8.4　関数のグラフの長さ

定積分の定義を復習する.

[定義] 実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$S_n =$$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．

$\lim_{n\to\infty} \delta_n =$ 　　であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，

　　　　　　を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：

$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　　　　．

[定義] 実数 a と b とについて $a \le b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$S_n =$$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．

$\lim_{n\to\infty} \delta_n =$ 　　であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，

　　　　　　を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：

$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　　　　．

[定義] 実数 a と b とについて $a \le b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}\ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \delta_n =$ 　　であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，

　　　　　　　を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：

$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　　　　　．

[定義] 実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

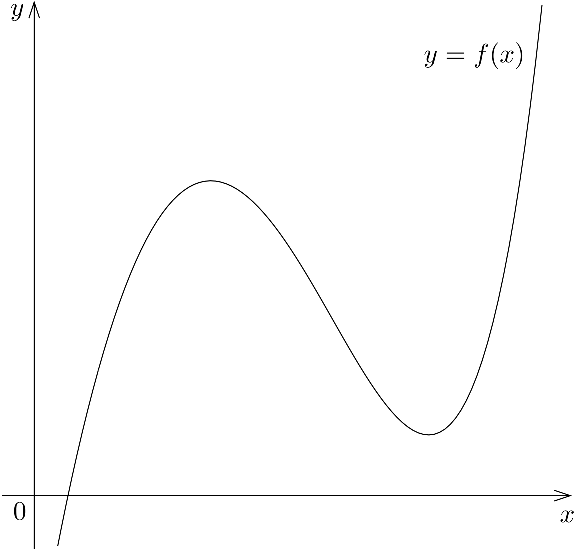
$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} \ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

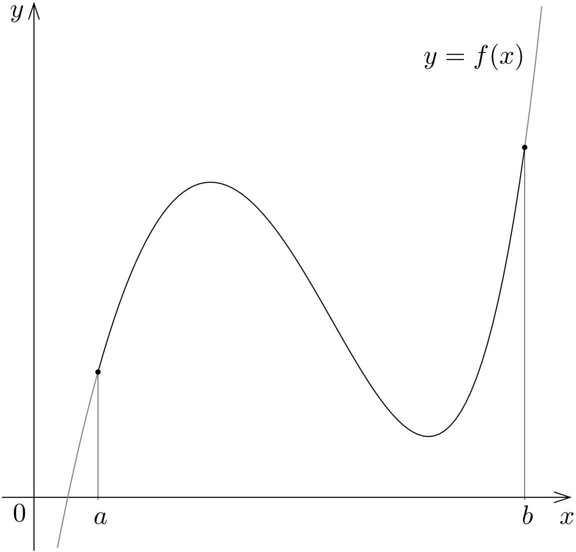
と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，f のリーマン和 S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$ ．

関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 f は b から a まで積分可能であるといい，f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x)\,dx$ を次のように定義する：$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ ．

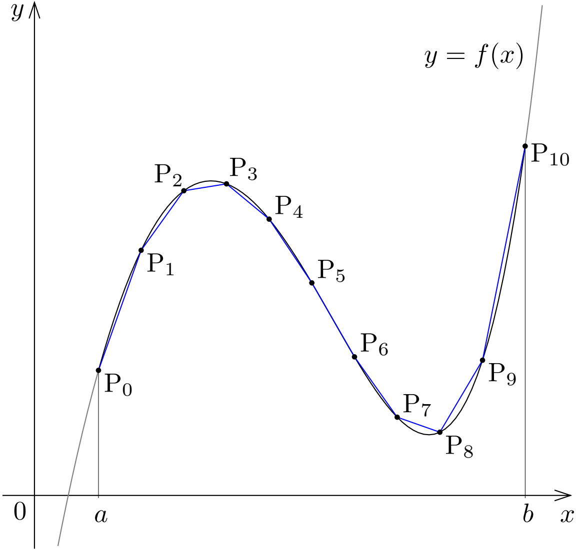
実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の導関数 f' は区間 $[a,b]$ においで連続であるとする．



実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の導関数 f' は区間 $[a,b]$ において連続であるとする．xy 座標平面において不等式 $a \leq x \leq b$ と方程式 $y = f(x)$ との連立で表される曲線の長さを考える．



例えば右図のように曲線の左端から右端まで左から順に曲線に属す 11 点 P_0, $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4, \mathrm{P}_5, \mathrm{P}_6, \mathrm{P}_7$, $\mathrm{P}_8, \mathrm{P}_9, \mathrm{P}_{10}$ をとり，左から順に結んでできる折れ線の長さで曲線の長さを近似する．



正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとる.

