

8.3 立体図形の体積

定積分の定義を復習する.

[定義] 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = \quad \quad \quad = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \quad \quad \quad ,$$

$$S_n =$$

と定める. 正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n =$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば, 関数 f

は a から b まで (定) 積分可能であるといい,

を a から b までの f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す:

$$\int_a^b f(x) dx = \quad \quad \quad .$$

[定義] 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\delta_n = \quad ,$$

$$S_n =$$

と定める。正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n =$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば、関数 f

は a から b まで (定) 積分可能であるといい、

を a から b までの f の定積分といい、 $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す：

$$\int_a^b f(x) dx = \quad .$$

[定義] 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める。正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n =$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば、関数 f

は a から b まで (定) 積分可能であるといい、

を a から b までの f の定積分といい、 $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す：

$$\int_a^b f(x) dx = \quad .$$

[定義] 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める。正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば、関数 f

は a から b まで (定) 積分可能であるといい、 f のリーマン和 S_n の極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい、 $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す：

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n .$$

関数 f が a から b まで積分可能であるとき、関数 f は b から a まで積分可能であるといい、 f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x) dx$ を次のように定義する：
$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx .$$

実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含み、 f は a から b まで定積分可能であるとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとる。

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする。

実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含み、 f は a から b まで定積分可能であるとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとる。

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする。定積分の定義より、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わらない。

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき、定積分の定義より、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わらない。

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき、定積分の定義より、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わらない。そこで、 $\xi_k = x_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき、定積分の定義より、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わらない。そこで、 $\xi_k = x_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

また別に、 $\xi_k = x_{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき、定積分の定義より、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わらない。そこで、 $\xi_k = x_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

また別に、 $\xi_k = x_{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

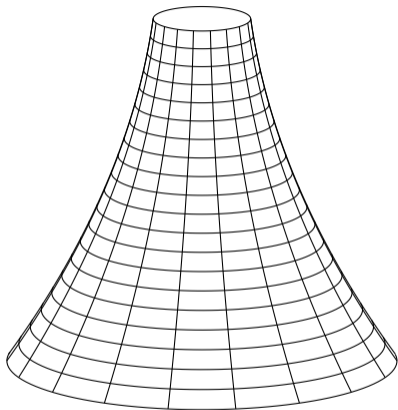
$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

f のリーマン和として $\sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}$ 或いは $\sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ をしばしばを用いる。

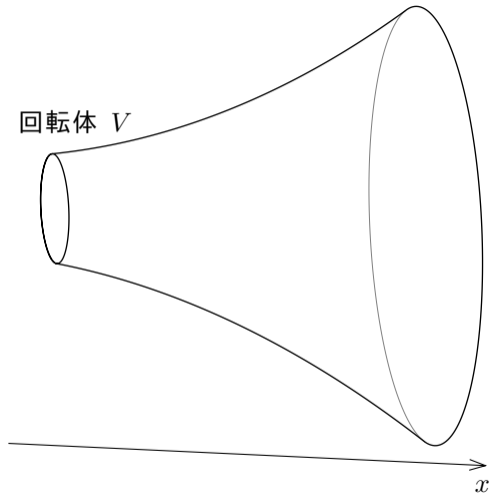
定積分を用いて立体図形の体積を求めることがある。

定積分を用いて立体図形の体積を求めることがある。

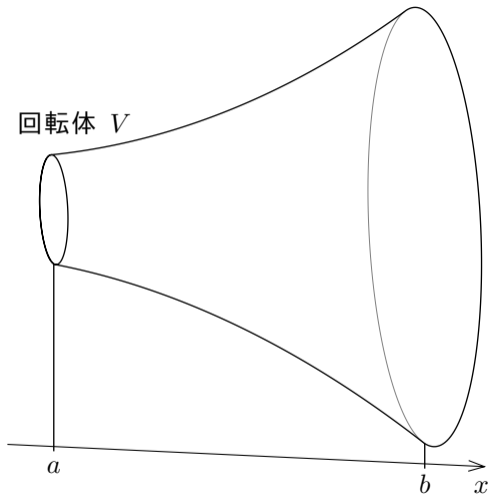
例として，右図のような立体図形 V （中も詰まっているものとして）の体積を求めることを考える．話を分かり易くするためにこの立体 V は回転体であるとする．



回転体 V に対して、右図の
ように、 V の中心軸と平行に
なるように x 座標軸を設定す
る。

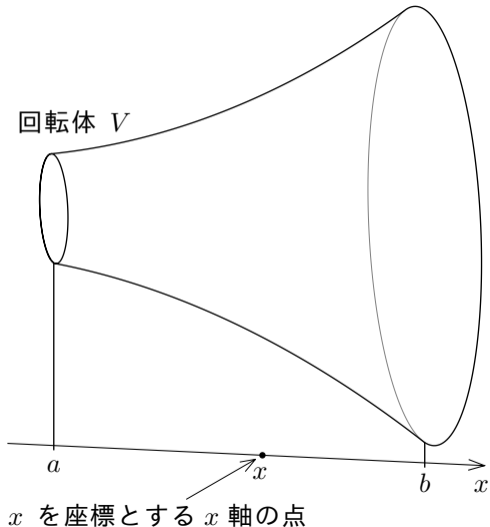


回転体 V に対して、右図の
ように、 V の中心軸と平行に
なるように x 座標軸を設定す
る．回転体 V に属す点の x
座標うち、最小値を a とお
き、最大値を b とおく．

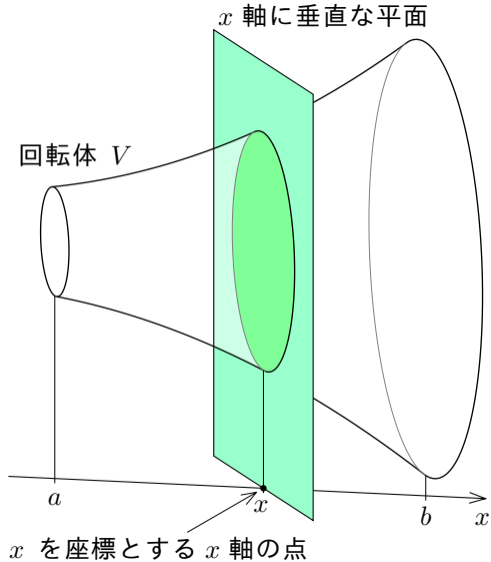


回転体 V に対して、右図の
ように、 V の中心軸と平行に
なるように x 座標軸を設定す
る。回転体 V に属す点の x
座標うち、最小値を a とお
き、最大値を b とおく。更に、
 $a \leq x \leq b$ である実数 x を座
標とする x 軸の点

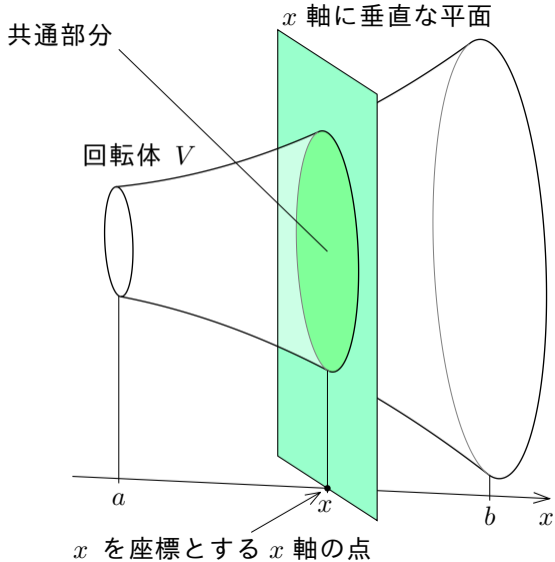
座標軸は数直線なので、各実
数 x に対して x を座標とす
る座標軸の点が唯一つ定まる。



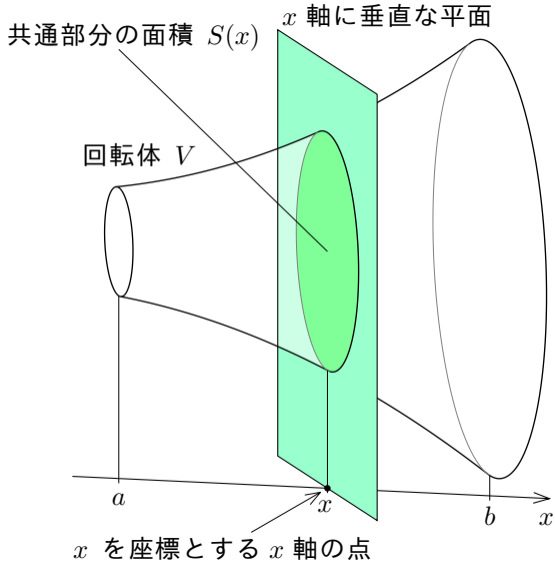
回転体 V に対して、右図の
ように、 V の中心軸と平行に
なるように x 座標軸を設定す
る．回転体 V に属す点の x
座標うち、最小値を a とお
き、最大値を b とおく．更に、
 $a \leq x \leq b$ である実数 x を座
標とする x 軸の点が属し x 軸
に垂直な平面



