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  を  $x$  について解く:



不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  より,  $y^2 - 9 \leq -x^2 \leq 0$  ,  
 $(y+3)(y-3) \leq 0$  ,  $-3 \leq y \leq 3$  . 更に  $y \geq 0$   
 なので  $0 \leq y \leq 3$  . この範囲の実数  $y$  を  
 座標とする  $y$  軸の点が属し  $y$  軸に垂直な  
 平面と  $V$  との共通部分の形を考える.  
 不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  を  $x$  について解く:  
 $x^2 - (9 - y^2) \leq 0$  ,  $(x + \sqrt{9 - y^2})(x - \sqrt{9 - y^2})$   
 $\leq 0$  ,  $-\sqrt{9 - y^2} \leq x \leq \sqrt{9 - y^2}$  .



不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  より,  $y^2 - 9 \leq -x^2 \leq 0$ ,  
 $(y+3)(y-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq y \leq 3$ . 更に  $y \geq 0$   
 なので  $0 \leq y \leq 3$ . この範囲の実数  $y$  を  
 座標とする  $y$  軸の点が属し  $y$  軸に垂直な  
 平面と  $V$  との共通部分の形を考える.

不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  を  $x$  について解く:

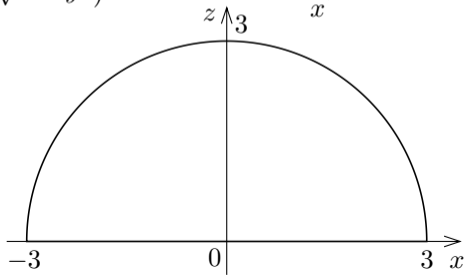
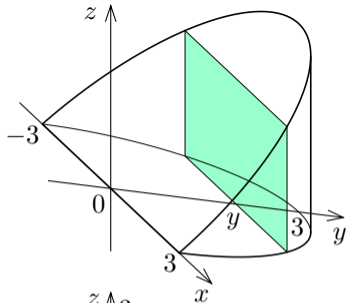
$$x^2 - (9 - y^2) \leq 0, \quad (x + \sqrt{9 - y^2})(x - \sqrt{9 - y^2})$$

$$\leq 0, \quad -\sqrt{9 - y^2} \leq x \leq \sqrt{9 - y^2}. \quad \text{こ}$$

この不等式と不等式  $0 \leq z \leq y$  との連  
 立は,  $xz$  平面において,

で囲まれ

る領域を表す.



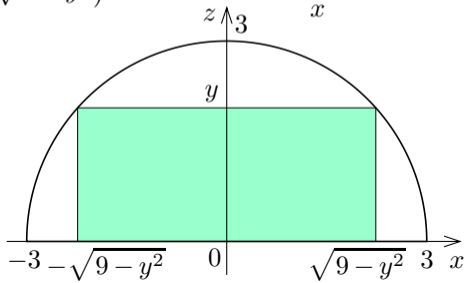
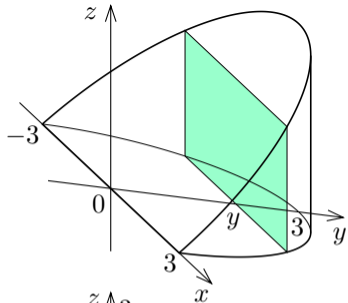
不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  より,  $y^2 - 9 \leq -x^2 \leq 0$ ,  
 $(y+3)(y-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq y \leq 3$ . 更に  $y \geq 0$   
 なので  $0 \leq y \leq 3$ . この範囲の実数  $y$  を  
 座標とする  $y$  軸の点が属し  $y$  軸に垂直な  
 平面と  $V$  との共通部分の形を考える.