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとる.

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする.

正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとる．

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする．

関数 $y = f(x)$ のグラフの点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}, \mathrm{P}_n$ を次のように定める：

$$\mathrm{P}_0 = \big(x_0, f(x_0)\big)\ ,\ \mathrm{P}_1 = \big(x_1, f(x_1)\big)\ ,\ \mathrm{P}_2 = \big(x_2, f(x_2)\big)\ ,\ \mathrm{P}_3 = \big(x_3, f(x_3)\big)\ ,\ \cdots\ ,$$

$$\mathrm{P}_{n-1} = \big(x_{n-1}, f(x_{n-1})\big)\ ,\quad \mathrm{P}_n = \big(x_n, f(x_n)\big)\ .$$

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとる.

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする.

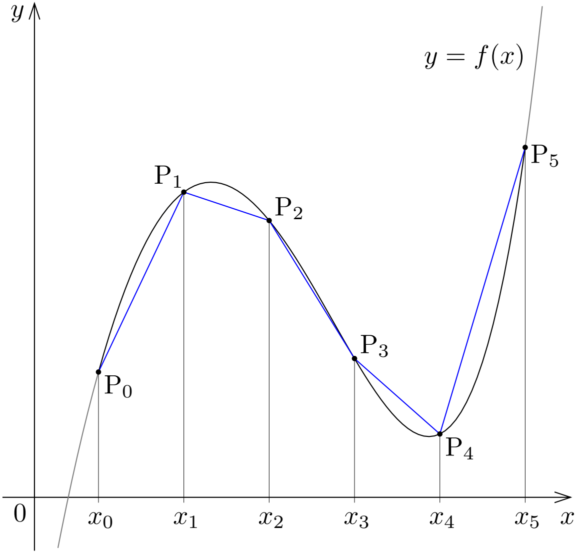
関数 $y = f(x)$ のグラフの点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}, \mathrm{P}_n$ を次のように定める:

$$\mathrm{P}_0 = \bigl(x_0, f(x_0)\bigr)\ ,\ \mathrm{P}_1 = \bigl(x_1, f(x_1)\bigr)\ ,\ \mathrm{P}_2 = \bigl(x_2, f(x_2)\bigr)\ ,\ \mathrm{P}_3 = \bigl(x_3, f(x_3)\bigr)\ ,\ \cdots\ ,$$
$$\mathrm{P}_{n-1} = \bigl(x_{n-1}, f(x_{n-1})\bigr)\ ,\quad \mathrm{P}_n = \bigl(x_n, f(x_n)\bigr)\ .$$

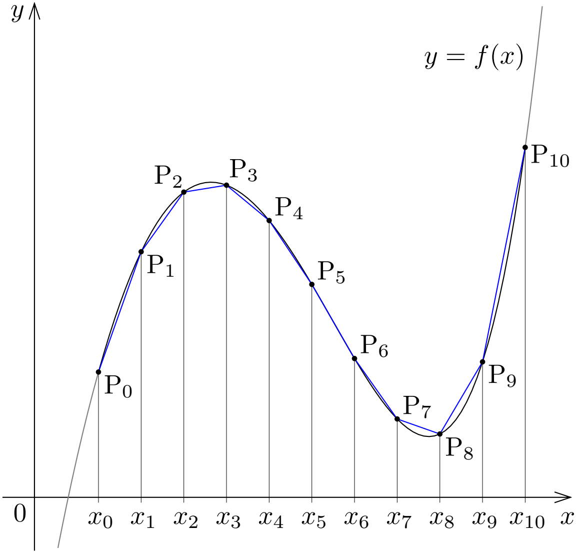
これらの点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}, \mathrm{P}_n$ を順に結ぶ折れ線の長さを L_n とおく:

$$L_n = \overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} + \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} + \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} + \cdots + \overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} \ .$$

$n=5$ のとき，$y=f(x)$ のグラフの 6 点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4, \mathrm{P}_5$ を順に結ぶ折れ線は例えば右図のようになる．



$n=10$ のとき，$y=f(x)$ のグラフの 11 点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4, \mathrm{P}_5, \mathrm{P}_6, \mathrm{P}_7, \mathrm{P}_8, \mathrm{P}_9, \mathrm{P}_{10}$ を順に結ぶ折れ線は例えば右図のようになる.



