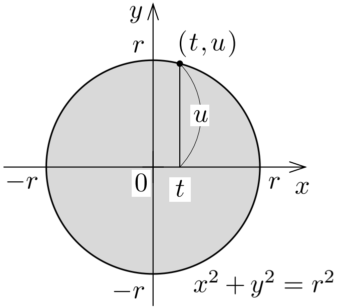
8. 補遺 1

球体の体積と表面積

まず，正の定数 r に対して，半径 r の球体の体積を求める．xy 座標平面において不等式 $x^2+y^2 \leq r^2$ で表される円（内部を含む）を 3 次元空間において x 軸を中心に回転させてできる立体 V が半径 r の球体になる．区間 $[-r,r]$ の各実数 t に対して，x 軸上の実数 t を含み x 軸に垂直な平面で球体 V を切断してできる断面は円である；その半径を u とおくと，xy 座標平面において点 (t,u) は方程式 $x^2+y^2=r^2$ で表される円に属すので $t^2+u^2=r^2$ ，よって $u^2=r^2-t^2$ なので，従って断面の面積 $S(t)$ は



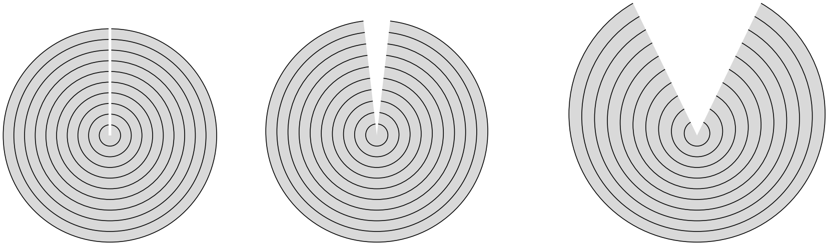
$$S(t) = \pi u^2 = \pi(r^2-t^2) \ .$$

故に球体 V の体積は

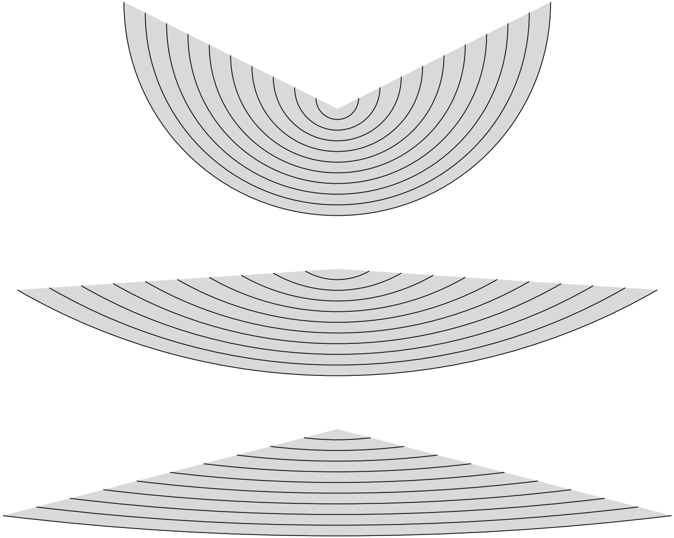
$$\int_{-r}^{r} S(t)\,dt = \int_{-r}^{r} \pi(r^2-t^2)dt = \pi\left[r^2 t - \frac{1}{3}t^3\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3 \ .$$

こうして次のことが分かる：半径 r の球体の体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$ である．

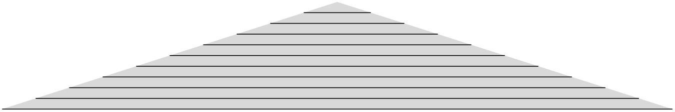
球体の体積と表面積との関係を考える前に，円（で囲まれる領域）の面積と外周（円周）の長さについて考える．半径 r の円の中に多数の同心円を描き，円の中心から外周まで切り込みを入れて，その切り込みから，元の同心円の長さが変わらないようにして円を切り開いていく．



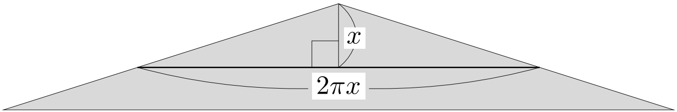
元の同心円の長さが変わらないようにして更に伸ばしていく．



元の同心円が線分になるまで伸ばすと，次のような三角形ができる.



