8.2 平面領域の面積

定積分の定義を復習する.

[定義] 実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$S_n =$$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．

$\lim_{n\to\infty} \delta_n =$ 　　であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，

　　　　　　　を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：

$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　　　　．

[定義] 実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad ,$$

$$S_n =$$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty} \delta_n =$ 　であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，

　　を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　．

[定義] 実数 a と b とについて $a \le b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}\ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．

$\lim_{n\to\infty} \delta_n =$ 　　であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，

　　　　　　を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：

$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　　　　．

[定義] 実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}\ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，f のリーマン和 S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$ ．

関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 f は b から a まで積分可能であるといい，f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x)\,dx$ を次のように定義する：$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ ．

実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含み，f は a から b まで定積分可能であるとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとる．

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする．

実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含み，f は a から b まで定積分可能であるとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとる．

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする．定積分の定義より，$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ は変わない．

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき，定積分の定義より，$k=1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n \to \infty} S_n$ は変わらない．

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき，定積分の定義より，$k=1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n \to \infty} S_n$ は変わらない．そこで，$\xi_k = x_k$ （$k = 1, 2, 3, \ldots, n$）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき，定積分の定義より，$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ は変わらない．そこで，$\xi_k = x_k$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ） とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}\ .$$

また別に，$\xi_k = x_{k-1}$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ） とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}\ .$$

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき，定積分の定義より，$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わらない．そこで，$\xi_k = x_k$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ） とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

また別に，$\xi_k = x_{k-1}$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ） とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

f のリーマン和として $\sum_{k=1}^{n} \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}$ 或いは $\sum_{k=1}^{n} \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ をしばしばを用いる．

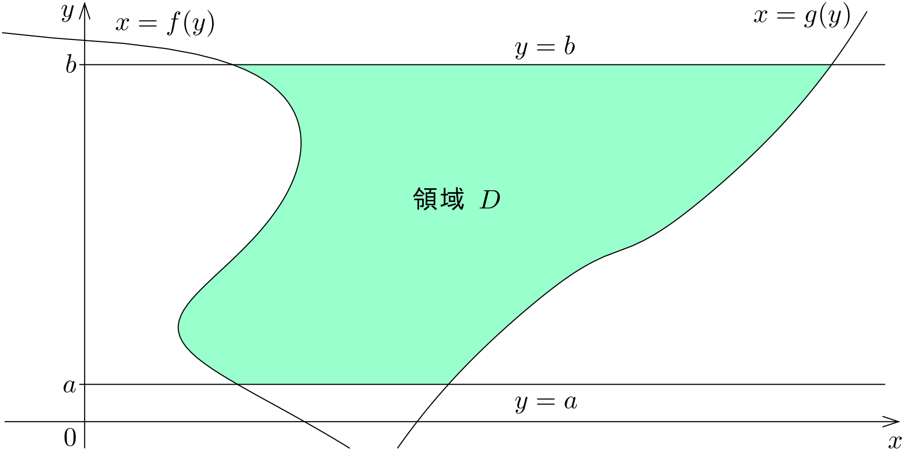
xy 座標平面における領域の面積を計算するために y で積分することがある.

　実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能であり，区間 $[a,b]$ の各実数 y について $f(y) \leq g(y)$ とする．xy 座標平面において，連立不等式

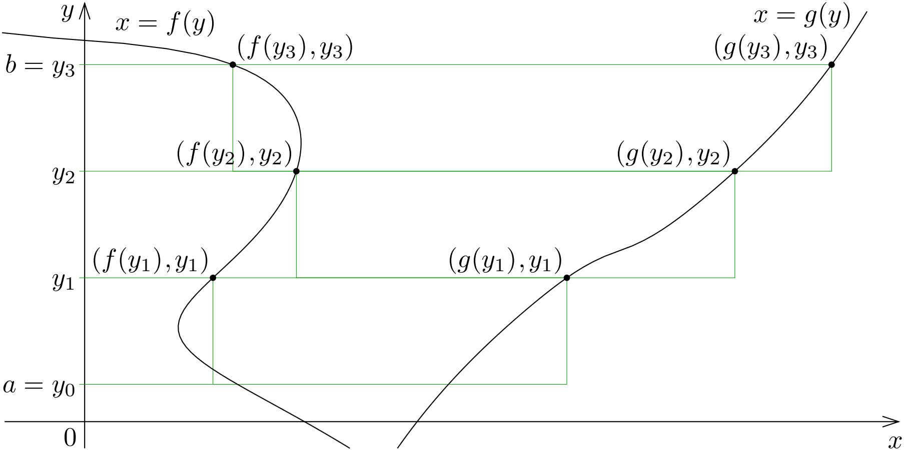
$$a \leq y \leq b \quad \text{かつ} \quad f(y) \leq x \leq g(y)$$

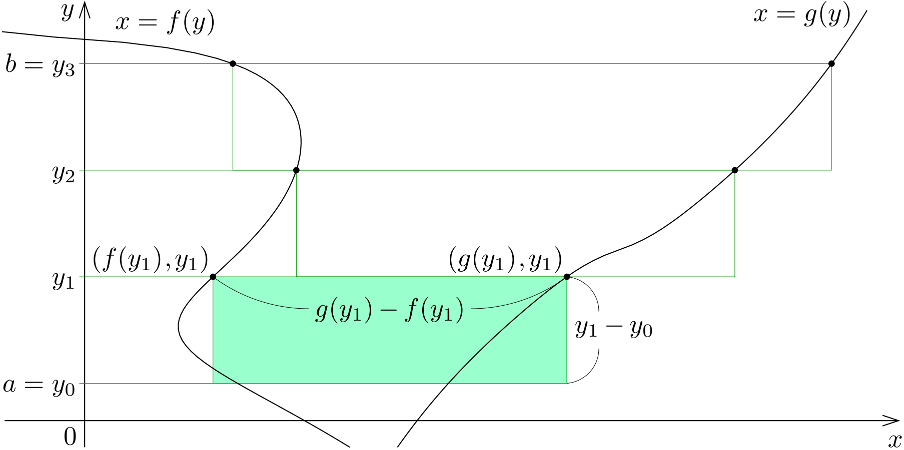
で表される領域を D の面積を考える．

　不等式　$a \leq y \leq b$　と　$f(y) \leq x \leq g(y)$　との連立で表される領域　D　が例えば下図の明緑色の図形であるとする.