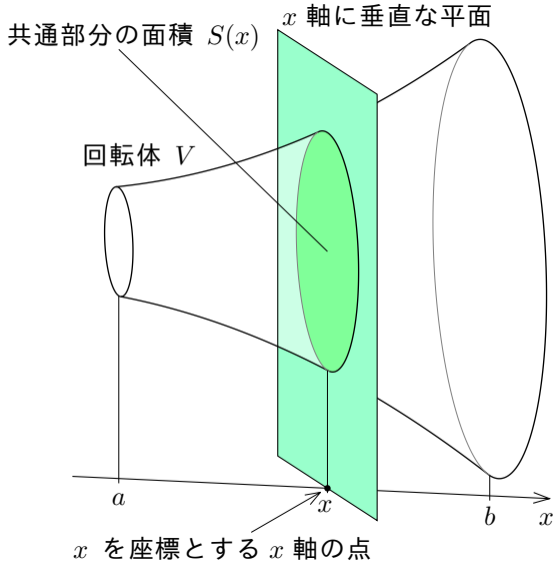
回転体 V に対して、右図の
ように、 V の中心軸と平行に
なるように x 座標軸を設定す
る．回転体 V に属す点の x
座標うち、最小値を a とお
き、最大値を b とおく．更に、
 $a \leq x \leq b$ である実数 x を座
標とする x 軸の点が属し x 軸
に垂直な平面と立体 V との
共通部分である平面図形



回転体 V に対して、右図のように、 V の中心軸と平行になるように x 座標軸を設定する。回転体 V に属す点の x 座標うち、最小値を a とおき、最大値を b とおく。更に、 $a \leq x \leq b$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分である平面図形の面積を $S(x)$ とおく。



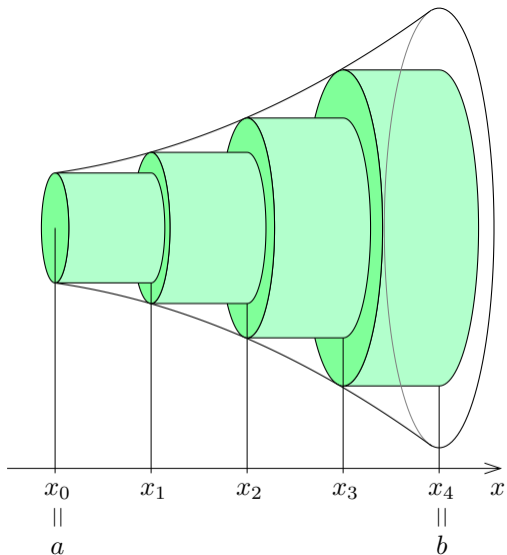
回転体 V に対して、右図のように、 V の中心軸と平行になるように x 座標軸を設定する。回転体 V に属す点の x 座標うち、最小値を a とおき、最大値を b とおく。更に、 $a \leq x \leq b$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分である平面図形の面積を $S(x)$ とおく。この関数 S は a から b まで積分可能であるとする。

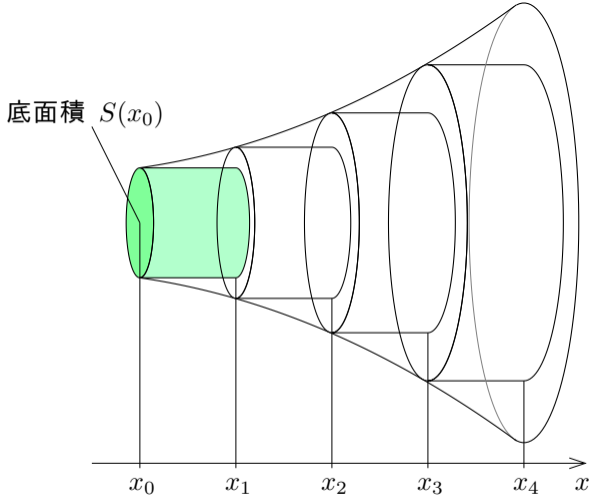


回転体 V を円盤を併せた立体で
近似する.

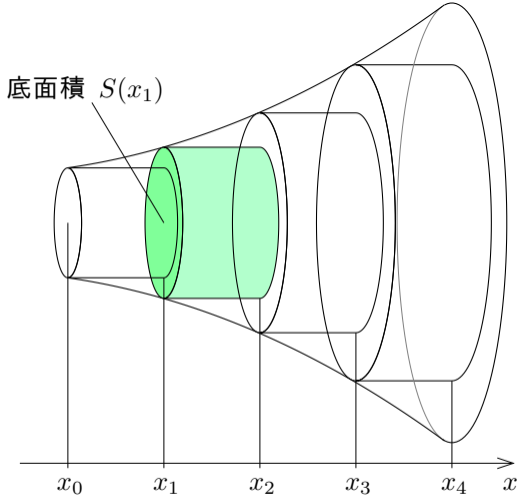
$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 = b$$

となる実数 x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 をと
る. そして, 右図のような, 薄緑色
の 4 枚の円盤を併せた立体の体積
で回転体 V の体積を近似する.

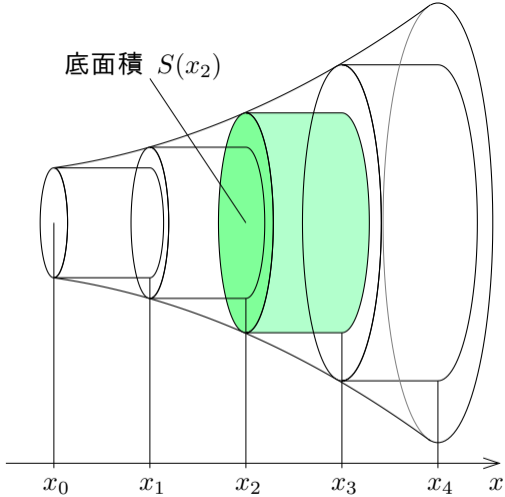




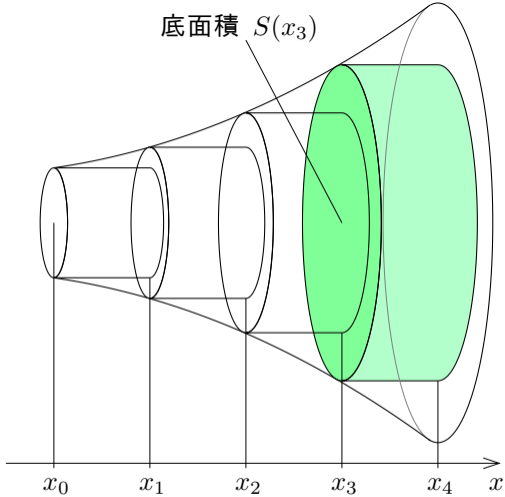
左から 1 番目の円盤（薄緑色の円盤）の体積は $S(x_0)(x_1 - x_0)$ である.



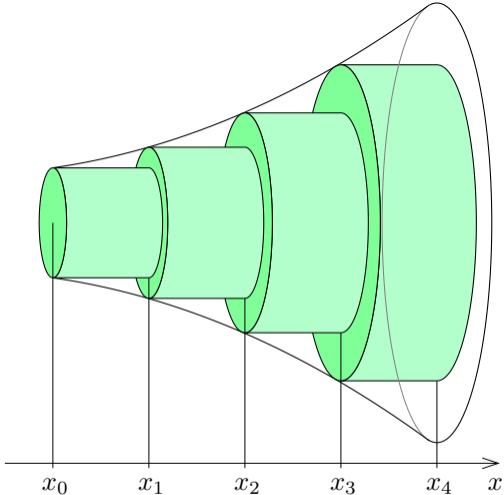
左から 2 番目の円盤（薄緑色の円盤）の体積は $S(x_1)(x_2 - x_1)$ である.



左から3番目の円盤（薄緑色の円盤）の体積は $S(x_2)(x_3 - x_2)$ である.



左から 4 番目の円盤（薄緑色の円盤）の体積は $S(x_3)(x_4 - x_3)$ である.