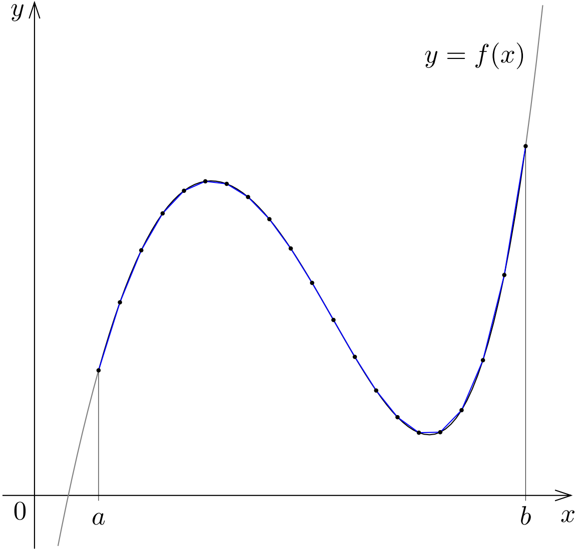
$n=20$ のとき，

$y=f(x)$ のグラフの 21 点

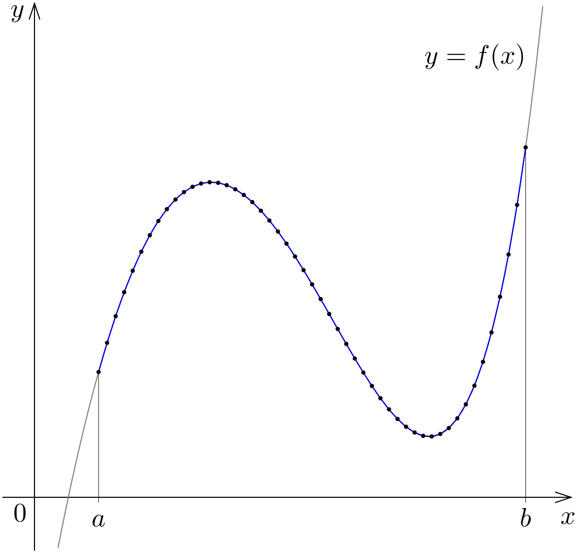
$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots, \mathrm{P}_{19}, \mathrm{P}_{20}$