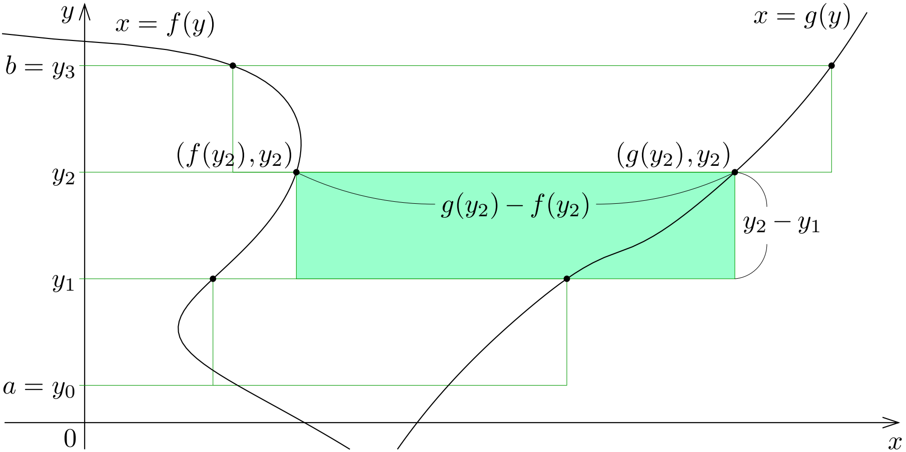
$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 = b$ である実数 y_0, y_1, y_2, y_3 をとり，下図の状況を考える．





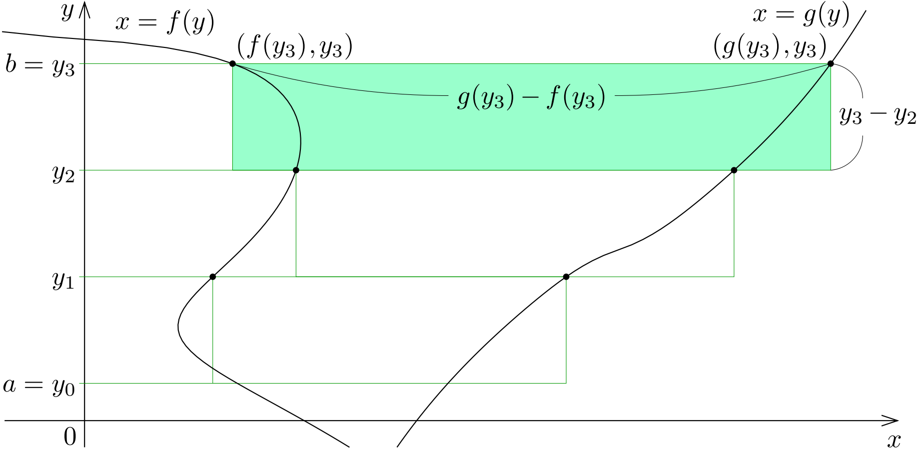
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(y_1) - f(y_1)\}(y_1 - y_0) \ .$$



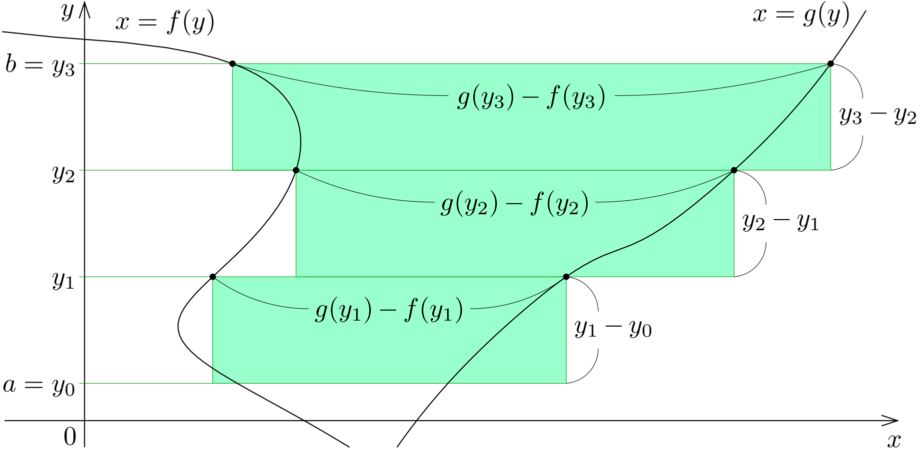
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(y_2) - f(y_2)\}(y_2 - y_1) \ .$$



上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(y_3) - f(y_3)\}(y_3 - y_2) \ .$$



上図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$\{g(y_1) - f(y_1)\}(y_1 - y_0) + \{g(y_2) - f(y_2)\}(y_2 - y_1) + \{g(y_3) - f(y_3)\}(y_3 - y_2) \ .$$

このような 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$\{g(y_1)-f(y_1)\}(y_1-y_0)+\{g(y_2)-f(y_2)\}(y_2-x_1)+\{g(y_3)-f(y_3)\}(y_3-y_2)$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\Big[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})\Big] \ .$$

このような 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$\{g(y_1)-f(y_1)\}(y_1-y_0)+\{g(y_2)-f(y_2)\}(y_2-x_1)+\{g(y_3)-f(y_3)\}(y_3-y_2)$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\Big[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})\Big]\ .$$

これは関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和である.

このような長方形を増やして個々の長方形を薄くしていく.

このような長方形を増やして個々の長方形を薄くしていく.

正の各自然数 n に対して,

$$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_{n-1} \leq y_n = b$$

である実数 $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n$ をとり, 関数 $g(y) - f(y)$ のリーマン和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})]$$

を考える.

このような長方形を増やして個々の長方形を薄くしていく.