この三角形は，元の同心円を長さが変わらないように伸ばした線分の集まりで，それらの間隔も元の同心円のときと同じである．なのでこの三角形の面積は元の円の面積と同じであると考える．この三角形の中で，底面と平行で頂上の点との間の距離が x の線分の長さは，元の半径 x の同心円の円周の長さ $2\pi x$ である．



この線分の長さ $2\pi x$ を半径 x で定積分すると三角形の面積つまり元の円の面積になる．

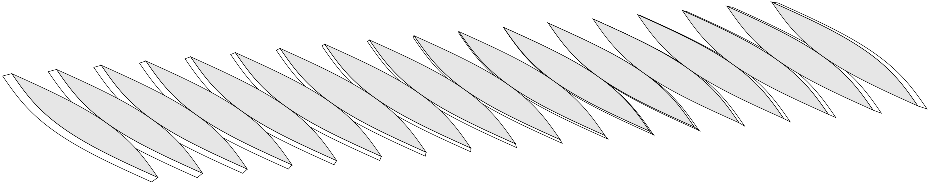
$$\int_0^r 2\pi x\,dx = 2\pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^r = \pi r^2 \quad .$$

つまり，同心円の円周の長さを半径で定積分すると円の面積になる．なので逆に円の面積を半径で微分すると円周の長さになる．

　このように，半径 r の円の面積と外周（円周）の長さとの関係について次のことが成り立つ．

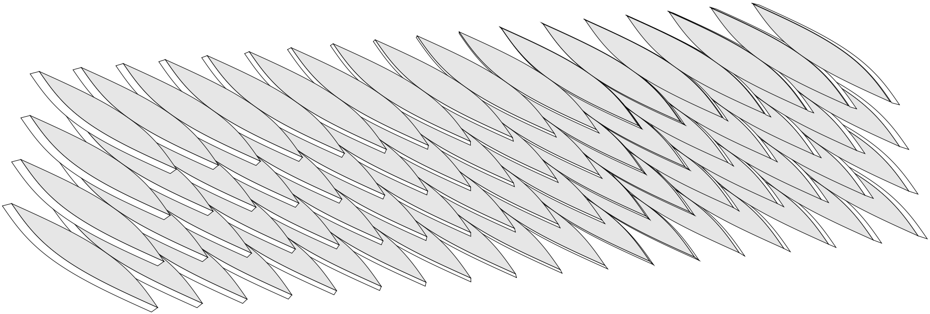
$$\begin{array}{ccc} \text{半径 } r \text{ の円周の長さ} & \xrightarrow{\quad r \text{ で積分（積分定数は } 0 \text{）} \quad} & \text{半径 } r \text{ の円の面積} \\ 2\pi r & \xleftarrow[\quad r \text{ で微分} \quad]{} & \pi r^2 \end{array}$$