を順に結ぶ折れ線は例えば

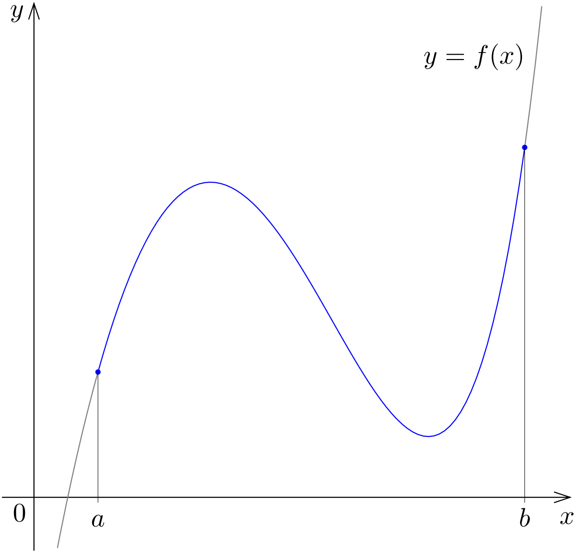
右図のようになる．



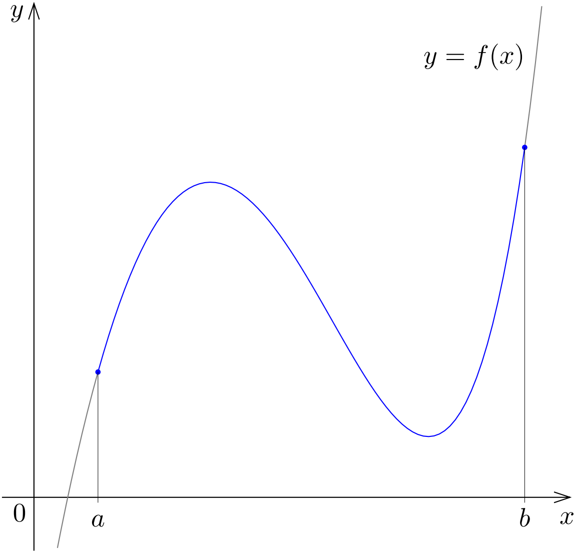
$n=50$ のとき，
$y=f(x)$ のグラフの 51 点
$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots, \mathrm{P}_{49}, \mathrm{P}_{50}$
を順に結ぶ折れ線は例えば
右図のようになる.



　折れ線を構成する線分の数 n を限りなく大きくして構成する線分を限りなく短くしていくと，折れ線の長さ $L_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ は曲線の長さに限りなく近づく．



折れ線を構成する線分の数 n を限りなく大きくして構成する線分を限りなく短くしていくと，折れ線の長さ $L_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ は曲線の長さに限りなく近づく．よって，曲線の長さは折れ線の長さ L_n の $n \to \infty$ のときの極限値 $\lim_{n\to\infty} L_n$ である．



$L_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ を考える．$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，$\mathrm{P}_{k-1} = \big(x_{k-1}, f(x_{k-1})\big)$，$\mathrm{P}_k = \big(x_k, f(x_k)\big)$ なので，線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さ $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ は

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} \ .$$

$L_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ を考える． $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して， $\mathrm{P}_{k-1} = \bigl(x_{k-1}, f(x_{k-1})\bigr)$ ， $\mathrm{P}_k = \bigl(x_k, f(x_k)\bigr)$ なので，線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さ $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ は

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} \ .$$

$x_{k-1} < x_k$ なので，平均値の定理により，次のような実数 ξ_k がある：

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k \ .$$

[平均値の定理] 実数 p と q とについて $p < q$ で，関数 f が区間 $[p, q]$ において微分可能であるならば，次のような実数 r がある：

$$f(q) - f(p) = f'(r)(q - p) \quad \text{かつ} \quad p < r < q \ .$$

$L_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ を考える． $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して， $\mathrm{P}_{k-1} = \bigl(x_{k-1}, f(x_{k-1})\bigr)$ ， $\mathrm{P}_k = \bigl(x_k, f(x_k)\bigr)$ なので，線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さ $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ は

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} \ .$$

$x_{k-1} < x_k$ なので，平均値の定理により，次のような実数 ξ_k がある：

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k \ .$$

また， $x_{k-1} < x_k$ より $x_k - x_{k-1} > 0$ なので $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2} = x_k - x_{k-1}$ ．

$L_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ を考える． $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して， $\mathrm{P}_{k-1} = \big(x_{k-1}, f(x_{k-1})\big)$ ， $\mathrm{P}_k = \big(x_k, f(x_k)\big)$ なので，線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さ $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ は

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} \ .$$

$x_{k-1} < x_k$ なので，平均値の定理により，次のような実数 ξ_k がある：

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k \ .$$

また， $x_{k-1} < x_k$ より $x_k - x_{k-1} > 0$ なので $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2} = x_k - x_{k-1}$ ．

$$\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}^2}$$

$L_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ を考える． $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して， $\mathrm{P}_{k-1} = \bigl(x_{k-1}, f(x_{k-1})\bigr)$ ， $\mathrm{P}_k = \bigl(x_k, f(x_k)\bigr)$ なので，線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さ $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ は

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} \ .$$

$x_{k-1} < x_k$ なので，平均値の定理により，次のような実数 ξ_k がある：

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k \ .$$

また， $x_{k-1} < x_k$ より $x_k - x_{k-1} > 0$ なので $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2} = x_k - x_{k-1}$ ．

$$\begin{aligned}\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}^2} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2\{1 + f'(\xi_k)^2\}}\end{aligned}$$