正の各自然数 n に対して,

$$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_{n-1} \leq y_n = b$$

である実数 $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n$ をとり, 関数 $g(y) - f(y)$ のリーマン和

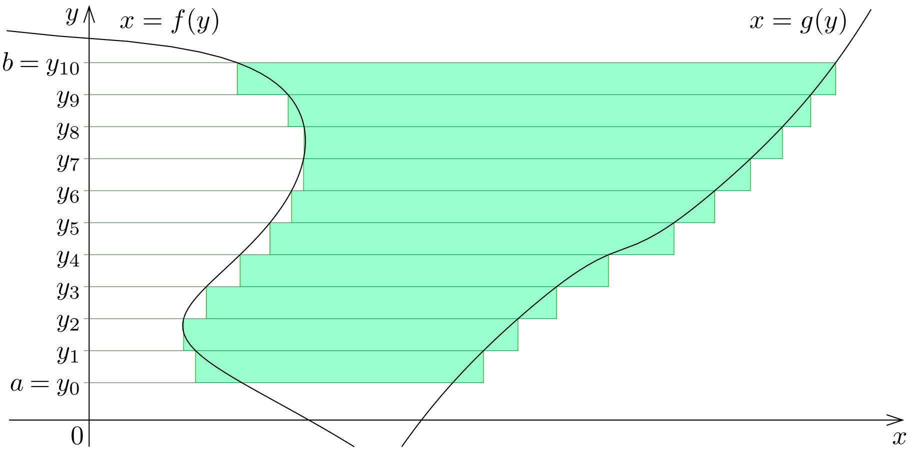
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})]$$

を考える.

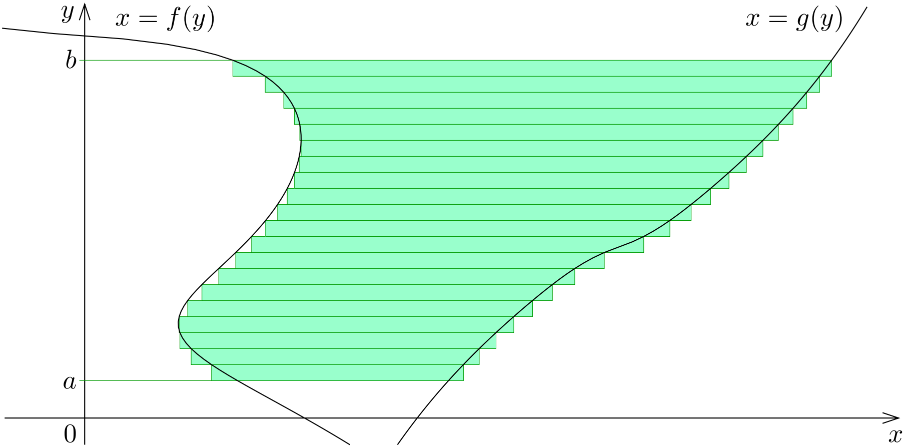
$$\delta_n = \max\{y_1 - y_0, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \ldots, y_n - y_{n-1}\}$$

について, $n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とする. つまり, $n \to \infty$ のとき $y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots, y_{n-1}, y_n$ の間隔は 0 に限りなく近づくとする.

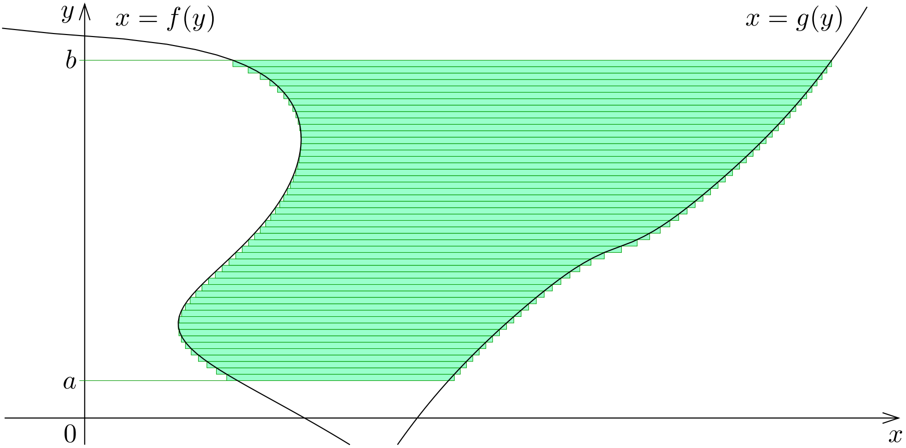
$n=10$ のとき，下図の 10 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_{10}=\sum_{k=1}^{10}\left[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})\right]$ である.



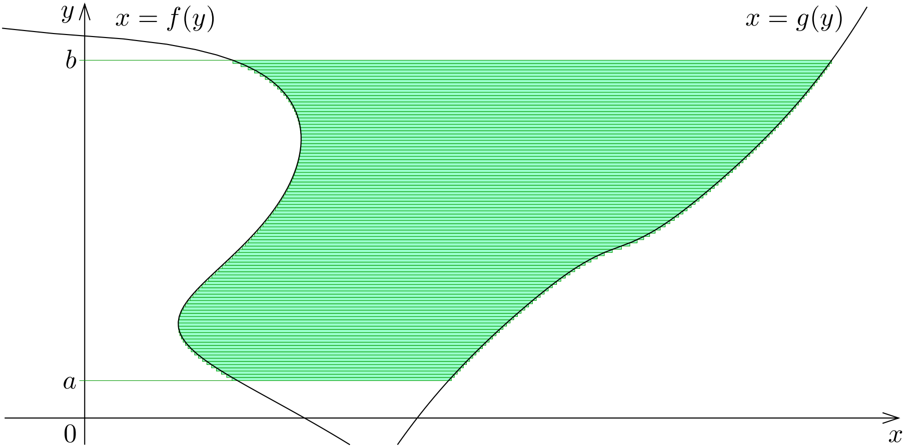
$n=20$ のとき，下図の 20 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_{20}=\sum_{k=1}^{20}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ である．



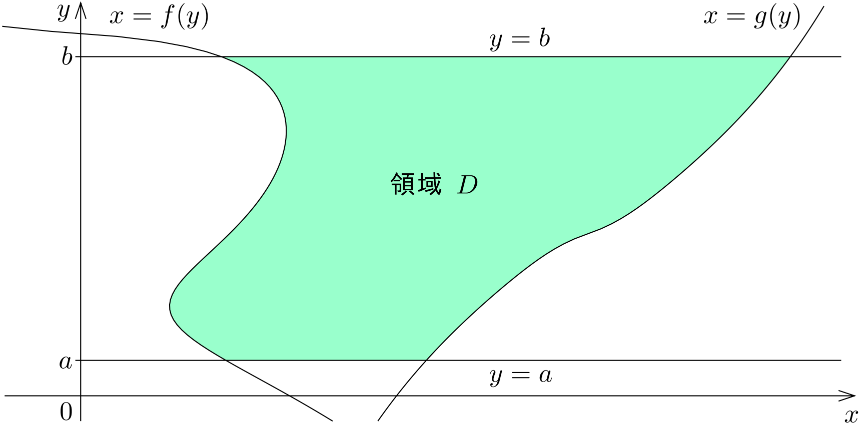
$n = 50$ のとき，下図の 50 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(y) - f(y)$ のリーマン和 $S_{50} = \sum_{k=1}^{50} [\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})]$ である.