このような 4 枚の円盤を併せた立体の体積は

$$S(x_0)(x_1 - x_0) + S(x_1)(x_2 - x_1) + S(x_2)(x_3 - x_2) + S(x_3)(x_4 - x_3) .$$

このような 4 枚の円盤を併せた立体の体積は

$$\begin{aligned} & S(x_0)(x_1 - x_0) + S(x_1)(x_2 - x_1) + S(x_2)(x_3 - x_2) + S(x_3)(x_4 - x_3) \\ &= \sum_{k=1}^4 \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} . \end{aligned}$$

このような 4 枚の円盤を併せた立体の体積は

$$\begin{aligned} & S(x_0)(x_1 - x_0) + S(x_1)(x_2 - x_1) + S(x_2)(x_3 - x_2) + S(x_3)(x_4 - x_3) \\ &= \sum_{k=1}^4 \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} . \end{aligned}$$

これは関数 $S(x)$ のリーマン和である.

このような円盤を増やして個々の円盤を薄くしていく.

このような円盤を増やして個々の円盤を薄くしていく.

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとり, 関数 $S(x)$ のリーマン和

$$W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$$

を考える.

このような円盤を増やして個々の円盤を薄くしていく.

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとり, 関数 $S(x)$ のリーマン和

$$W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$$

を考える.

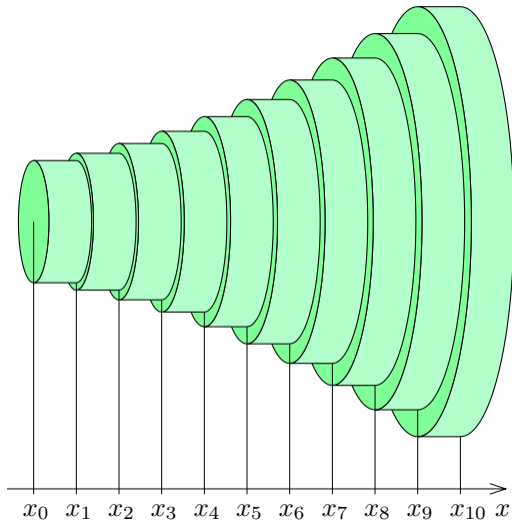
$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について, $n \rightarrow \infty$ のとき $\delta_n \rightarrow 0$ とする. つまり, $n \rightarrow \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ の間隔は 0 に限りなく近づくとする.

$n = 10$ のとき，右図の 10 枚の円板を併せた立体の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和

$$W_{10} = \sum_{k=1}^{10} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$$

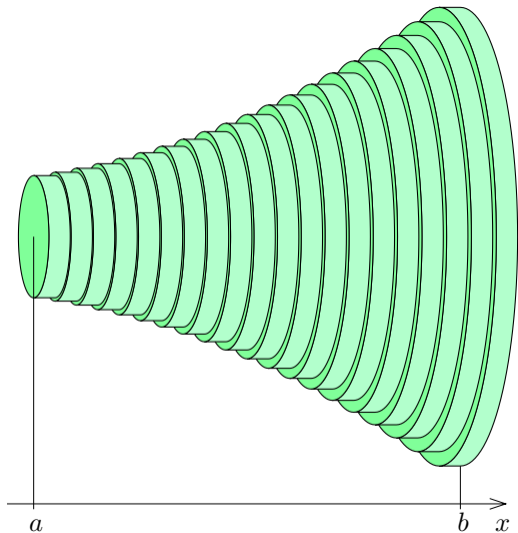
である．



$n = 20$ のとき，右図の 20 枚の円板を併せた立体の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和

$$W_{20} = \sum_{k=1}^{20} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$$

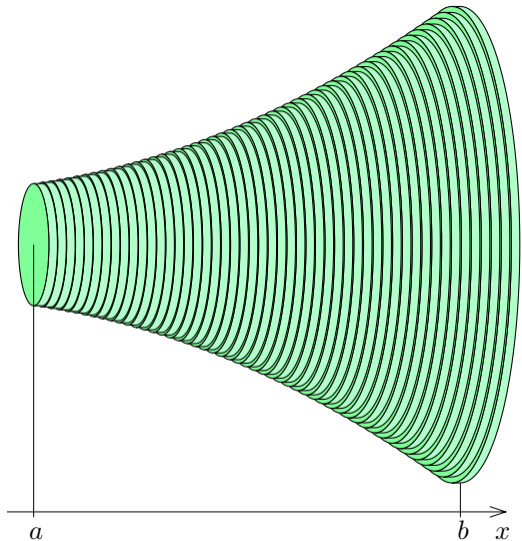
である．



$n = 50$ のとき，右図の 50 枚の円板を併せた立体の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和

$$W_{50} = \sum_{k=1}^{50} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$$

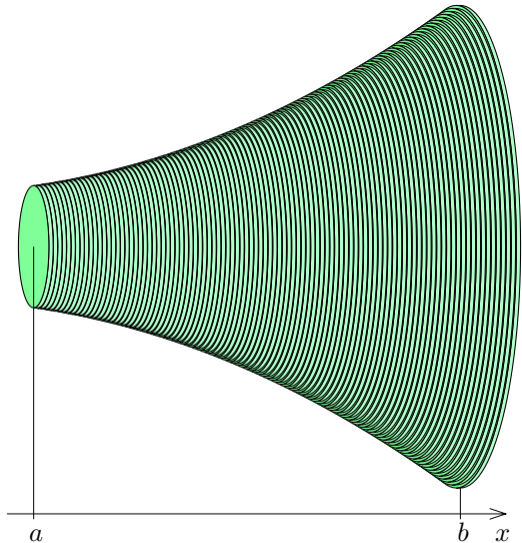
である．



$n = 100$ のとき，右図の 100 枚の円板を併せた立体の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和

$$W_{100} = \sum_{k=1}^{100} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$$

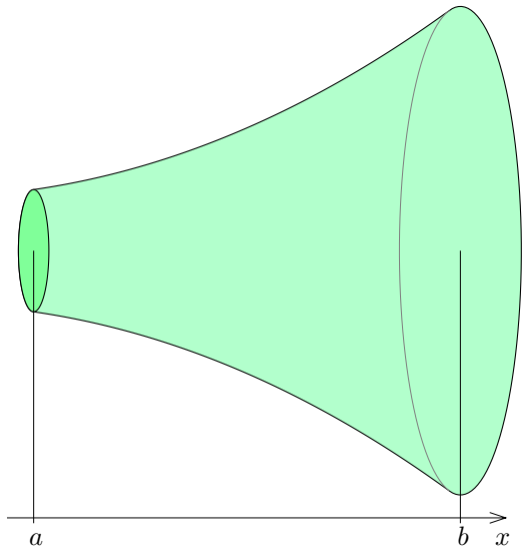
である．



このような n 枚の円盤を併せた立体の体積は、関数 $S(x)$ のリーマン和

$$W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$$

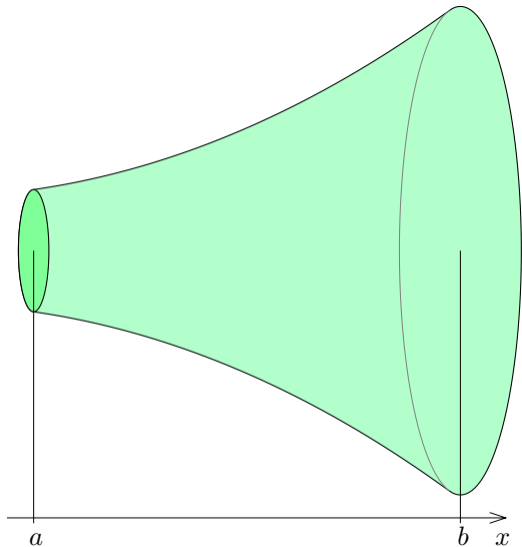
であり、円盤を限りなく増やして個々の円盤を限りなく薄くすると元の回転体の体積 V に限りなく近づく。



このような n 枚の円盤を併せた立体の体積は、関数 $S(x)$ のリーマン和

$$W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$$

であり、円盤を限りなく増やして個々の円盤を限りなく薄くすると元の回転体の体積 V に限りなく近づく。故に回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 W_n の $n \rightarrow \infty$ のときの極限值である。



回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ である.