$L_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ を考える． $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して， $\mathrm{P}_{k-1} = \big(x_{k-1}, f(x_{k-1})\big)$ ， $\mathrm{P}_k = \big(x_k, f(x_k)\big)$ なので，線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さ $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ は

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} \ .$$

$x_{k-1} < x_k$ なので，平均値の定理により，次のような実数 ξ_k がある：

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k \ .$$

また， $x_{k-1} < x_k$ より $x_k - x_{k-1} > 0$ なので $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2} = x_k - x_{k-1}$ ．

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}^2} \\
&= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2\{1 + f'(\xi_k)^2\}} \\
&= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2}\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}
\end{aligned}$$

$L_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ を考える． $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して， $\mathrm{P}_{k-1} = \big(x_{k-1}, f(x_{k-1})\big)$ ， $\mathrm{P}_k = \big(x_k, f(x_k)\big)$ なので，線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さ $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ は

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} \ .$$

$x_{k-1} < x_k$ なので，平均値の定理により，次のような実数 ξ_k がある：

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k \ .$$

また， $x_{k-1} < x_k$ より $x_k - x_{k-1} > 0$ なので $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2} = x_k - x_{k-1}$ ．

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}^2} \\
&= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 \{1 + f'(\xi_k)^2\}} \\
&= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2}\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} \\
&= (x_k - x_{k-1})\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} \ .
\end{aligned}$$

$L_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ を考える． $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して， $\mathrm{P}_{k-1} = \big(x_{k-1}, f(x_{k-1})\big)$ ， $\mathrm{P}_k = \big(x_k, f(x_k)\big)$ なので，線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さ $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ は

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} \ .$$

$x_{k-1} < x_k$ なので，平均値の定理により，次のような実数 ξ_k がある：

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k \ .$$

また， $x_{k-1} < x_k$ より $x_k - x_{k-1} > 0$ なので $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2} = x_k - x_{k-1}$ ．

$$\begin{aligned}\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}^2} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2\{1 + f'(\xi_k)^2\}} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2}\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} \\ &= (x_k - x_{k-1})\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} \ .\end{aligned}$$

よって

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1}) \ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1}) \ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1}) \ .$$

従って，折れ線の長さ L_n は

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1}) \right\} \ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1}) \ .$$

従って，折れ線の長さ L_n は

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1}) \right\} \ .$$

関数 F を $F(x) = \sqrt{1+f'(x)^2}$ とおく．このとき，

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1}) \ .$$

従って，折れ線の長さ L_n は

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1}) \right\} \ .$$

関数 F を $F(x)=\sqrt{1+f'(x)^2}$ とおく．このとき，

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \{ F(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \} \ .$$

$a=x_0<\xi_1<x_1<\xi_2<x_2<\xi_3<x_3<\cdots<x_{n-1}<\xi_n<x_n=b$ なので，この等式の右辺は関数 F のリーマン和である．

折れ線の長さ $L_n = \sum_{k=1}^{n} \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ のリーマン和である.

折れ線の長さ $L_n = \sum_{k=1}^{n} \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ のリーマン和である．関数 f の導関数 $f'(x)$ は連続なので，関数 $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ も連続である．従って関数 F は a から b まで積分可能である．

折れ線の長さ $L_n = \sum_{k=1}^{n} \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $F(x) = \sqrt{1+f'(x)^2}$ のリーマン和である．関数 f の導関数 $f'(x)$ は連続なので，関数 $F(x) = \sqrt{1+f'(x)^2}$ も連続である．従って関数 F は a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ なので， $n \to \infty$ のとき L_n は F の定積分 $\int_a^b F(x)\,dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \ .$$

折れ線の長さ $L_n = \sum_{k=1}^{n} \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ のリーマン和である．関数 f の導関数 $f'(x)$ は連続なので，関数 $F(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ も連続である．従って関数 F は a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ なので， $n \to \infty$ のとき L_n は F の定積分 $\int_a^b F(x)\,dx$ に収束する：