半径 r の球体を考える．球体に切り込みを入れて表面を薄く均等な厚さではがしたとする．うまくはがすと次の鱗片がつながったような薄く均等な厚さの立体ができる．

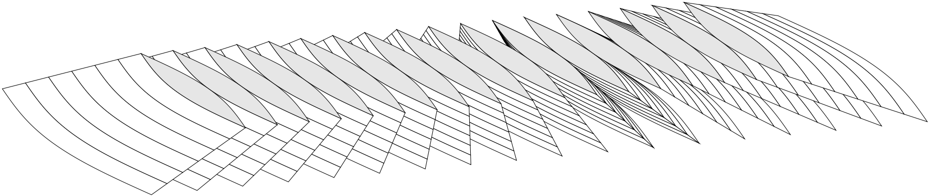


この一つ一つの鱗片はほとんど平らである．なので鱗片がつながったような薄い立体の底面はほぼ平面的な立体になる．

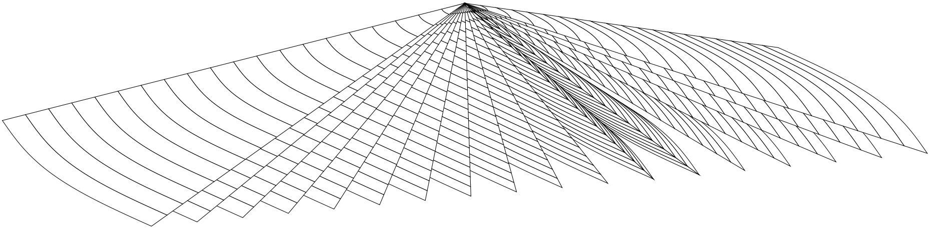
残った球体の表面を薄く均等な厚さではがし，更に残った球体の表面を薄く均等な厚さではがし，ということを繰り返する．そして最初に球体の表面をはがして作った形を縮小したような形を作る．



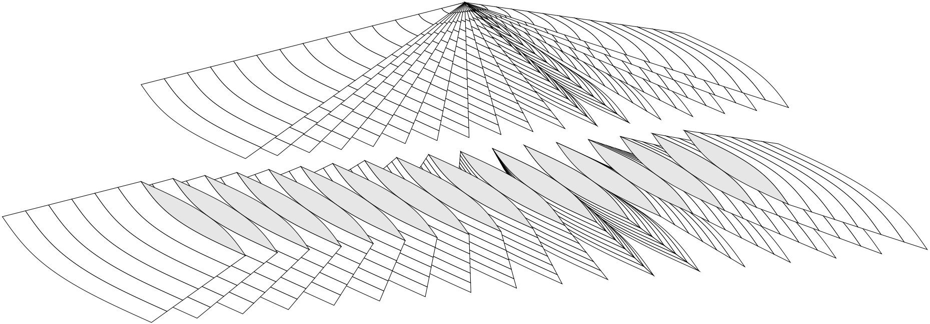
このように球体の表面を薄く均等な厚さではがしてできた薄い立体を重ねていくと次のような立体ができる.



表面をはがしていくにつれて球体は小さくなる．球体の半径が 0 にまで表面をはがして重ね続けると次のような錐体ができる．



　この錐体の高さは元の球体の半径 r である．$0 \leq t \leq r$ である実数 t に対して，この錐体を，底面に平行で頂点からの距離が t である平面（錐体の頂点と底面との間にあるもの）で切断してできる切断面（次の図の網がけの部分）の面積は，半径 r の球面の面積 $S(t)$ である．



従ってこの錐体の体積は $\int_0^r S(t)\,dt$ となる．この錐体は元の球体から表面を薄く剥いだ立体を重ねたものなので，錐体の体積は元の球の体積 $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ と同じである．

$$\int_0^r S(t)\,dt = \frac{4}{3}\pi r^3 \ .$$

つまり，r を変数として，半径 r の球の表面積を積分すると半径 r の球体の体積 $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ になる；従って逆に半径 r の球体の体積 $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ を微分すると半径 r の球の表面積 $S(r)$ になる：

$$S(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2 \ .$$

このように，半径 r の球の体積と表面積との関係について次のことが成り立つ．

$$\begin{array}{ccc} \text{半径 } r \text{ の球の表面積} & \xrightarrow{\;r\text{ で積分（積分定数は } 0\text{ ）}\;} & \text{半径 } r \text{ の球体の体積} \\ 4\pi r^2 & \xleftarrow[\;r\text{ で微分}\;]{\qquad\qquad\qquad\qquad} & \dfrac{4}{3}\pi r^3 \end{array}$$