8.1 平面領域の面積

定積分の定義を復習する.

[定義] 実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$S_n = $$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．
$\lim_{n\to\infty} \delta_n =$ 　　であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，
　　　　　　を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：
$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　　　　．

[定義] 実数 a と b とについて $a \le b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$S_n = $$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \delta_n =$ 　　であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，

　　　　　　を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：

$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　　　　　．

[定義] 実数 a と b とについて $a \le b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}\ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．

$\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n =$ 　　であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，

　　　　　　を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：

$\int_a^b f(x)\,dx =$ 　　　　　　．

[定義] 実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} \ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める．正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という．
$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，f のリーマン和 S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：
$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$ ．

関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 f は b から a まで積分可能であるといい，f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x)\,dx$ を次のように定義する：$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含み，f は a から b まで定積分可能であるとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとる．

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする．

実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含み，f は a から b まで定積分可能であるとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとる．

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする．定積分の定義より，$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わない．

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき，定積分の定義より，$k=1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わらない．

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき，定積分の定義より，$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わらない．そこで，$\xi_k = x_k$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき，定積分の定義より，$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わらない．そこで，$\xi_k = x_k$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ） とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

また別に，$\xi_k = x_{k-1}$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ） とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき，定積分の定義より，$k=1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わらない．そこで，$\xi_k = x_k$ （ $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ ） とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

また別に，$\xi_k = x_{k-1}$ （ $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ ） とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

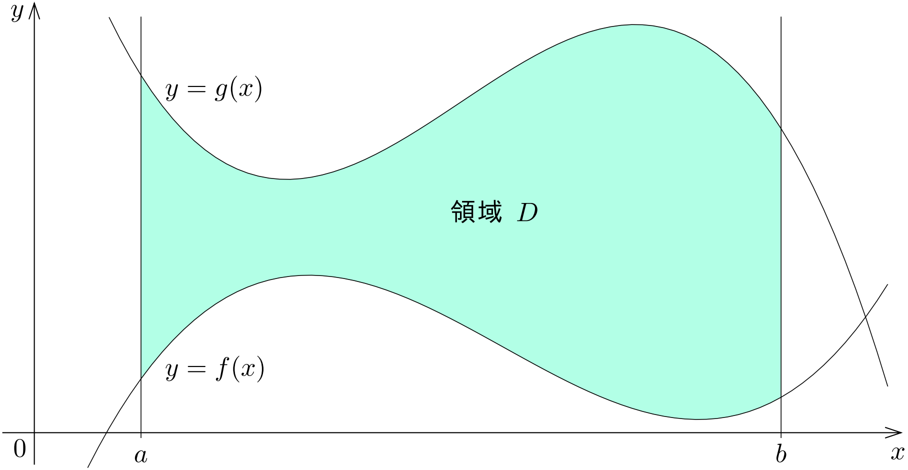
f のリーマン和として $\sum_{k=1}^{n} \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}$ 或いは $\sum_{k=1}^{n} \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ をしばしばを用いる．

　実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能であり，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とする．xy 座標平面において，連立不等式

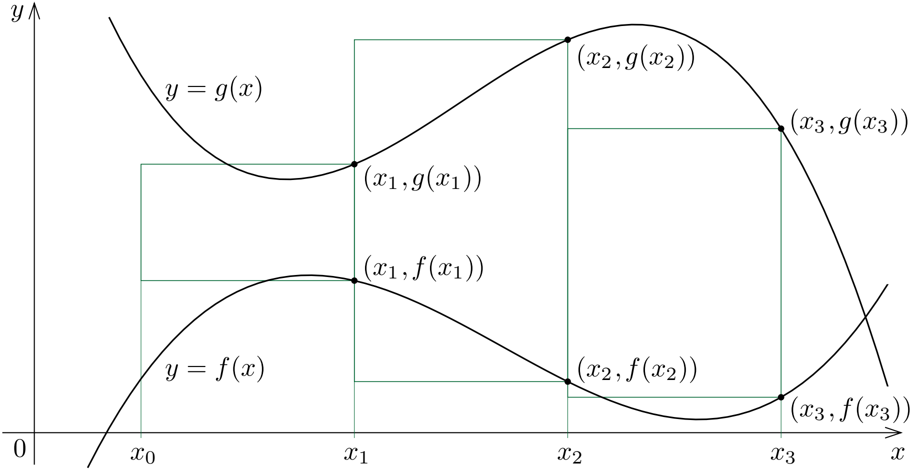
$$a \leq x \leq b \quad \text{かつ} \quad f(x) \leq y \leq g(x)$$