回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ である。関数 $S(x)$ は a から b まで積分可能であり

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので、関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_a^b S(x) dx$ に収束する：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \int_a^b S(x) dx .$$

回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ である。関数 $S(x)$ は a から b まで積分可能であり

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので、関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_a^b S(x) dx$ に収束する：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \int_a^b S(x) dx .$$

故に、回転体 V の体積は関数 $S(x)$ の定積分 $\int_a^b S(x) dx$ である。

回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ である。関数 $S(x)$ は a から b まで積分可能であり

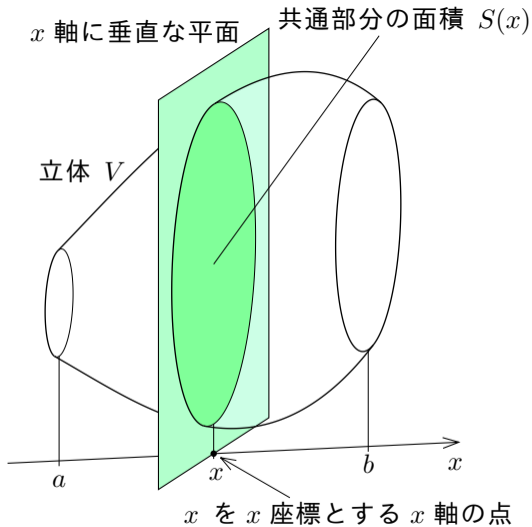
$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので、関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_a^b S(x) dx$ に収束する：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \int_a^b S(x) dx .$$

故に、回転体 V の体積は関数 $S(x)$ の定積分 $\int_a^b S(x) dx$ である。

回転体に限らず立体図形の体積について同様に論じることができる。次の定理が成り立つ。

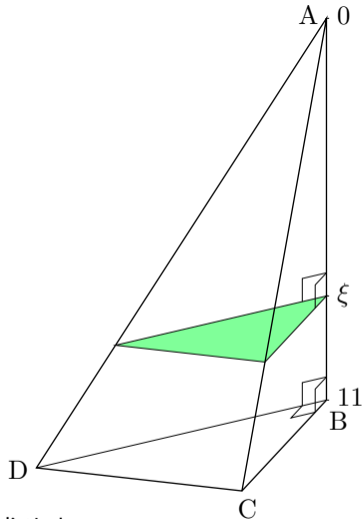
[定理 8.3] 立体図形 V に対して x 座標軸が設定されているとする。 V に属す点の x 座標のうち、最小値を a とおき、最大値を b とおく。 $a \leq x \leq b$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分である平面図形の面積を $S(x)$ とおく；この関数 S は a から b まで積分可能であるとする。このとき、立体 V の体積は $\int_a^b S(x) dx$ である。



このように、境界面の一部が曲面である図形の体積を柱体を併せた図形の体積で近似して、併せる柱体の個数を限りなく増やして近似の精度を上げていくときの極限值として元の図形の体積を求める方法を区分求積法という。

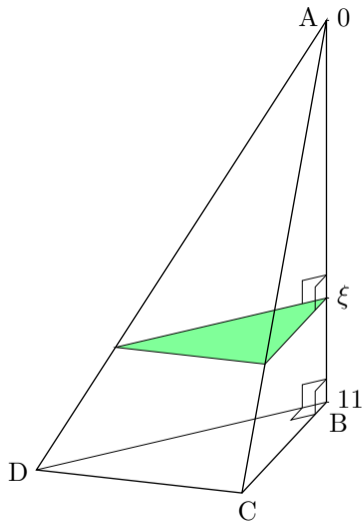
問8.3.1 空間内の4点 A, B, C, D を頂点とする三角錐 $ABCD$ において、角 ABC, ABD, CBD は直角である。 $\overline{AB} = 11$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{BD} = 8$ とする。この三角錐の体積を考える。直角三角形 BCD を底面とする。頂点 A を原点とし、頂点 A から頂点 B への向きに座標軸をとる。この座標軸上で座標が ξ の点を切片とする座標軸に垂直な平面と三角錐 $ABCD$ との共通部分（右図の明緑色の部分）と直角三角形 BCD とは相似であり、相似比は $\xi : 11$ で、面積の比は $\xi^2 : 11^2$ である。

(1) 座標が ξ の点を切片とする座標軸に垂直な平面と三角錐 $ABCD$ との共通部分の面積を求めよ。

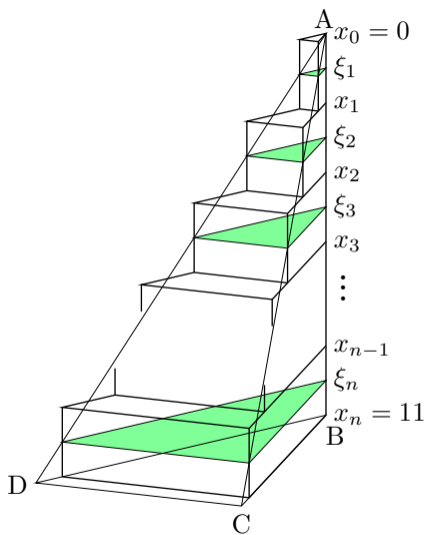


共通部分の形の面積は三角錐の底面と相似な直角三角形であり，直角を挟む2辺の長さは $\frac{5\xi}{11}$ と $\frac{8\xi}{11}$ とである；よってその面積は

$$\frac{1}{2} \times \frac{5\xi}{11} \times \frac{8\xi}{11} = \frac{20\xi^2}{11^2} .$$



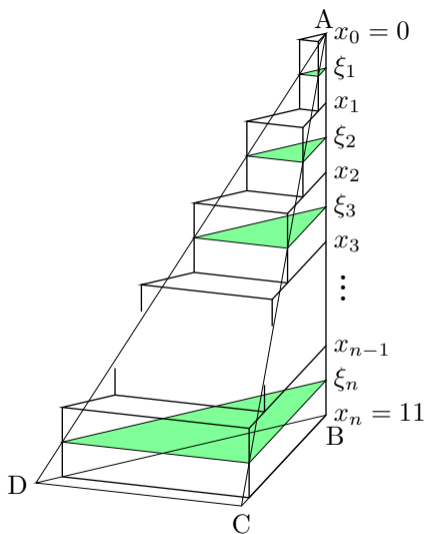
(2) 変数 n を正の自然数を表すとする。
 $0 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 11$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ に対して、右図のように三角錐 ABCD を n 個の直三角柱（側面は底面及び上面に垂直）を併せた立体で近似する：この体積 S_n を表す式を記せ。またこの式を何というか記せ。



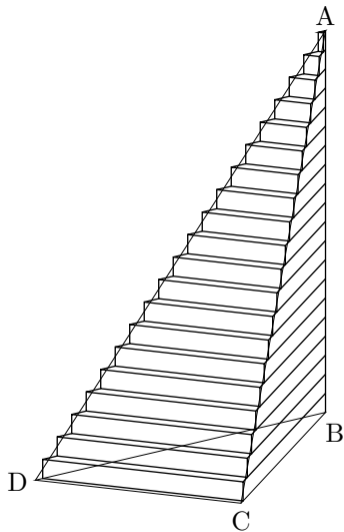
(2) 変数 n を正の自然数を表すとすする。
 $0 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 11$ である実数
 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ に対して、右図のように三角錐 ABCD を n 個の直三角柱（側面は底面及び上面に垂直）を併せた立体で近似する：この体積 S_n を表す式を記せ。
 またこの式を何というか記せ。

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{20\xi_k^2}{11^2} (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

これは関数 $\frac{20}{11^2}x^2$ のリーマン和である。



(3) $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする；つまり $n \rightarrow \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ の間隔は総て 0 に近づくとする。 $n \rightarrow \infty$ のとき薄い三角柱を併せた立体の体積 S_n は右図のように三角錐 ABCD の体積に限りなく近づく；つまり S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が三角錐 ABCD の体積である。このことを用いて、定積分によって三角錐 ABCD の体積を求めよ。



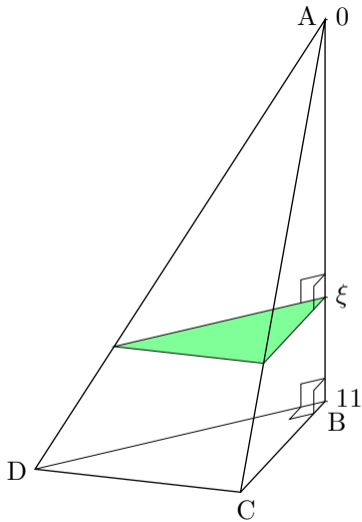
$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので、 $n \rightarrow \infty$ のと

き関数 $\frac{20}{11^2}x^2$ のリーマン和 S_n は定積

分 $\int_0^{11} \frac{20}{11^2}x^2 dx$ に収束する．三角錐

ABCD の体積は

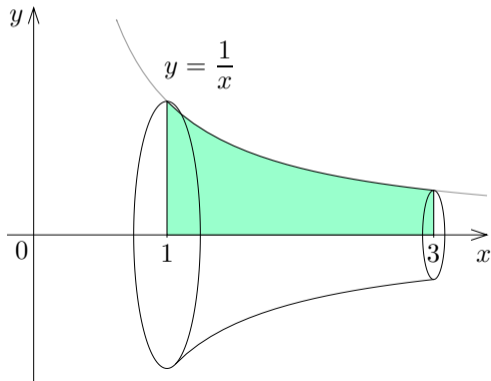
$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \int_0^{11} \frac{20}{11^2}x^2 dx \\ &= \frac{20}{11^2} \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{11} \\ &= \frac{20}{11^2} \cdot \frac{1}{3}11^3 \\ &= \frac{220}{3} .\end{aligned}$$



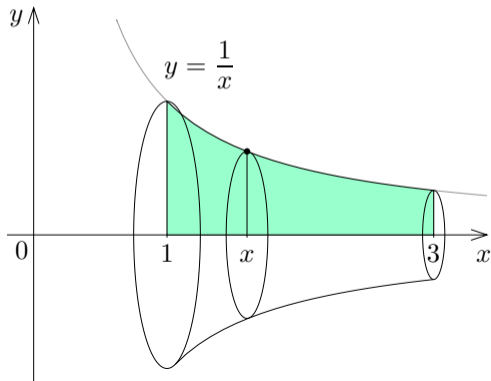
終

例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ との連立で表される領域を考える. 3次元空間においてこの領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める.