不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  を  $x$  について解く:

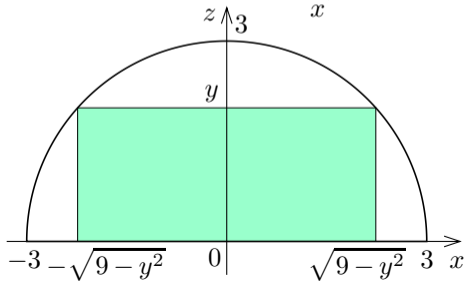
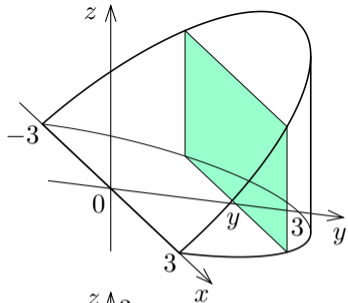
$$x^2 - (9 - y^2) \leq 0, \quad (x + \sqrt{9 - y^2})(x - \sqrt{9 - y^2})$$

$$\leq 0, \quad -\sqrt{9 - y^2} \leq x \leq \sqrt{9 - y^2}. \quad \text{こ}$$

この不等式と不等式  $0 \leq z \leq y$  との連  
 立は,  $xz$  平面において,  $x$  軸方向の  
 辺の長さが  $2\sqrt{9 - y^2}$  で  $z$  軸方向の  
 辺の長さが  $y$  である長方形で囲まれ  
 る領域を表す.

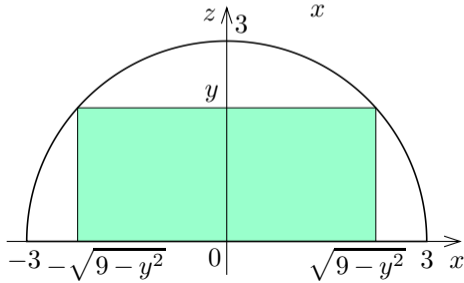
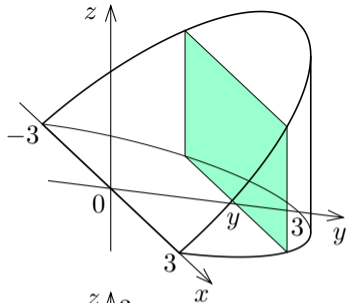


$0 \leq y \leq 3$  である実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の  
 点が属し  $y$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部  
 分の形は辺の長さが  $2\sqrt{9-y^2}$  と  $y$  である長  
 方形で囲まれる領域なので、



$0 \leq y \leq 3$  である実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属し  $y$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分の形は辺の長さが  $2\sqrt{9-y^2}$  と  $y$  である長方形で囲まれる領域なので、その面積  $S(y)$  は

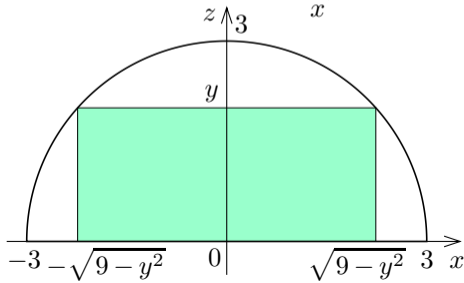
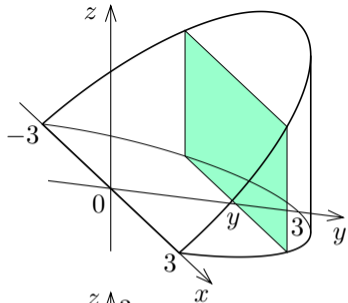
$$S(y) = 2\sqrt{9-y^2}y = 2y\sqrt{9-y^2} .$$



$0 \leq y \leq 3$  である実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属し  $y$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分の形は辺の長さが  $2\sqrt{9-y^2}$  と  $y$  である長方形で囲まれる領域なので、その面積  $S(y)$  は

$$S(y) = 2\sqrt{9-y^2}y = 2y\sqrt{9-y^2} .$$

変数  $t$  を  $t = 9 - y^2$  とおく.