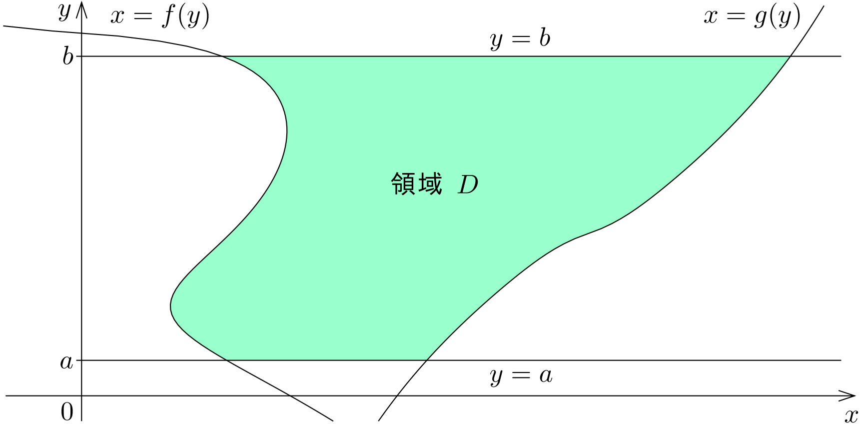


$n = 100$ のとき，下図の 100 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(y) - f(y)$ のリーマン和 $S_{100} = \sum_{k=1}^{100} [\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})]$ である．



　このような n 個の長方形を併せた図形の面積は，関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})]$ であり，長方形を限りなく増やして個々の長方形を限りなく薄くすると元の領域 D の面積に限りなく近づく．





関数 $g(y) - f(y)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})]$ は $n \to \infty$ のとき領域 D の面積に限りなく近づく．故に領域 D の面積はリーマン和 S_n の $n \to \infty$ のときの極限値である．

領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である.

領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ である. 関数 $f(y)$ と $g(y)$ とが a から b まで積分可能なので, 関数 $g(y)-f(y)$ も a から b まで積分可能である.

領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ である．関数 $f(y)$ と $g(y)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(y)-f(y)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ なので，関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_a^b\{g(y)-f(y)\}\,dy$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b\{g(y)-f(y)\}\,dy\ .$$

領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ である．関数 $f(y)$ と $g(y)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(y)-f(y)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ なので，関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_a^b\{g(y)-f(y)\}\,dy$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b\{g(y)-f(y)\}\,dy\ .$$

故に，領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ の定積分 $\int_a^b\{g(y)-f(y)\}\,dy$ である．

領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ である．関数 $f(y)$ と $g(y)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(y)-f(y)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ なので，関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_a^b\{g(y)-f(y)\}\,dy$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b\{g(y)-f(y)\}\,dy\ .$$

故に，領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ の定積分 $\int_a^b\{g(y)-f(y)\}\,dy$ である．

　このようにして次の定理が成り立つ．

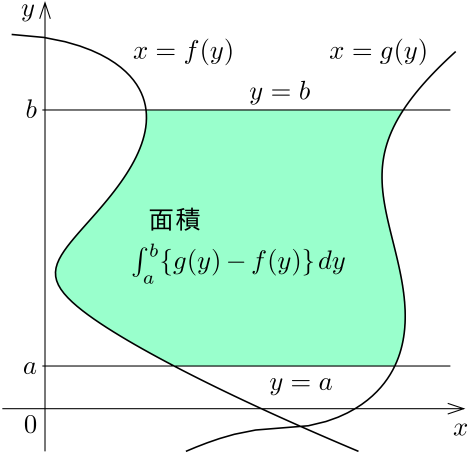
[定理 8.2] 実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能で，区間 $[a,b]$ の各実数 y について $f(y) \leq g(y)$ とする．xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq y \leq b \quad かつ \quad f(y) \leq x \leq g(y)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(y) - f(y)\}\, dy$$

である．



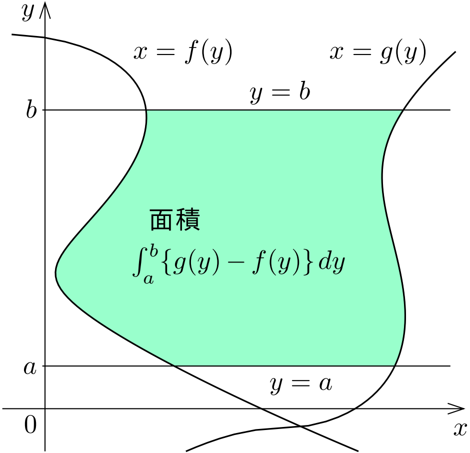
[定理 8.2] 実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能で，区間 $[a,b]$ の各実数 y について $f(y) \leq g(y)$ とする．xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq y \leq b \quad \text{かつ} \quad f(y) \leq x \leq g(y)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(y) - f(y)\}\,dy$$

である．

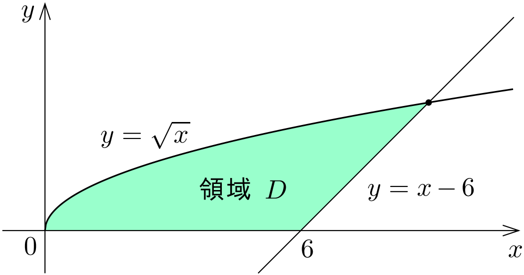


この定理において，領域の点の y 座標の範囲と，その範囲で $f(y) \leq g(y)$ であるかどうかに注意すること．

　このように領域を長方形を併せた図形で近似して，長方形を限りなく増やして各長方形を限りなく細くしていくと長方形を併せた図形の面積が領域の面積に収束すると考えて領域の面積を求める方法を区分求積法という.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