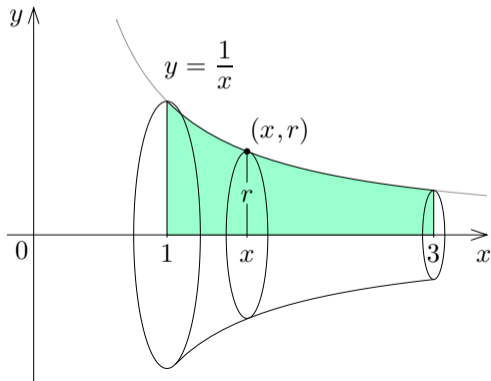
例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ との連立で表される領域を考える. 3次元空間においてこの領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める.



例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ との連立で表される領域を考える. 3次元空間においてこの領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める. $1 \leq x \leq 3$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V をとの共通部分の形は円である;

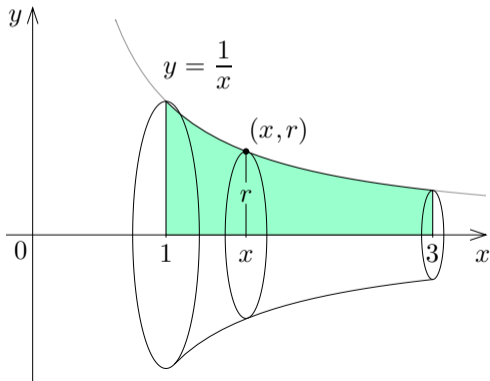


例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ との連立で表される領域を考える. 3次元空間においてこの領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める. $1 \leq x \leq 3$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V をとの共通部分の形は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面で点 (x, r) は $y = \frac{1}{x}$ のグラフに属するので, $r =$;



例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ との連立で表される領域を考える．3次元空間においてこの領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める． $1 \leq x \leq 3$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分の形は円である；その半径を r とおくと， xy 座標平面で点 (x, r) は $y = \frac{1}{x}$ のグラフに属するので， $r = \frac{1}{x}$ ；よって，共通部分の面積 $S(x)$ は

$$S(x) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{\pi}{x^2} .$$

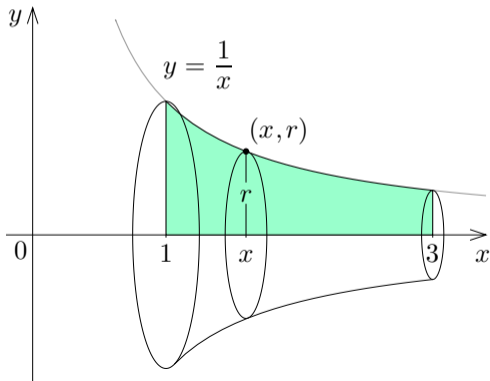


例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ との連立で表される領域を考える. 3次元空間においてこの領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める. $1 \leq x \leq 3$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分の形は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面で点 (x, r) は $y = \frac{1}{x}$ のグラフに属するので, $r = \frac{1}{x}$; よって, 共通部分の面積 $S(x)$ は

$$S(x) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{\pi}{x^2} .$$

従って, 回転体 V の体積は,

$$\int_1^3 S(x) dx = \int_1^3 \frac{\pi}{x^2} dx$$



従って、回転体 V の体積は、

$$\begin{aligned}\int_1^3 S(x) dx &= \int_1^3 \frac{\pi}{x^2} dx = \pi \int_1^3 x^{-2} dx = \pi [-x^{-1}]_1^3 = -\pi \left[\frac{1}{x} \right]_1^3 = -\pi \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} .\end{aligned}$$

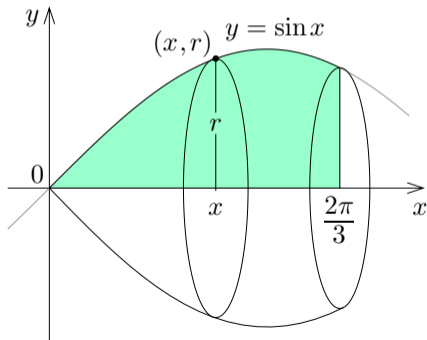
終

問8.3.2 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ と $0 \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域を考える. 3次元空間においてこの領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求めよ.

$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V をとの共通部分の形は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面で点 (x, r) は $y = \sin x$ のグラフに属するので, $r =$; よって, この共通部分の面積 $S(x)$ は

$$S(x) =$$

従って, 回転体 V の体積は,



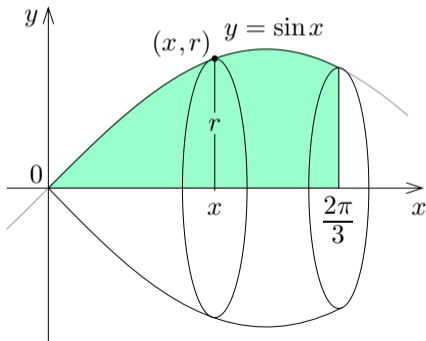
問8.3.2 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ と $0 \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域を考える. 3次元空間においてこの領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求めよ.

$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と V をとの共通部分の形は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面で点 (x, r) は $y = \sin x$ のグラフに属するので, $r = \sin x$; よって, この共通部分の面積 $S(x)$ は

$$S(x) = \pi r^2 = \pi \sin^2 x .$$

従って, 回転体 V の体積は,

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} S(x) dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \pi \sin^2 x dx$$



回転体 V の体積は,

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} S(x) dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

回転体 V の体積は,

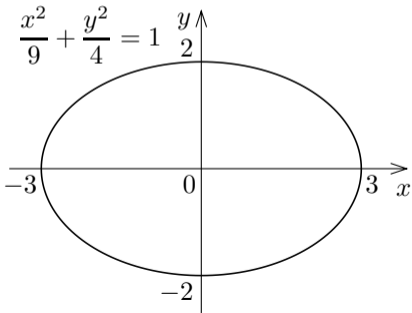
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} S(x) dx &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \pi \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) .\end{aligned}$$

終

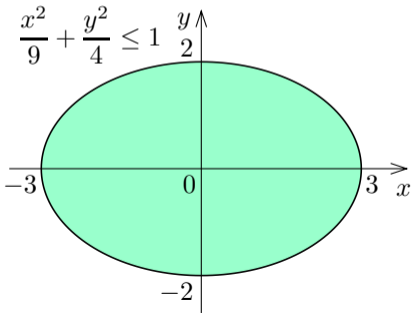
例 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す領域を 3 次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める.

例 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す領域を 3 次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める. 方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ は \quad を表す.

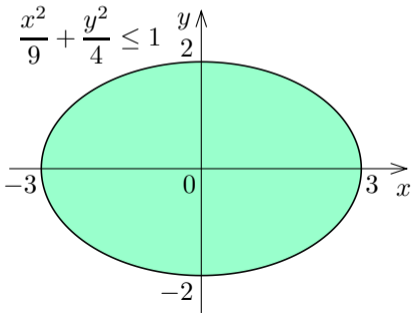
例 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す領域を 3 次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める. 方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ は楕円を表す.



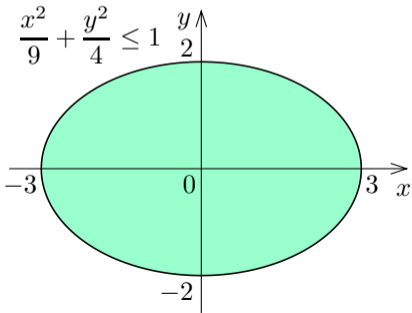
例 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す領域を 3 次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める. 方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ は楕円を表す. 不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ で囲まれる領域 (境界を含む) を表す.