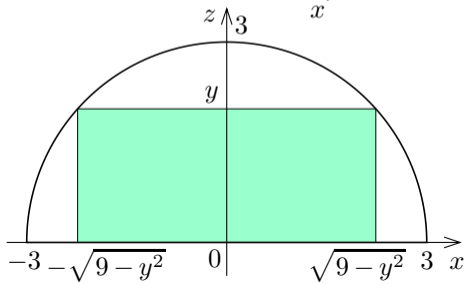
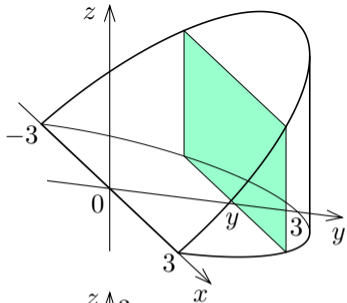
$0 \leq y \leq 3$  である実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属し  $y$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分の形は辺の長さが  $2\sqrt{9-y^2}$  と  $y$  である長方形で囲まれる領域なので、その面積  $S(y)$  は

$$S(y) = 2\sqrt{9-y^2}y = 2y\sqrt{9-y^2} .$$

変数  $t$  を  $t = 9 - y^2$  とおく.

$\frac{dt}{dy} = -2y$  なので  $2y dy = -dt$  .

$y = 0$  のとき  $t = 9$  ,  $y = 3$  のとき  $t = 0$  .



$0 \leq y \leq 3$  である実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属し  $y$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分の形は辺の長さが  $2\sqrt{9-y^2}$  と  $y$  である長方形で囲まれる領域なので、その面積  $S(y)$  は

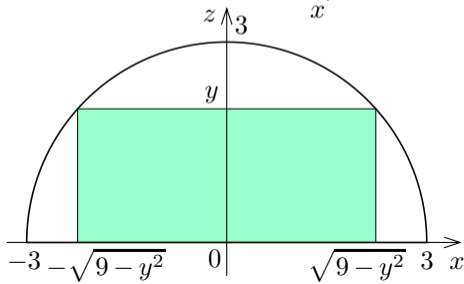
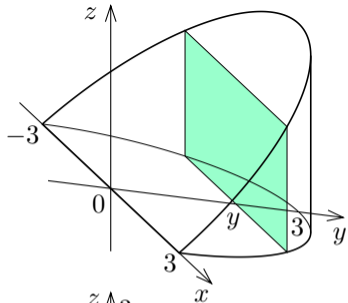
$$S(y) = 2\sqrt{9-y^2}y = 2y\sqrt{9-y^2} .$$

変数  $t$  を  $t = 9 - y^2$  とおく.

$$\frac{dt}{dy} = -2y \text{ なので } 2y dy = -dt .$$

$y = 0$  のとき  $t = 9$  ,  $y = 3$  のとき  $t = 0$  . 立体領域  $V$  の体積は

$$\begin{aligned} \int_0^3 2y\sqrt{9-y^2} dy &= \int_9^0 t^{\frac{1}{2}} (-dt) \\ &= -\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_9^0 \\ &= 18 . \end{aligned}$$



故に立体領域  $V$  の体積は 18 である.

終

問8.拡充2.1  $xyz$  座標空間において不等式  $x^2 + y^2 \leq 3$  で表される円柱体と不等式  $0 \leq z \leq 2x$  とで表される領域の共通部分  $V$  の体積を求めよ.

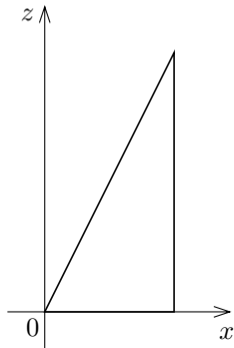
不等式  $x^2 + y^2 \leq 3$  より,  $y^2 - 3 \leq -x^2 \leq 0$ ,  $(y - \sqrt{3})(y + \sqrt{3}) \leq 0$ ,  
 $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$ . この範囲の実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属し  $y$  軸に  
 垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x^2 + y^2 \leq 3$   
 を  $x$  について解く:  $x^2 - (3 - y^2) \leq 0$ ,