例 xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

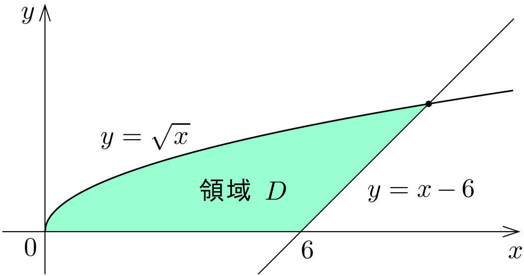


$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める． $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ のとき

$$y=\sqrt{x} \iff x=y^2 \quad .$$

また，

$$y=x-6 \iff x=y+6 \ .$$



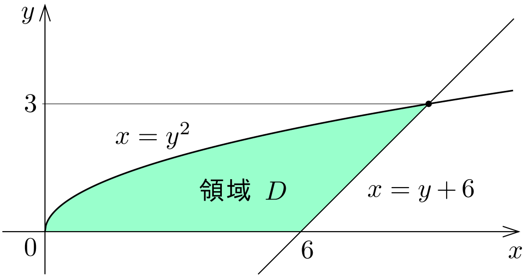
$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める． $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ のとき

$$y = \sqrt{x} \iff x = y^2 \quad .$$

また，

$$y = x-6 \iff x = y+6 \ .$$

$x=y^2$ かつ $x=y+6$ とすると， $y^2=y+6$ ， $y=3,-2$ ；更に $y \geq 0$ とすると $y=3$ ．



$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める. $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ のとき

$$y=\sqrt{x} \iff x=y^2 \quad .$$

また,

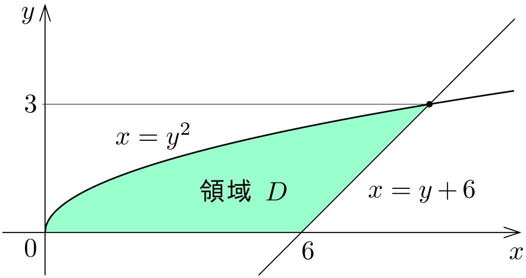
$$y=x-6 \iff x=y+6 \ .$$

$x=y^2$ かつ $x=y+6$ とすると, $y^2=y+6$, $y=3,-2$;

更に $y \geq 0$ とすると $y=3$.

領域 D の点の y 座標の範囲は

$0 \leq y \leq 3$ で, この範囲で $y+6 \geq y^2$.

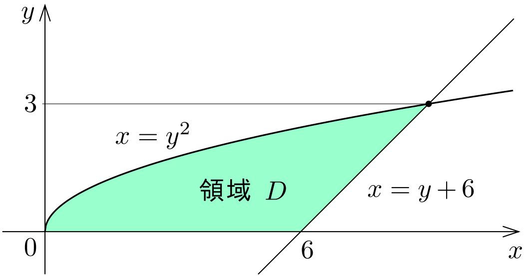


例　xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める．$x\geq 0$ かつ $y\geq 0$ のとき

$$y=\sqrt{x} \iff x=y^2 \ .$$

また，

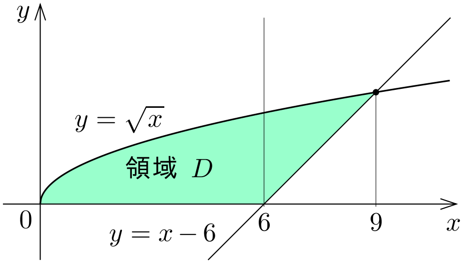
$$y=x-6 \iff x=y+6 \ .$$



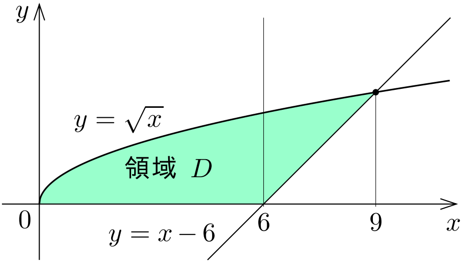
$x=y^2$ かつ $x=y+6$ とすると，$y^2=y+6$ ，$y=3,-2$ ；更に $y\geq 0$ とすると $y=3$ ．領域 D の点の y 座標の範囲は $0\leq y\leq 3$ で，この範囲で $y+6\geq y^2$ ．領域 D の面積は

$$\int_0^3 (y+6-y^2)\,dy = \left[\frac{1}{2}y^2+6y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^3 = \frac{27}{2} \ .$$

関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を x について積分して求めるには，D を $0 \leq x \leq 6$ の部分と $6 \leq x \leq 9$ の部分とに分けて計算する.



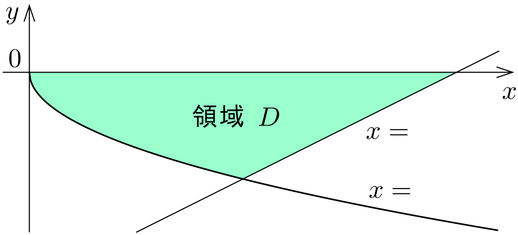
関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を x について積分して求めるには，D を $0 \leq x \leq 6$ の部分と $6 \leq x \leq 9$ の部分とに分けて計算する．



$$\begin{aligned}\int_0^6 \sqrt{x}\,dx+\int_6^9 \left\{\sqrt{x}-(x-6)\right\}dx &= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^6+\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_6^9\\ &= 4\sqrt{6}+6\sqrt{9}-\frac{81}{2}+54-4\sqrt{6}+18-36\\ &= \frac{27}{2}\ .\end{aligned}$$

終

問8.2.1 xy 座標平面において関数 $y=-\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=\dfrac{x}{2}-4$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求めよ.



$y=-\sqrt{x}$ のとき $y\leq 0$.
$x\geq 0$ かつ $y\leq 0$ のとき

$$y=-\sqrt{x} \iff x= \qquad .$$

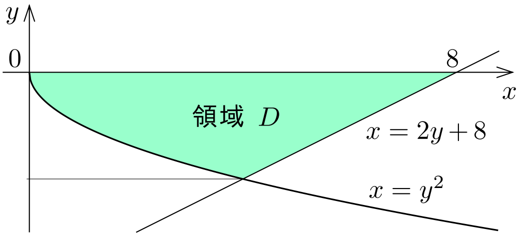
また,

$$y=\frac{x}{2}-4 \iff x= \qquad .$$

$x=$ 　　かつ $x=$ 　　　とすると,　　$=$ 　　　, $y=$ 　, 　　; 更に $y\leq 0$ とすると $y=$ 　　. 領域 D の点の y 座標の範囲は 　　$\leq y\leq 0$ で, この範囲で 　　　$\geq$ 　　. 領域 D の面積は

$$\int^{0} \left(\qquad\qquad \right) dy = \Big[\qquad\qquad \Big]^{0} =$$

問8.2.1　xy 座標平面において関数 $y=-\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=\dfrac{x}{2}-4$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求めよ．