例 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す領域を 3 次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める. 方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ は楕円を表す. 不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ で囲まれる領域 (境界を含む) を表す. この不等式より $\frac{x^2}{9} - 1 \leq -\frac{y^2}{4} \leq 0$ なので,

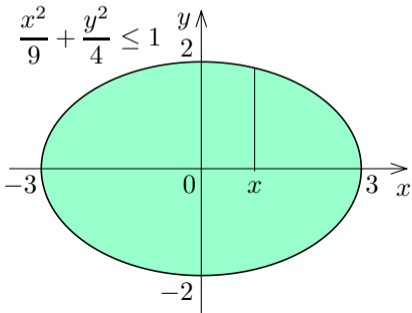


例 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す領域を 3 次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める. 方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ は楕円を表す. 不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ で囲まれる領域 (境界を含む) を表す. この不等式より $\frac{x^2}{9} - 1 \leq -\frac{y^2}{4} \leq 0$ なので, $x^2 - 9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$.



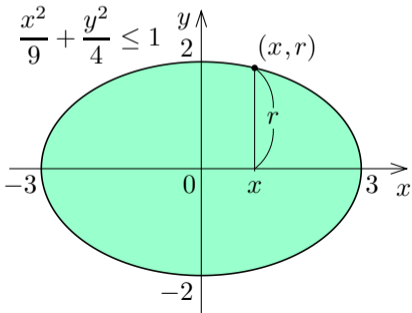
例 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す領域を 3 次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める. 方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ は楕円を表す. 不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ で囲まれる領域 (境界を含む) を表す. この不等式より $\frac{x^2}{9} - 1 \leq -\frac{y^2}{4} \leq 0$ なる

ので, $x^2 - 9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. この範囲の実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直である平面と V との共通部分の形は円である;



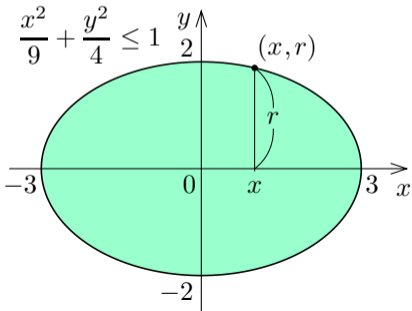
例 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す領域を 3 次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める. 方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ は楕円を表す. 不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ で囲まれる領域 (境界を含む) を表す. この不等式より $\frac{x^2}{9} - 1 \leq -\frac{y^2}{4} \leq 0$ な

ので, $x^2 - 9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. この範囲の実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直である平面と V との共通部分の形は円である; この円の半径を r とおくと, xy 座標平面で点 (x, r) は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ に属するので,

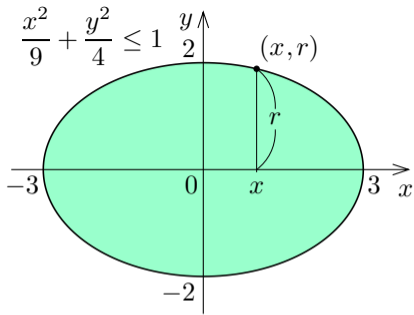


例 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す領域を 3 次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める. 方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ は楕円を表す. 不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ で囲まれる領域 (境界を含む) を表す. この不等式より $\frac{x^2}{9} - 1 \leq -\frac{y^2}{4} \leq 0$ な

ので, $x^2 - 9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. この範囲の実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直である平面と V との共通部分の形は円である; この円の半径を r とおくと, xy 座標平面で点 (x, r) は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ に属すので, $\frac{x^2}{9} + \frac{r^2}{4} = 1$, $r^2 = 4 - \frac{4}{9}x^2$.

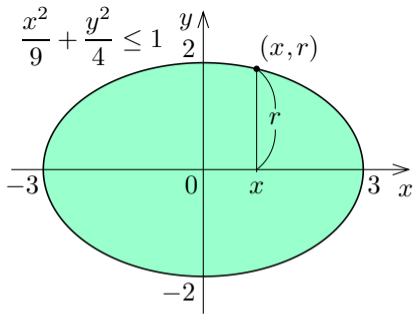


x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直である平面と V との共通部分である円について、半径を r とおくと $r^2 = 9 - \frac{9}{4}x^2$ なので、



x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直である平面と V との共通部分である円について、半径を r とおくと $r^2 = 9 - \frac{9}{4}x^2$ なので、面積 $S(x)$ は

$$S(x) = \pi r^2 = \pi \left(4 - \frac{4}{9}x^2 \right) .$$

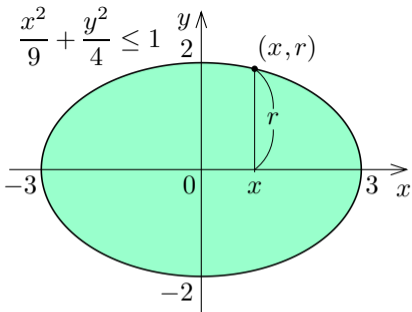


x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直である平面と V との共通部分である円について、半径を r とおくと $r^2 = 9 - \frac{9}{4}x^2$ なので、面積 $S(x)$ は

$$S(x) = \pi r^2 = \pi \left(4 - \frac{4}{9}x^2 \right).$$

故に回転体 V の体積は、

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 S(x) dx &= \int_{-3}^3 \pi \left(4 - \frac{4}{9}x^2 \right) dx \\ &= \pi \left[4x - \frac{4}{27}x^3 \right]_{-3}^3 = \pi \left\{ 12 - \frac{4 \cdot 27}{27} - \left(-12 - \frac{4 \cdot 27}{27} \right) \right\} \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

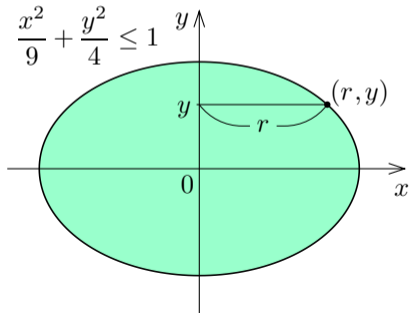


問8.3.3 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す領域を 3 次元空間において y 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求めよ。

不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ は方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ が表す楕円で囲まれる領域（境界を含む）を表す。この不等式より $\frac{y^2}{4} - 1 \leq -\frac{x^2}{9} \leq 0$ なので、 $y^2 - 4 \leq 0$ 、 $(y+2)(y-2) \leq 0$ 、 $-2 \leq y \leq 2$ 。この範囲

の実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分の形は円である；この円の半径を r とおくと、 xy 座標平面で点 (r, y) は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ に属するので、 $\frac{r^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 、

$r^2 = 9\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)$;



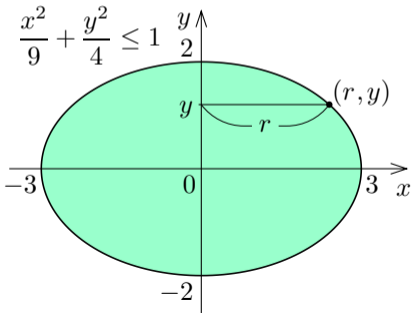
問8.3.3 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す領域を 3 次元空間において y 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求めよ。

不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ は方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ が表す楕円で囲まれる領域（境界を含む）を表す。この不等式より $\frac{y^2}{4} - 1 \leq -\frac{x^2}{9} \leq 0$ なので、 $y^2 - 4 \leq 0$ 、 $(y+2)(y-2) \leq 0$ 、 $-2 \leq y \leq 2$ 。この範

囲の実数 y を座標とする y 軸の点が属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分の形は円である；この円の半径を r と

おくと、 xy 座標平面で点 (r, y) は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ に属するので、 $\frac{r^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 、

$$r^2 = 9 - \frac{9}{4}y^2 ;$$

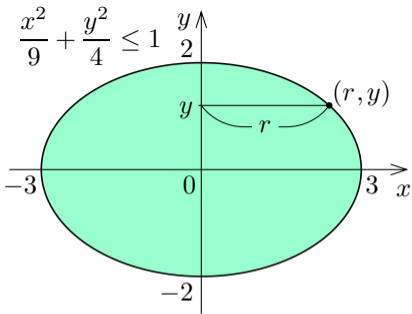


この円の面積 $S(y)$ は

$$S(y) = \pi r^2 = \pi \left(9 - \frac{9}{4} y^2 \right) .$$

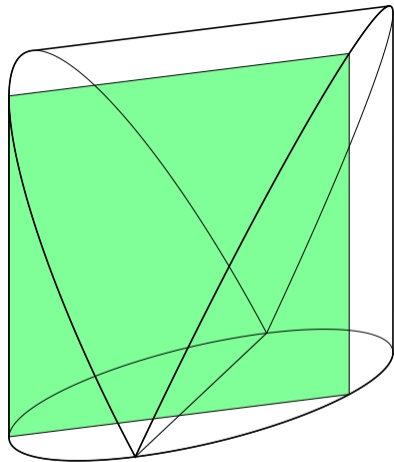
回転体 V の体積は

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 S(y) dy &= \int_{-2}^2 \pi \left(9 - \frac{9}{4} y^2 \right) dy \\ &= \pi \left[9t - \frac{3}{4} y^3 \right]_{-2}^2 \\ &= \pi [18 - 6 - \{-18 - (-6)\}] \\ &= 24\pi . \end{aligned}$$