$(x - \sqrt{3 - y^2})(x + \sqrt{3 - y^2}) \leq 0$ .  $-\sqrt{3 - y^2} \leq x \leq \sqrt{3 - y^2}$ . この不等式と不等式  $0 \leq 2x$  つまり  $0 \leq x$  とより  $0 \leq x \leq \sqrt{3 - y^2}$ . この不等式

と不等式  $0 \leq z \leq 2x$  との連立は,  $xz$  座標平面において, 直角を挟む2辺の長さが  $\sqrt{3 - y^2}$  と  $2\sqrt{3 - y^2}$  である直角三角形で囲まれる領域を表

す; その面積  $S(y)$  は

$$S(y) =$$



問8.拡充2.1  $xyz$  座標空間において不等式  $x^2 + y^2 \leq 3$  で表される円柱体と不等式  $0 \leq z \leq 2x$  とで表される領域の共通部分  $V$  の体積を求めよ.

不等式  $x^2 + y^2 \leq 3$  より,  $y^2 - 3 \leq -x^2 \leq 0$ ,  $(y + \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) \leq 0$ ,  $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$ . この範囲の実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属し  $y$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x^2 + y^2 \leq 3$  を  $x$  について解く:  $x^2 - (3 - y^2) \leq 0$ ,

$$(x - \sqrt{3 - y^2})(x + \sqrt{3 - y^2}) \leq 0.$$

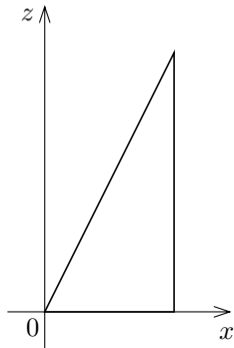
$x \leq \sqrt{3 - y^2}$ . この不等式と不等式  $0 \leq 2x$  つまり  $0 \leq x$  とより  $0 \leq x \leq \sqrt{3 - y^2}$ . この不等式

と不等式  $0 \leq z \leq 2x$  との連立は,  $xz$  座標平面において, 直角を挟む2辺の長さが

である直角三角形で囲まれる領域を表

す; その面積  $S(y)$  は

$$S(y) =$$



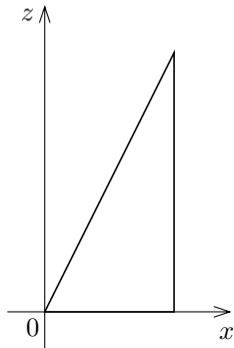
**問8.拡充2.1**  $xyz$  座標空間において不等式  $x^2 + y^2 \leq 3$  で表される円柱体と不等式  $0 \leq z \leq 2x$  とで表される領域の共通部分  $V$  の体積を求めよ.

不等式  $x^2 + y^2 \leq 3$  より,  $y^2 - 3 \leq -x^2 \leq 0$ ,  $(y + \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) \leq 0$ ,  $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$ . この範囲の実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属し  $y$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x^2 + y^2 \leq 3$

を  $x$  について解く:  $x^2 - (3 - y^2) \leq 0$ ,  
 $(x + \sqrt{3 - y^2})(x - \sqrt{3 - y^2}) \leq 0$ .  $-\sqrt{3 - y^2} \leq x \leq \sqrt{3 - y^2}$ . この不等式と不等式  $0 \leq 2x$  つまり  $0 \leq x$  とより  $0 \leq x \leq \sqrt{3 - y^2}$ . この不等式と不等式  $0 \leq z \leq 2x$  との連立は,  $xz$  座標平面において, 直角を挟む2辺の長さが

と  
 である直角三角形で囲まれる領域を表す; その面積  $S(y)$  は

$$S(y) =$$

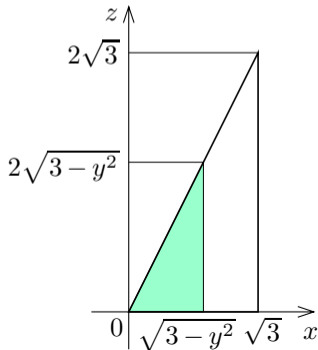


問8.拡充2.1  $xyz$  座標空間において不等式  $x^2 + y^2 \leq 3$  で表される円柱体と不等式  $0 \leq z \leq 2x$  とで表される領域の共通部分  $V$  の体積を求めよ.