$y=-\sqrt{x}$ のとき $y\leq 0$ ．

$x\geq 0$ かつ $y\leq 0$ のとき

$$y=-\sqrt{x} \iff x=y^2 \quad .$$

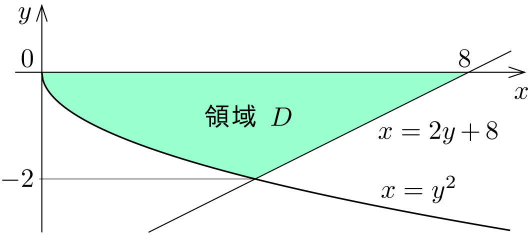
また，

$$y=\frac{x}{2}-4 \iff x=2y+8 \ .$$

$x=y^2$ かつ $x=2y+8$ とすると，　　$=$　　　，$y=$　，　　；更に $y\leq 0$ とすると $y=$　　．領域 D の点の y 座標の範囲は　　$\leq y\leq 0$ で，この範囲で　　　$\geq$　　．領域 D の面積は

$$\int^0 \left(\qquad\qquad \right) dy = \Big[\qquad\qquad \Big]^0 = $$

$\boxed{\text{問}8.2.1}$ xy 座標平面において関数 $y=-\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=\dfrac{x}{2}-4$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求めよ.



$y=-\sqrt{x}$ のとき $y\leq 0$.
$x\geq 0$ かつ $y\leq 0$ のとき

$$y=-\sqrt{x} \iff x=y^2 \quad .$$

また,

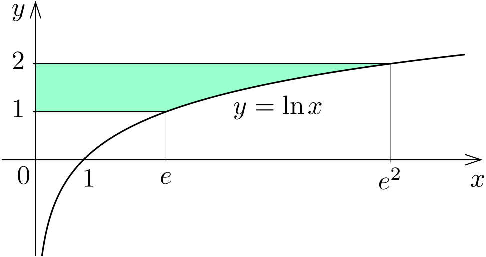
$$y=\frac{x}{2}-4 \iff x=2y+8 \ .$$

$x=y^2$ かつ $x=2y+8$ とすると, $y^2=2y+8$, $y=4,-2$;更に $y\leq 0$ とすると $y=-2$. 領域 D の点の y 座標の範囲は $-2\leq y\leq 0$ で,この範囲で $2y+8\geq y^2$. 領域 D の面積は

$$\int_{-2}^{0}(2y+8-y^2)\,dy=\left[y^2+8y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-2}^{0}=\frac{28}{3} \ .$$

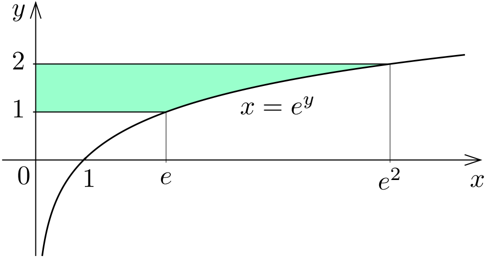
$\boxed{\text{終}}$

例　xy 座標平面において関数 $y = \ln x$ （ $x > 0$ ）のグラフと直線 $y = 1$ と直線 $y = 2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める.



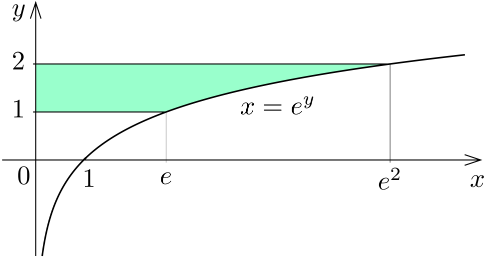
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y = \ln x$ ($x > 0$) のグラフと直線 $y = 1$ と直線 $y = 2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める．正の各実数 x 及び各実数 y について

$$y = \ln x \iff x = e^y \quad .$$



$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y = \ln x$ （ $x > 0$ ）のグラフと直線 $y = 1$ と直線 $y = 2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める．正の各実数 x 及び各実数 y について

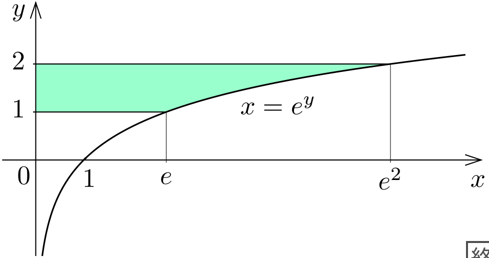
$$y = \ln x \iff x = e^y \quad .$$



領域の点の y 座標の範囲は $1 \leq y \leq 2$ ．各実数 y について $e^y > 0$ ．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y=\ln x$ ($x>0$) のグラフと直線 $y=1$ と直線 $y=2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める．正の各実数 x 及び各実数 y について

$$y=\ln x \iff x=e^y \quad .$$



領域の点の y 座標の範囲は $1\leq y\leq 2$ ．各実数 y について $e^y>0$ ．領域の面積は

$$\int_1^2 e^y\,dy=\left[e^y\right]_1^2=e^2-e \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}8.2.2}$ xy 座標平面において関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = e$ と直線 $y = e^2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

各実数 x 及び正の各実数 y について

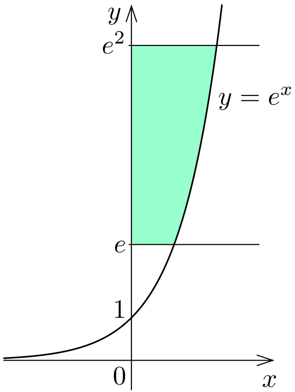
$$y \geq e^x \iff x \leq$$

領域を表す連立不等式は

$$\leq y \leq \qquad \text{かつ} \qquad \leq x \leq$$

領域の面積は

$$\int \qquad dy =$$



$\boxed{\text{問}8.2.2}$ xy 座標平面において関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = e$ と直線 $y = e^2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