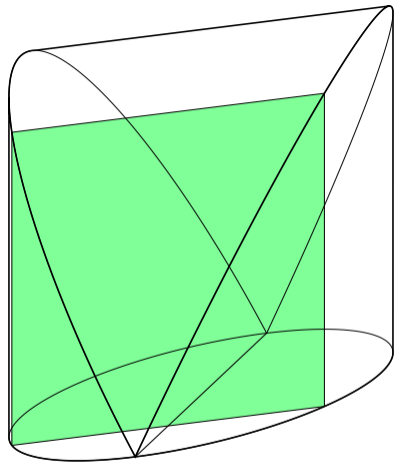


終

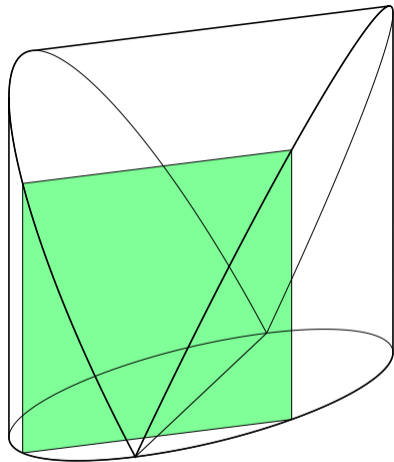
例 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり、底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分の形は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である。



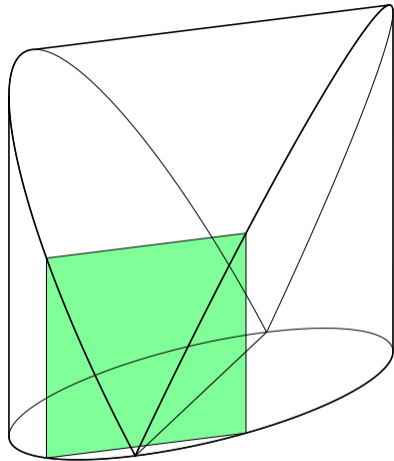
例 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり、底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分の形は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である。



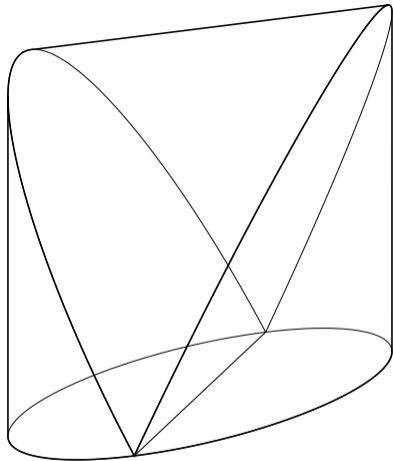
例 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり、底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分の形は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である。



例 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり、底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分の形は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である。

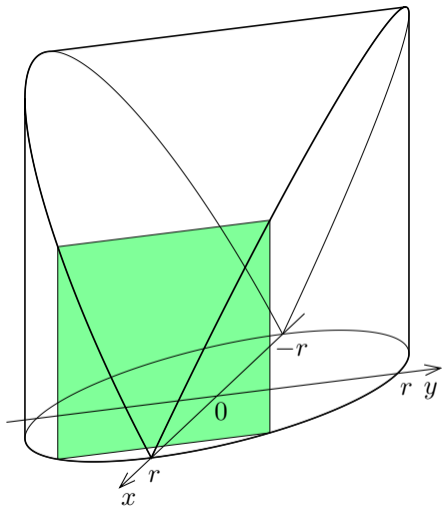


例 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり、底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分の形は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である。この立体図形 V の体積を求める。

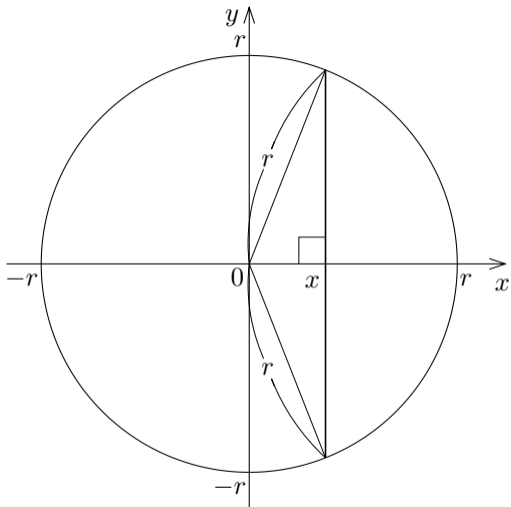


例 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり、底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分の形は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である。この立体図形 V の体積を求める。

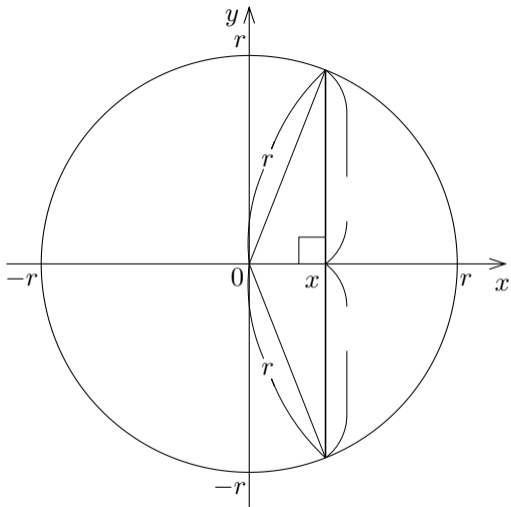
立体図形 V の底面を含む平面において底面の円の中心を原点とする xy 座標系をおく。 x 軸に垂直な各平面と立体 V との共通部分が正方形であるとする。 V に属す点の x 座標の範囲は $-r \leq x \leq r$.



$-r \leq x \leq r$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正方形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる。

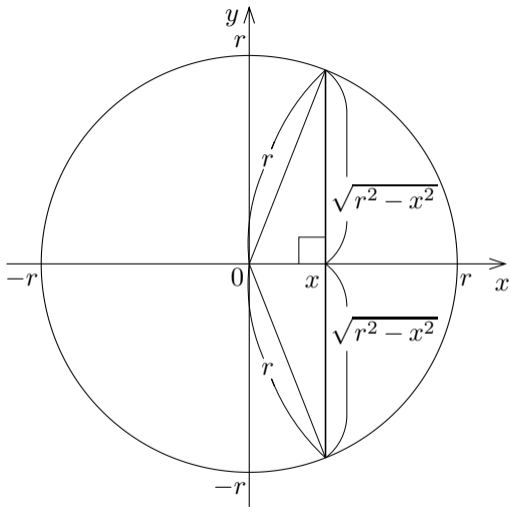


$-r \leq x \leq r$ である実数 x を
 座標とする x 軸の点が属し x 軸
 に垂直な平面と立体 V との共
 通部分の正方形の底辺を xy 座
 標平面で図示すると右図のよう
 になる．正方形の 1 辺の長さは
 なので，正方形の面
 積は



$-r \leq x \leq r$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正方形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる．正方形の 1 辺の長さは $2\sqrt{r^2 - x^2}$ なので，正方形の面積は

$$(2\sqrt{r^2 - x^2})^2 = 4(r^2 - x^2) .$$

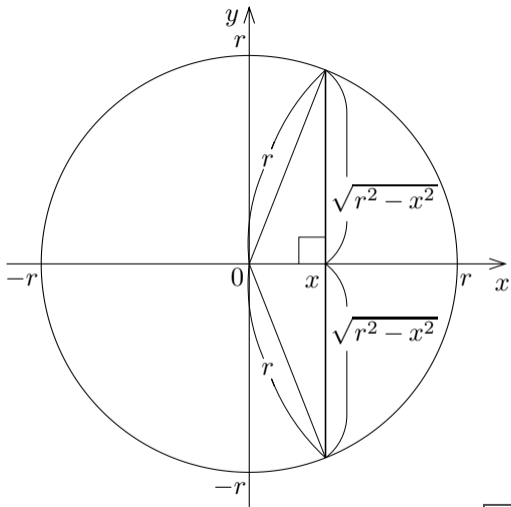


$-r \leq x \leq r$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正方形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる．正方形の 1 辺の長さは $2\sqrt{r^2 - x^2}$ なので，正方形の面積は

$$(2\sqrt{r^2 - x^2})^2 = 4(r^2 - x^2) .$$

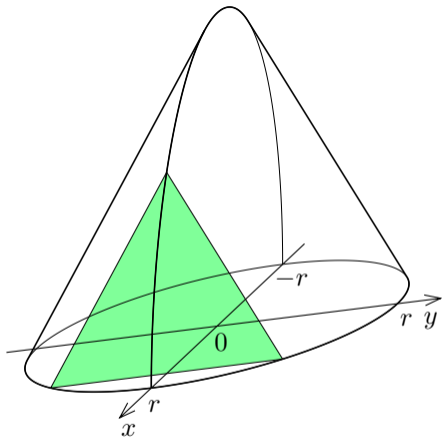
V の体積は

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r 4(r^2 - x^2) dx &= 4 \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r \\ &= \frac{16}{3} r^3 . \end{aligned}$$