不等式  $x^2 + y^2 \leq 3$  より,  $y^2 - 3 \leq -x^2 \leq 0$ ,  $(y + \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) \leq 0$ ,  $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$ . この範囲の実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属し  $y$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x^2 + y^2 \leq 3$  を  $x$  について解く:  $x^2 - (3 - y^2) \leq 0$ ,

$(x + \sqrt{3 - y^2})(x - \sqrt{3 - y^2}) \leq 0$ .  $-\sqrt{3 - y^2} \leq x \leq \sqrt{3 - y^2}$ . この不等式と不等式  $0 \leq 2x$  つまり  $0 \leq x$  とより  $0 \leq x \leq \sqrt{3 - y^2}$ . この不等式と不等式  $0 \leq z \leq 2x$  との連立は,  $xz$  座標平面において, 直角を挟む2辺の長さが  $\sqrt{3 - y^2}$  と  $2\sqrt{3 - y^2}$  である直角三角形で囲まれる領域を表す; その面積  $S(y)$  は

$$S(y) = \frac{1}{2} \sqrt{3 - y^2} 2\sqrt{3 - y^2} = 3 - y^2.$$



立体領域  $V$  の体積は,

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} S(y) dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3 - y^2) dy = \left[ 3y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} .$$

□終

**例**  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める.

**例**  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める.  $x$  の値に対して不等式  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  つまり  $y^2 + z^2 \leq 5 - x$  が  $yz$  座標平面において表す領域を考えるために,  $x$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分を考える.

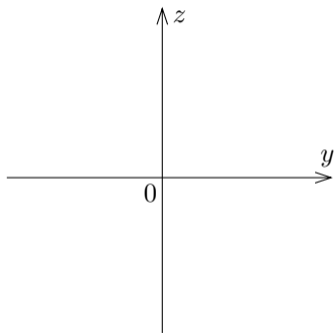
例  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める. 不等式  $x \geq 0$  と  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  とより  $0 \leq x \leq x + y^2 + z^2 \leq 5$ .

**例**  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める. 不等式  $x \geq 0$  と  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  とより  $0 \leq x \leq x + y^2 + z^2 \leq 5$ .  $0 \leq x \leq 5$  である実数  $x$  を座標とする  $x$  軸の点が属し  $x$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える.

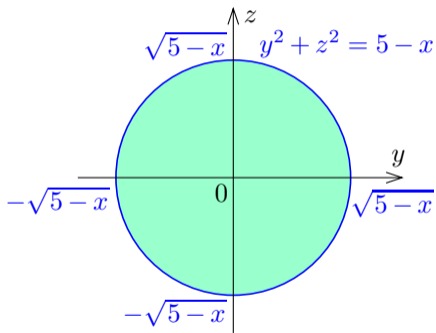
**例**  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める. 不等式  $x \geq 0$  と  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  とより  $0 \leq x \leq x + y^2 + z^2 \leq 5$ .  $0 \leq x \leq 5$  である実数  $x$  を座標とする  $x$  軸の点が属し  $x$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  より  $y^2 + z^2 \leq 5 - x$ .

例  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める. 不等式  $x \geq 0$  と  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  とより  $0 \leq x \leq x + y^2 + z^2 \leq 5$ .  $0 \leq x \leq 5$  である実数  $x$  を座標とする  $x$  軸の点が属し  $x$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  より  $y^2 + z^2 \leq 5 - x$ . この不等式は,  $yz$  座標平面において,

で囲まれる領域を表す.