各実数 x 及び正の各実数 y について

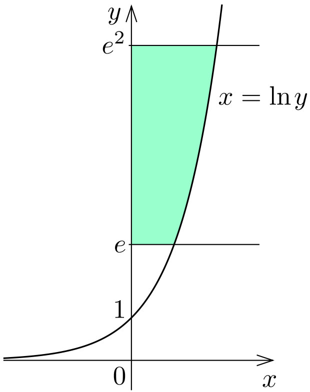
$$y \geq e^x \iff x \leq \ln y$$

領域を表す連立不等式は

$$e \leq y \leq e^2 \text{ かつ } 0 \leq x \leq \ln y \quad .$$

領域の面積は

$$\int \qquad dy =$$



$\boxed{\text{問}8.2.2}$ xy 座標平面において関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = e$ と直線 $y = e^2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

各実数 x 及び正の各実数 y について

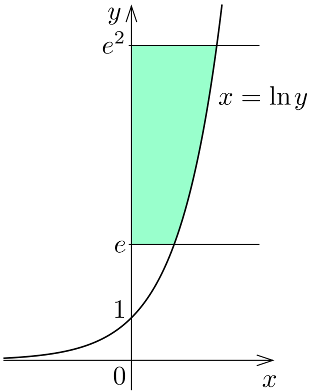
$$y \geq e^x \iff x \leq \ln y \quad .$$

領域を表す連立不等式は

$$e \leq y \leq e^2 \text{ かつ } 0 \leq x \leq \ln y \quad .$$

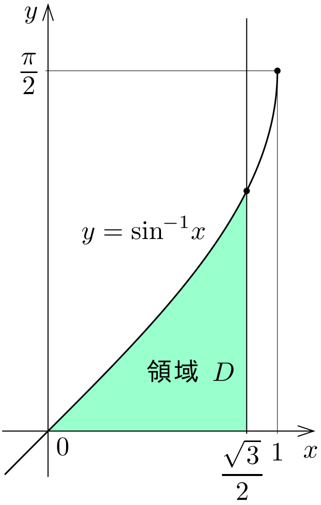
領域の面積は

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \ln y \, dy &= \Big[y \ln y - y \Big]_e^{e^2} \\ &= 2e^2 - e^2 - (e - e) \\ &= e^2 \ .\end{aligned}$$



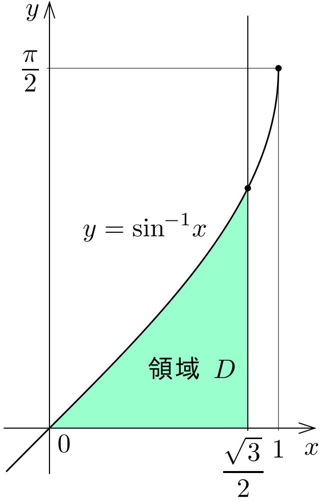
$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と $0 \leqq y \leqq \sin^{-1}x$ との連立で表される領域 D の面積を求める．領域 D の面積は定積分 $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin^{-1}x\,dx$ で計算できるが，$\sin^{-1}x$ の積分の計算は面倒である．



$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と $0 \leq y \leq \sin^{-1}x$ との連立で表される領域 D の面積を求める．$-1 \leq x \leq 1$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

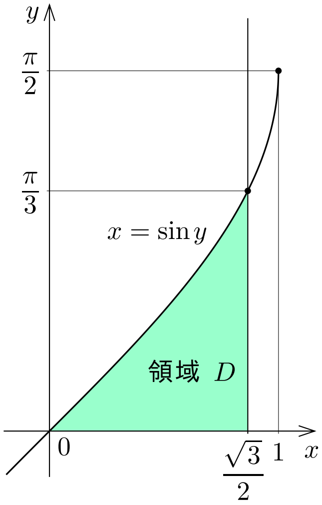
$$y = \sin^{-1}x \iff x = \sin y\ .$$



$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と $0 \leq y \leq \sin^{-1}x$ との連立で表される領域 D の面積を求める．$-1 \leq x \leq 1$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$y = \sin^{-1}x \iff x = \sin y \ .$$

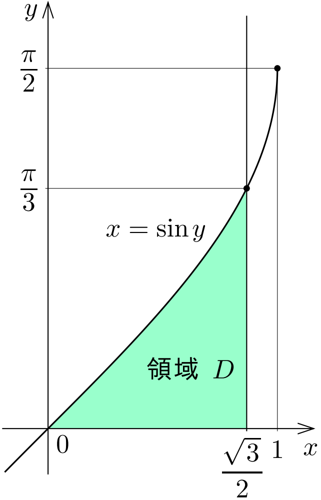
関数 $y = \sin^{-1}x$ について，$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $y = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$ ．



$\boxed{\text{例}}$　xy 座標平面において不等式 $x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と $0 \leq y \leq \sin^{-1}x$ との連立で表される領域 D の面積を求める．$-1 \leq x \leq 1$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$y = \sin^{-1}x \iff x = \sin y \ .$$

関数 $y = \sin^{-1}x$ について，$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $y = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$ ．領域 D の点の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{3}$ で，この範囲で $\sin y \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ．

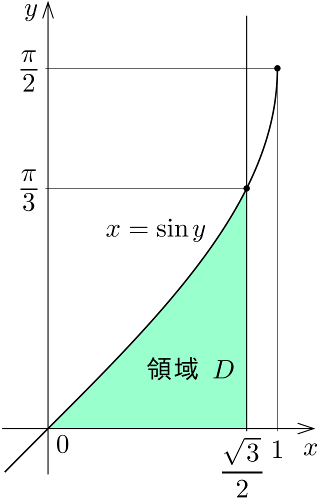


$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と $0 \leq y \leq \sin^{-1}x$ との連立で表される領域 D の面積を求める．$-1 \leq x \leq 1$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$y = \sin^{-1}x \iff x = \sin y \ .$$

関数 $y = \sin^{-1}x$ について，$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $y = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$ ．領域 D の点の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{3}$ で，この範囲で $\sin y \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ．領域 D の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin y\right) dy = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}y + \cos y\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$



領域 D の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin y\right)dy=\left[\frac{\sqrt{3}}{2}y+\cos y\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}-1$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}-\frac{1}{2}\ .$$

終

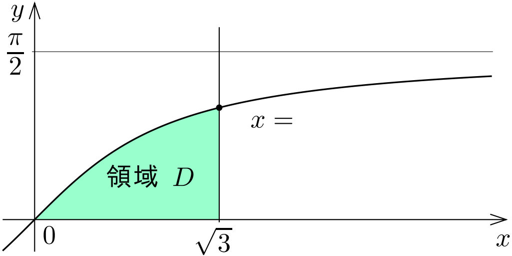
$\boxed{問8.2.3}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1}x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$y = \tan^{-1}x \iff x =$.