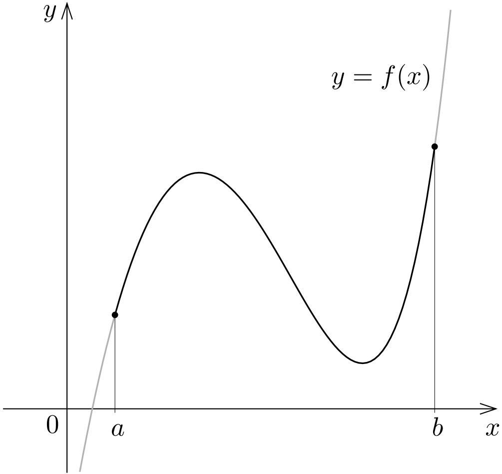
$$\lim_{n\to\infty} L_n = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx \ .$$

　方程式 $y = f(x)$ と不等式 $a \leq x \leq b$ とで表される曲線の長さは，折れ線の長さ $L_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} L_n$ なので，定積分 $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$ である．

[定理]　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の導関数 f' は区間 $[a, b]$ において連続であるとする．xy 座標平面において不等式 $a \leq x \leq b$ と方程式 $y = f(x)$ との連立で表される曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

である．



$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x}^3$ との連立で表される曲線 C の長さを求める.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x}^3$ との連立で表される曲線 C の長さを求める．関数 $y = 2\sqrt{x}^3$ について，

曲線 C の長さは $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x}^3$ との連立で表される曲線 C の長さを求める．関数 $y = 2\sqrt{x}^3$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}^3\right) = 2 \cdot \frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} \ ,$$

曲線 C の長さは $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x}^3$ との連立で表される曲線 C の長さを求める．関数 $y = 2\sqrt{x}^3$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}^3\right) = 2 \cdot \frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} \ ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(3\sqrt{x}\right)^2 = 9x + 1 \ .$$

曲線 C の長さは $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x}^3$ との連立で表される曲線 C の長さを求める．関数 $y = 2\sqrt{x}^3$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}^3\right) = 2 \cdot \frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} \ ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(3\sqrt{x}\right)^2 = 9x + 1 \ .$$

曲線 C の長さは $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{9x+1}\,dx$ である．

$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x}^3$ との連立で表される曲線 C の長さを求める．関数 $y = 2\sqrt{x}^3$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}^3\right) = 2 \cdot \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} \ ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(3\sqrt{x}\right)^2 = 9x + 1 \ .$$

曲線 C の長さは $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{9x+1}\, dx$ である．変数 t を $t = 9x + 1$ とおく．

$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x}^3$ との連立で表される曲線 C の長さを求める．関数 $y = 2\sqrt{x}^3$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}^3\right) = 2 \cdot \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} \ ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(3\sqrt{x}\right)^2 = 9x + 1 \ .$$

曲線 C の長さは $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{9x+1}\, dx$ である．変数 t を $t = 9x + 1$ とおく． $\dfrac{dt}{dx} = 9$ より $dx = \dfrac{1}{9}\, dt$ ．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x}^3$ との連立で表される曲線 C の長さを求める．関数 $y = 2\sqrt{x}^3$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}^3\right) = 2 \cdot \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} \ ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(3\sqrt{x}\right)^2 = 9x + 1 \ .$$

曲線 C の長さは $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{9x+1}\, dx$ である．変数 t を $t = 9x + 1$ とおく． $\dfrac{dt}{dx} = 9$ より $dx = \dfrac{1}{9}\, dt$ ． $x = 0$ のとき $t = 1$ ． $x = 1$ のとき $t = 10$ ．

$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x}^3$ との連立で表される曲線 C の長さを求める．関数 $y = 2\sqrt{x}^3$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}^3\right) = 2 \cdot \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} \ ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(3\sqrt{x}\right)^2 = 9x + 1 \ .$$

曲線 C の長さは $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{9x+1}\, dx$ である．変数 t を $t = 9x + 1$ とおく． $\dfrac{dt}{dx} = 9$ より $dx = \dfrac{1}{9}\, dt$ ． $x = 0$ のとき $t = 1$ ． $x = 1$ のとき $t = 10$ ．