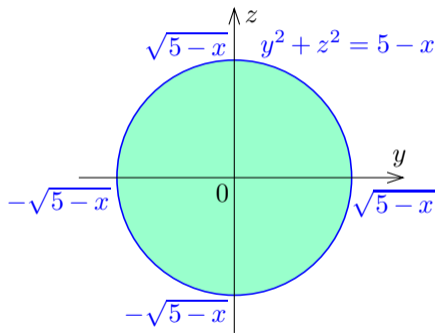


例  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める. 不等式  $x \geq 0$  と  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  とより  $0 \leq x \leq x + y^2 + z^2 \leq 5$ .  $0 \leq x \leq 5$  である実数  $x$  を座標とする  $x$  軸の点が属し  $x$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  より  $y^2 + z^2 \leq 5 - x$ . この不等式は,  $yz$  座標平面において, 半径が  $\sqrt{5 - x}$  である円で囲まれる領域を表す.



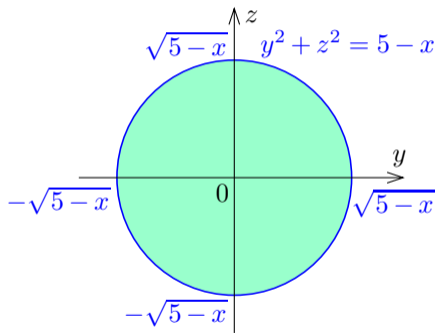
**例**  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める. 不等式  $x \geq 0$  と  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  とより  $0 \leq x \leq x + y^2 + z^2 \leq 5$ .  $0 \leq x \leq 5$  である実数  $x$  を座標とする  $x$  軸の点が属し  $x$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  より  $y^2 + z^2 \leq 5 - x$ . この不等式は,  $yz$  座標平面において, 半径が  $\sqrt{5 - x}$  である円で囲まれる領域を表す. その面積  $S(x)$  は

$$S(x) = \pi\sqrt{5-x}^2 = \pi(5-x).$$



例  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める. 不等式  $x \geq 0$  と  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  とより  $0 \leq x \leq x + y^2 + z^2 \leq 5$ .  $0 \leq x \leq 5$  である実数  $x$  を座標とする  $x$  軸の

点が属し  $x$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  より  $y^2 + z^2 \leq 5 - x$ . この不等式は,  $yz$  座標平面において, 半径が  $\sqrt{5 - x}$  である円で囲まれる領域を表す. その面積  $S(x)$  は



$$S(x) = \pi\sqrt{5-x}^2 = \pi(5-x).$$

立体領域  $V$  の体積は

$$\int_0^5 S(x) dx = \int_0^5 \pi(5-x) dx = \pi \left[ 5x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^5 = \pi \left( 25 - \frac{25}{2} \right) = \frac{25\pi}{2}. \quad \boxed{\text{終}}$$

**問8.拡充2.2**  $xyz$  座標空間において不等式  $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2$  で表される立体領域  $V$  の体積を求めよ.

不等式  $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2$  より  $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2 \leq \quad$ .  $0 \leq y \leq \quad$  である実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属す  $y$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $y \leq 6 - x^2 - z^2$  より  $x^2 + z^2 \leq \quad$ ; この不等式は,  $xz$  座標平面において,  $\quad$  で囲まれる領域を表す; その面積  $S(y)$  は

$$S(y) =$$

立体領域  $V$  の体積は

**問8.拡充2.2**  $xyz$  座標空間において不等式  $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2$  で表される立体領域  $V$  の体積を求めよ.

不等式  $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2$  より  $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2 \leq 6$ .  $0 \leq y \leq 6$  である実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属す  $y$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $y \leq 6 - x^2 - z^2$  より  $x^2 + z^2 \leq 6 - y$ ; この不等式は,  $xz$  座標平面において,  $\sqrt{6-y}$  の円で囲まれる領域を表す; その面積  $S(y)$  は