関数 $y = \tan^{-1}x$ について, $x = \sqrt{3}$ のとき

$y =$ $=$. 領域 D の点の y 座標の範囲は



$0 \leq y \leq$ であり, この範囲で . 領域 D の面積は

$$\int_0 \left(\qquad\qquad \right) dy =$$

$\boxed{\text{問}8.2.3}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1}x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ．

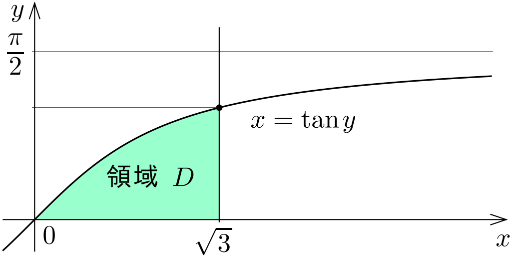
$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$y = \tan^{-1}x \iff x = \tan y$ ．

関数 $y = \tan^{-1}x$ について，$x = \sqrt{3}$ のとき

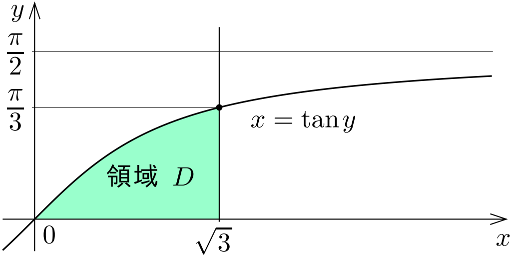
$y =$ $\qquad\qquad =$ $\quad$．領域 D の点の y 座標の範囲は

$0 \leq y \leq$ $\qquad$ であり，この範囲で $\qquad\qquad\qquad$．領域 D の面積は



$$\int_0 \left(\qquad\qquad\qquad \right) dy =$$

$\boxed{問8.2.3}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1}x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.



$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$y = \tan^{-1}x \iff x = \tan y$.

関数 $y = \tan^{-1}x$ について, $x = \sqrt{3}$ のとき $y = \tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$. 領域 D の点の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{3}$ であり, この範囲で $\tan y \leq \sqrt{3}$. 領域 D の面積は

$$\int_0 \Big(\qquad\qquad \Big) dy =$$

問8.2.3 xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1}x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ．

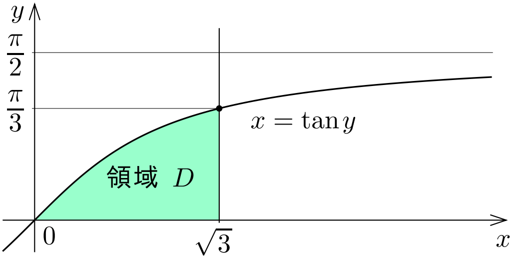
$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ のとき

$y = \tan^{-1}x \iff x = \tan y$ ．

関数 $y = \tan^{-1}x$ について，$x = \sqrt{3}$ のとき

$y = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ ．領域

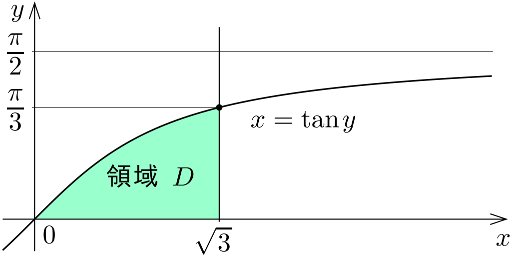
D の点の y 座標の範囲は



$0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$ であり，この範囲で $\tan y \leq \sqrt{3}$ ．領域 D の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{3} - \tan y\right) dy =$$

$\boxed{\text{問}8.2.3}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1}x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ．



$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$y = \tan^{-1}x \iff x = \tan y$.

関数 $y = \tan^{-1}x$ について，$x = \sqrt{3}$ のとき $y = \tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$ ．領域 D の点の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{3}$ であり，この範囲で $\tan y \leq \sqrt{3}$ ．領域 D の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{3} - \tan y\right) dy = \left[\sqrt{3}\,y + \ln|\cos y|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

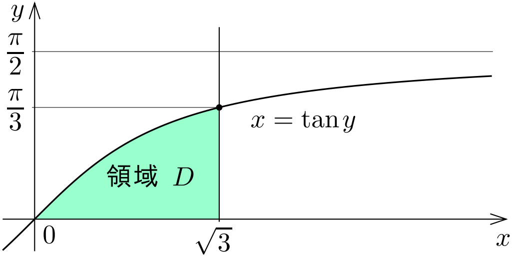
$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$（$C$ は積分定数）

問8.2.3 xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1}x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ．

$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$y = \tan^{-1}x \iff x = \tan y$ ．

関数 $y = \tan^{-1}x$ について，$x = \sqrt{3}$ のとき $y = \tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$ ．領域 D の点の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{3}$ であり，この範囲で $\tan y \leq \sqrt{3}$ ．領域 D の面積は

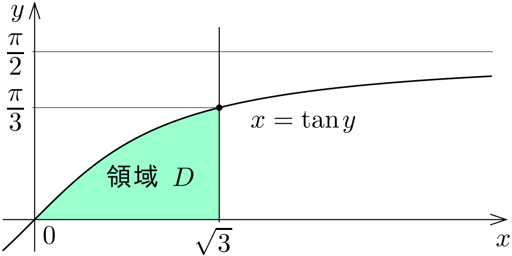


$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{3} - \tan y\right) dy = \left[\sqrt{3}\,y + \ln|\cos y|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3} + \ln\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3} - \ln 2 \ .$$

$\ln\dfrac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2$

$\boxed{\text{問}8.2.3}$ xy 座標平面において不等式 $x \le \sqrt{3}$ と $0 \le y \le \tan^{-1}x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.



$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$y = \tan^{-1}x \iff x = \tan y$.

関数 $y = \tan^{-1}x$ について, $x = \sqrt{3}$ のとき $y = \tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$. 領域 D の点の y 座標の範囲は $0 \le y \le \dfrac{\pi}{3}$ であり, この範囲で $\tan y \le \sqrt{3}$. 領域 D の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{3} - \tan y\right) dy = \left[\sqrt{3}\,y + \ln|\cos y|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3} + \ln\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3} - \ln 2 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$