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{9x+1}\, dx &= \int_1^{10} \sqrt{t}\, \frac{1}{9}\, dt = \frac{1}{9} \int_1^{10} t^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{10} = \frac{2}{27}\left(\sqrt{10}^3 - \sqrt{1}^3\right) \\ &= \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x}^3$ との連立で表される曲線 C の長さを求める．関数 $y = 2\sqrt{x}^3$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}^3\right) = 2 \cdot \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} \ ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(3\sqrt{x}\right)^2 = 9x + 1 \ .$$

曲線 C の長さは $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{9x+1}\, dx$ である．変数 t を $t = 9x + 1$ とおく． $\dfrac{dt}{dx} = 9$ より $dx = \dfrac{1}{9}\, dt$ ． $x = 0$ のとき $t = 1$ ． $x = 1$ のとき $t = 10$ ．

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{9x+1}\, dx &= \int_1^{10} \sqrt{t}\, \frac{1}{9}\, dt = \frac{1}{9} \int_1^{10} t^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{10} = \frac{2}{27}\left(\sqrt{10}^3 - \sqrt{1}^3\right) \\ &= \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \ .\end{aligned}$$

曲線 C の長さは $\dfrac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$ である． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 8.4.1}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 8$ と方程式 $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{3}$ との連立で表される曲線 C の長さを求めよ.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\sqrt{x^3}}{3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = \qquad = \qquad$ なので，曲線 C の長さは

$$\int_0^8 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^8 \sqrt{1+\left(\qquad\right)^2}\,dx = \int_0^8 \sqrt{\qquad}\,dx\ .$$

変数 t を $t = \qquad$ とおく. $\dfrac{dt}{dx} = \qquad$ なので $dx = \quad dt$. $x = 0$ のとき $t = \quad$. $x = 8$ のとき $t = \quad$.

$$\int_0^8 \sqrt{\qquad}\,dx = \int \qquad dt = \Big[\qquad\Big] = \qquad .$$

曲線 C の長さは $\qquad$ である.

$\boxed{問8.4.1}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 8$ と方程式 $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{3}$ との連立で表される曲線 C の長さを求めよ.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\sqrt{x^3}}{3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ なので，曲線 C の長さは

$$\int_0^8 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^8 \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \int_0^8 \sqrt{\frac{x}{4}+1}\,dx \ .$$

変数 t を $t =$ 　　　　とおく. $\dfrac{dt}{dx} =$ 　　なので $dx =$ 　dt . $x = 0$ のとき $t =$ 　. $x = 8$ のとき $t =$ 　.

$$\int_0^8 \sqrt{\qquad}\,dx = \int \qquad dt = \Big[\qquad \Big] = \qquad\qquad .$$

曲線 C の長さは　　　　　　である.

$\boxed{\text{問}8.4.1}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 8$ と方程式 $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{3}$ との連立で表される曲線 C の長さを求めよ.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\sqrt{x^3}}{3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ なので，曲線 C の長さは

$$\int_0^8 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_0^8 \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2}dx = \int_0^8 \sqrt{\frac{x}{4}+1}dx \ .$$

変数 t を $t = \dfrac{x}{4}+1$ とおく. $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{4}$ なので $dx = 4\,dt$. $x = 0$ のとき $t = 1$. $x = 8$ のとき $t = 3$.

$$\int_0^8 \sqrt{\frac{x}{4}+1}dx = 4\int_1^3 t^{\frac{1}{2}}\,dt = 4\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 = 8\sqrt{3} - \frac{8}{3} \ .$$

曲線 C の長さは $8\sqrt{3} - \dfrac{8}{3}$ である. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $2 \leq x \leq 3$ と方程式 $y = \sqrt{16 - x^2}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $2 \leq x \leq 3$ と方程式 $y=\sqrt{16-x^2}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める． $-4<x<4$ の範囲で，関数 $y=\sqrt{16-x^2}$ について，

曲線 C の長さは

$$\int_2^3 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$\boxed{\text{例}}$　xy 座標平面において不等式 $2 \leq x \leq 3$ と方程式 $y = \sqrt{16 - x^2}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める．$-4 < x < 4$ の範囲で，関数 $y = \sqrt{16 - x^2}$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{16 - x^2} = \frac{d}{dx}(16 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(16 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} \ ,$$