$$S(y) =$$

立体領域  $V$  の体積は

**問8.拡充2.2**  $xyz$  座標空間において不等式  $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2$  で表される立体領域  $V$  の体積を求めよ.

不等式  $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2$  より  $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2 \leq 6$ .  $0 \leq y \leq 6$  である実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属す  $y$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $y \leq 6 - x^2 - z^2$  より  $x^2 + z^2 \leq 6 - y$ ; この不等式は,  $xz$  座標平面において, 半径が  $\sqrt{6 - y}$  である円で囲まれる領域を表す; その面積  $S(y)$  は

$$S(y) = \pi \sqrt{6 - y}^2 = \pi(6 - y).$$

立体領域  $V$  の体積は

**問8.拡充2.2**  $xyz$  座標空間において不等式  $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2$  で表される立体領域  $V$  の体積を求めよ.

不等式  $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2$  より  $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2 \leq 6$ .  $0 \leq y \leq 6$  である実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属す  $y$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $y \leq 6 - x^2 - z^2$  より  $x^2 + z^2 \leq 6 - y$ ; この不等式は,  $xz$  座標平面において, 半径が  $\sqrt{6 - y}$  である円で囲まれる領域を表す; その面積  $S(y)$  は

$$S(y) = \pi \sqrt{6 - y}^2 = \pi(6 - y).$$

立体領域  $V$  の体積は

$$\int_0^6 S(y) dy = \int_0^6 \pi(6 - y) dy = \pi \left[ 6y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^6 = \pi \left( 36 - \frac{36}{2} \right) = 18\pi. \quad \boxed{\text{終}}$$

**例**  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $0 \leq y \leq 3$  と  $z \geq 0$  と  $x + z \leq y^2$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める.

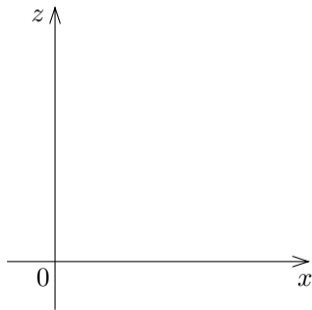
**例**  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $0 \leq y \leq 3$  と  $z \geq 0$  と  $x + z \leq y^2$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める。対して不等式  $x + z \leq y^2$  が  $xz$  座標平面において表す領域を考えるために、 $y$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分を考える。

**例**  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $0 \leq y \leq 3$  と  $z \geq 0$  と  $x + z \leq y^2$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める.  $0 \leq y \leq 3$  である実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属す  $y$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える.

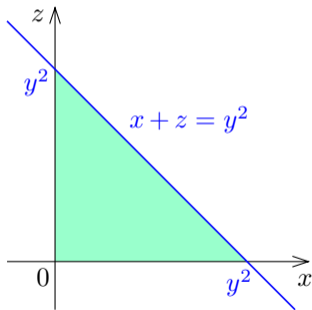
例  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $0 \leq y \leq 3$  と  $z \geq 0$  と  $x + z \leq y^2$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める.  $0 \leq y \leq 3$  である実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属す  $y$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x \geq 0$  と  $z \geq 0$  と  $x + z \leq y^2$  との連立は,  $xz$  座標平面において,

で囲まれる領

域を表す.

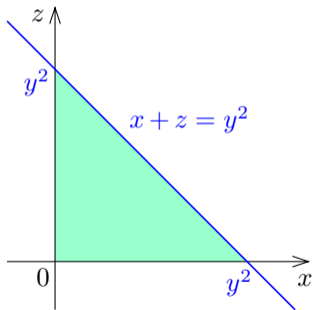


例  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $0 \leq y \leq 3$  と  $z \geq 0$  と  $x + z \leq y^2$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める.  $0 \leq y \leq 3$  である実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属す  $y$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x \geq 0$  と  $z \geq 0$  と  $x + z \leq y^2$  との連立は,  $xz$  座標平面において, 直角を挟む 2 辺の長さが  $y^2$  である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す.