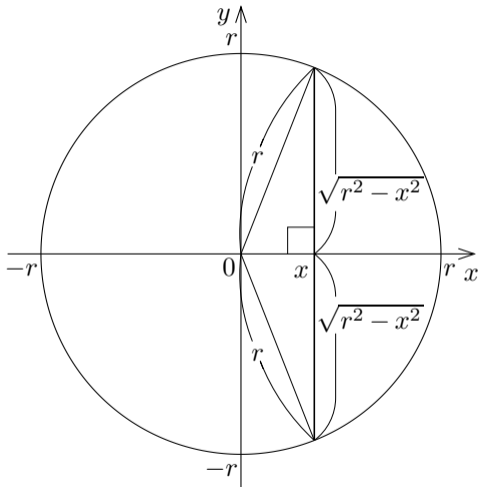
問8.3.4 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり、底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分の形は底辺が V の底面の円の弦である正三角形で囲まれる平面領域である．この立体図形 V の体積を求めよ．

立体図形 V の底面を含む平面において底面の円の中心を原点とする xy 座標系をおく． x 軸に垂直な各平面と立体 V との共通部分が正三角形である． V に属す点の x 座標の範囲は $-r \leq x \leq r$ ．



$-r \leq x \leq r$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属す x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正三角形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる．正三角形の1辺の長さは $2\sqrt{r^2 - x^2}$ なので，正三角形の面積は

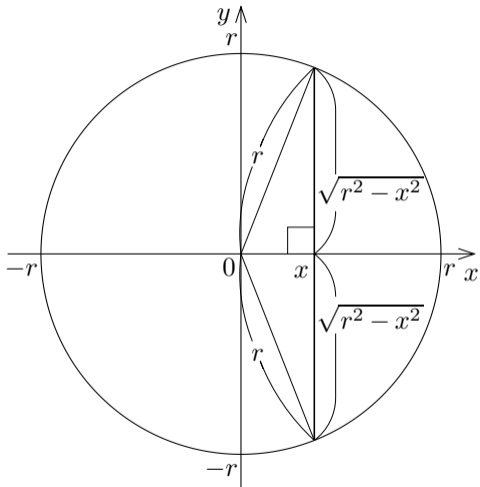
V の体積は



$-r \leq x \leq r$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属す x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正三角形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる．正三角形の1辺の長さは $2\sqrt{r^2 - x^2}$ なので，正三角形の面積は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{3} \sqrt{r^2 - x^2} \\ &= \sqrt{3}(r^2 - x^2) . \end{aligned}$$

V の体積は

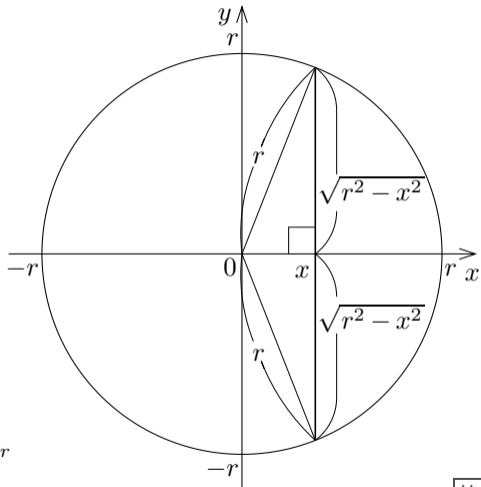


$-r \leq x \leq r$ である実数 x を座標とする x 軸の点が属す x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正三角形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる．正三角形の1辺の長さは $2\sqrt{r^2 - x^2}$ なので，正三角形の面積は

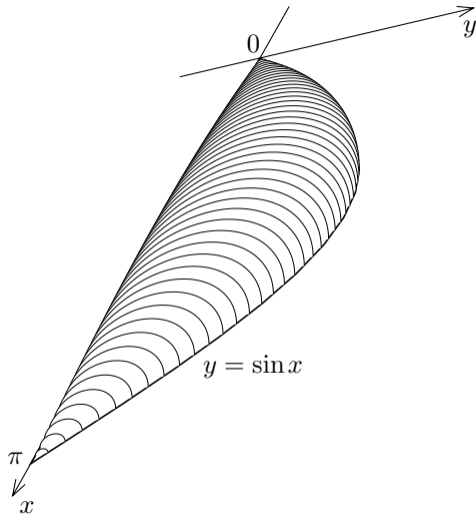
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{3} \sqrt{r^2 - x^2} \\ &= \sqrt{3}(r^2 - x^2) . \end{aligned}$$

V の体積は

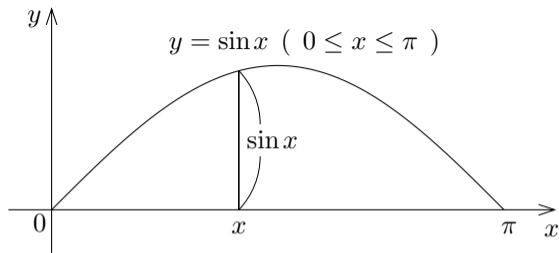
$$\begin{aligned} \int_{-r}^r \sqrt{3}(r^2 - x^2) dx &= \sqrt{3} \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{3} r^3 . \end{aligned}$$



問8.3.5 xy 座標平面の上に乗っている立体図形 V がある. V の底面は xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $0 \leq y \leq \sin x$ との連立で表される平面領域である. x 軸に垂直で x 軸との共有点の x 座標が 0 以上 π 以下である各平面と V との共通部分の形は半円で囲まれる平面領域であり, その半円の直径である線分的一方の端点は x 軸に属しもう一方の端点は $y = \sin x$ のグラフに属す. この立体図形 V の体積を求めよ.

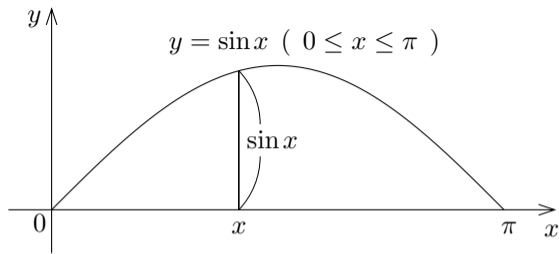


$0 \leq x \leq \pi$ である各実数 x を座標とする x 軸の点が属す x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の半円の直径である線分を xy 座標平面で図示すると右図のようになる. 半円の直径が $\sin x$ なので, 半円の面積は



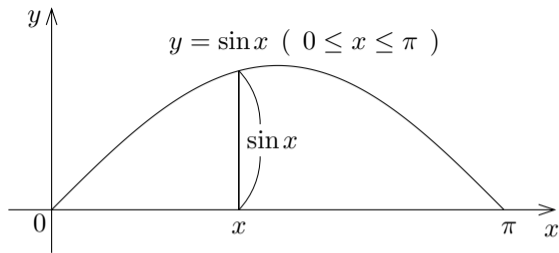
である. V の体積は

$0 \leq x \leq \pi$ である各実数 x を座標とする x 軸の点が属す x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の半円の直径である線分を xy 座標平面で図示すると右図のようになる．半円の直径が



$\sin x$ なので，半円の面積は $\frac{\pi}{2} \left(\frac{\sin x}{2} \right)^2$ である． V の体積は

$0 \leq x \leq \pi$ である各実数 x を座標とする x 軸の点が属す x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の半円の直径である線分を xy 座標平面で図示すると右図のようになる．半円の直径が



$\sin x$ なので，半円の面積は $\frac{\pi}{2} \left(\frac{\sin x}{2} \right)^2$ である． V の体積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sin x}{2} \right)^2 dx &= \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{16} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{16} . \end{aligned}$$

終