曲線 C の長さは

$$\int_2^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $2 \leq x \leq 3$ と方程式 $y=\sqrt{16-x^2}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める． $-4<x<4$ の範囲で，関数 $y=\sqrt{16-x^2}$ について，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\sqrt{16-x^2}=\frac{d}{dx}(16-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(16-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\ ,$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(-\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\right)^2=1+\frac{x^2}{16-x^2}=\frac{16-x^2+x^2}{16-x^2}=\frac{16}{16-x^2}\ ,$$

曲線 C の長さは

$$\int_2^3\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $2 \leq x \leq 3$ と方程式 $y = \sqrt{16 - x^2}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める． $-4 < x < 4$ の範囲で，関数 $y = \sqrt{16 - x^2}$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{16 - x^2} = \frac{d}{dx}(16 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(16 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} \ ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{16 - x^2} = \frac{16 - x^2 + x^2}{16 - x^2} = \frac{16}{16 - x^2} \ ,$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{16 - x^2}} = \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}} \ .$$

曲線 C の長さは

$$\int_2^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_2^3 \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $2 \leq x \leq 3$ と方程式 $y = \sqrt{16-x^2}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める． $-4 < x < 4$ の範囲で，関数 $y = \sqrt{16-x^2}$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{16-x^2} = \frac{d}{dx}(16-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(16-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}} \ ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{16-x^2} = \frac{16-x^2+x^2}{16-x^2} = \frac{16}{16-x^2} \ ,$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{16-x^2}} = \frac{4}{\sqrt{16-x^2}} \ .$$

曲線 C の長さは

$$\int_2^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_2^3 \frac{4}{\sqrt{16-x^2}}\, dx = 4\left[\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_2^3 = 4\left(\sin^{-1}\frac{3}{4} - \sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$$

$$= 4\sin^{-1}\frac{3}{4} - \frac{2\pi}{3} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問8.4.2}$ xy 座標平面において不等式 $\sqrt{8} \leq x \leq 3$ と方程式 $y = \sqrt{18 - x^2}$ との連立で表される曲線 C の長さを求めよ.

$-\sqrt{18} < x < \sqrt{18}$ の範囲で，関数 $y = \sqrt{18 - x^2}$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{18 - x^2} = \qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \Bigg(\qquad\qquad\Bigg)^2 = \qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\qquad\quad} = \qquad\qquad .$$

曲線 C の長さは

$$\int_{\sqrt{8}}^{3} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

$\boxed{\text{問}8.4.2}$ xy 座標平面において不等式 $\sqrt{8} \leq x \leq 3$ と方程式 $y = \sqrt{18 - x^2}$ との連立で表される曲線 C の長さを求めよ．

$-\sqrt{18} < x < \sqrt{18}$ の範囲で，関数 $y = \sqrt{18 - x^2}$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{18 - x^2} = \frac{d}{dx}(18 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(18 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{18 - x^2}} \ ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{18 - x^2}}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{18 - x^2} = \frac{18 - x^2 + x^2}{18 - x^2} = \frac{18}{18 - x^2} \ ,$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{18 - x^2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{18 - x^2}} \ .$$

曲線 C の長さは

$$\int_{\sqrt{8}}^{3} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx =$$

$$.$$

$\boxed{問 8.4.2}$ xy 座標平面において不等式 $\sqrt{8} \le x \le 3$ と方程式 $y = \sqrt{18 - x^2}$ との連立で表される曲線 C の長さを求めよ.

$-\sqrt{18} < x < \sqrt{18}$ の範囲で，関数 $y = \sqrt{18 - x^2}$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{18 - x^2} = \frac{d}{dx}(18 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(18 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{18 - x^2}} \ ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{18 - x^2}}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{18 - x^2} = \frac{18 - x^2 + x^2}{18 - x^2} = \frac{18}{18 - x^2} \ ,$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{18 - x^2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{18 - x^2}} \ .$$

曲線 C の長さは

$$\int_{\sqrt{8}}^{3} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{\sqrt{8}}^{3} \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{18 - x^2}}\, dx = \sqrt{18}\left[\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{18}}\right]_{\sqrt{8}}^{3}$$

$$= \sqrt{18}\left(\frac{\pi}{4} - \sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \ .$$

$\boxed{終}$