例  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $0 \leq y \leq 3$  と  $z \geq 0$  と  $x + z \leq y^2$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める.  $0 \leq y \leq 3$  である実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属す  $y$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x \geq 0$  と  $z \geq 0$  と  $x + z \leq y^2$  との連立は,  $xz$  座標平面において, 直角を挟む 2 辺の長さが  $y^2$  である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す. その面積  $S(x)$  は

$$S(y) = \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot y^2 = \frac{y^4}{2} .$$

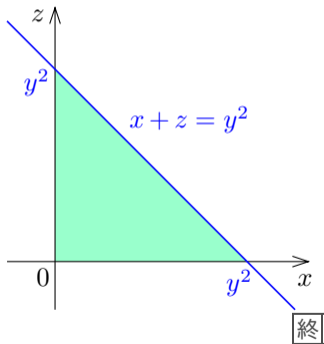


例  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $0 \leq y \leq 3$  と  $z \geq 0$  と  $x + z \leq y^2$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める.  $0 \leq y \leq 3$  である実数  $y$  を座標とする  $y$  軸の点が属す  $y$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x \geq 0$  と  $z \geq 0$  と  $x + z \leq y^2$  との連立は,  $xz$  座標平面において, 直角を挟む 2 辺の長さが  $y^2$  である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す. その面積  $S(x)$  は

$$S(y) = \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot y^2 = \frac{y^4}{2} .$$

立体領域  $V$  の体積は

$$\int_0^3 S(y) dy = \int_0^3 \frac{y^4}{2} dy = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{5} y^5 \right]_0^3 = \frac{243}{10} .$$



**問8.拡充2.3**  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $y \geq 0$  と  $0 \leq z \leq 3$  と  $x + y \leq e^z$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求めよ.  $e$  は自然対数の底である.

$0 \leq z \leq 3$  である実数  $z$  を座標とする  $z$  軸の点が属す  $z$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x \geq 0$  と  $y \geq 0$  と  $x + y \leq e^z$  との連立は,  $xy$  座標平面において,

で囲まれる領域を表す. その面積  $S(z)$  は

$$S(z) =$$

立体領域  $V$  の体積は

**問8.拡充2.3**  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $y \geq 0$  と  $0 \leq z \leq 3$  と  $x + y \leq e^z$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求めよ.  $e$  は自然対数の底である.

$0 \leq z \leq 3$  である実数  $z$  を座標とする  $z$  軸の点が属す  $z$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x \geq 0$  と  $y \geq 0$  と  $x + y \leq e^z$  との連立は,  $xy$  座標平面において, 直角を挟む2辺の長さが  $e^z$  である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す. その面積  $S(z)$  は

$$S(z) = \frac{1}{2}(e^z)^2 = \frac{1}{2}e^{2z} .$$

立体領域  $V$  の体積は

**問8.拡充2.3**  $xyz$  座標空間において不等式  $x \geq 0$  と  $y \geq 0$  と  $0 \leq z \leq 3$  と  $x + y \leq e^z$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求めよ.  $e$  は自然対数の底である.

$0 \leq z \leq 3$  である実数  $z$  を座標とする  $z$  軸の点が属す  $z$  軸に垂直な平面と立体領域  $V$  との共通部分の形を考える. 不等式  $x \geq 0$  と  $y \geq 0$  と  $x + y \leq e^z$  との連立は,  $xy$  座標平面において, 直角を挟む2辺の長さが  $e^z$  である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す. その面積  $S(z)$  は

$$S(z) = \frac{1}{2}(e^z)^2 = \frac{1}{2}e^{2z} .$$

立体領域  $V$  の体積は

$$\int_0^3 S(z) dz = \int_0^3 \frac{1}{2} e^{2z} dz = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} e^{2z} \right]_0^3 = \frac{e^6 - 1}{4} .$$

終