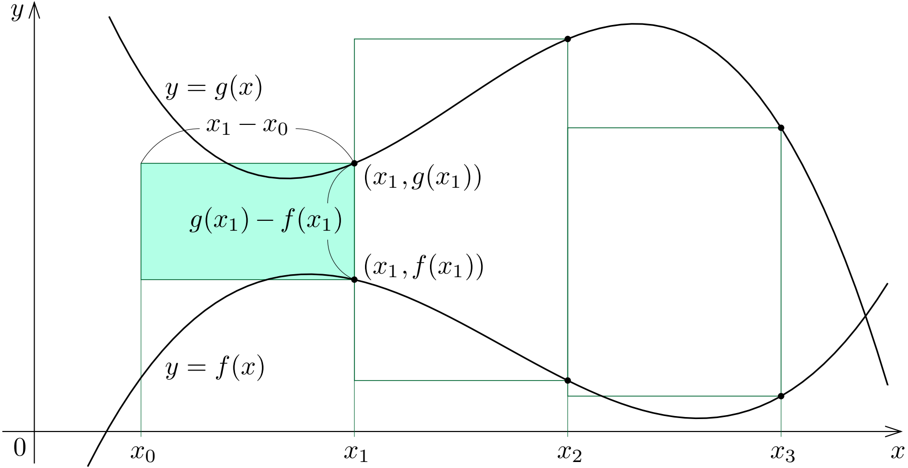
で表される領域を D の面積を考える．

不等式 $a \leq x \leq b$ と $f(x) \leq y \leq g(x)$ との連立で表される領域 D が例えば下図の明緑色の図形であるとする.



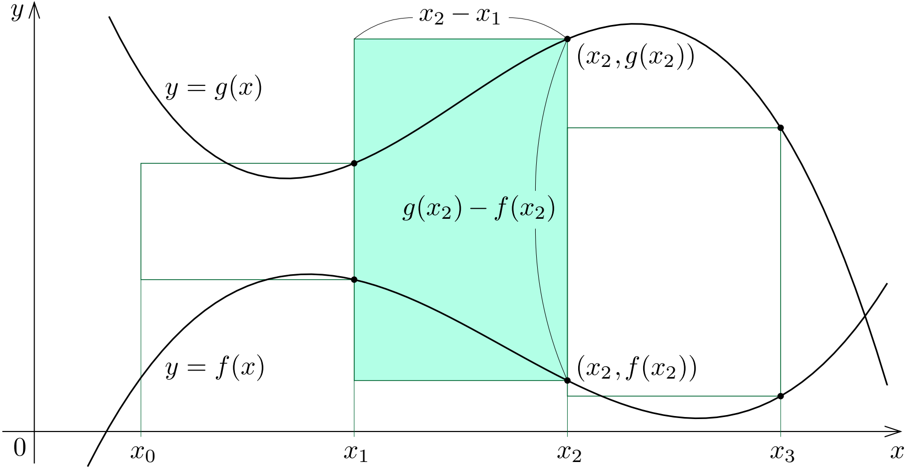
$a=x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = b$ である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 に対して下図の状況を考える.





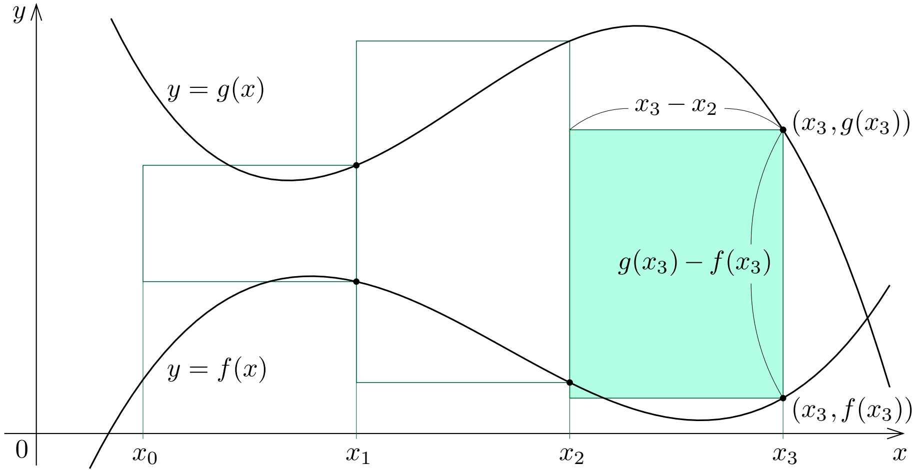
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(x_1) - f(x_1)\}(x_1 - x_0)\ .$$



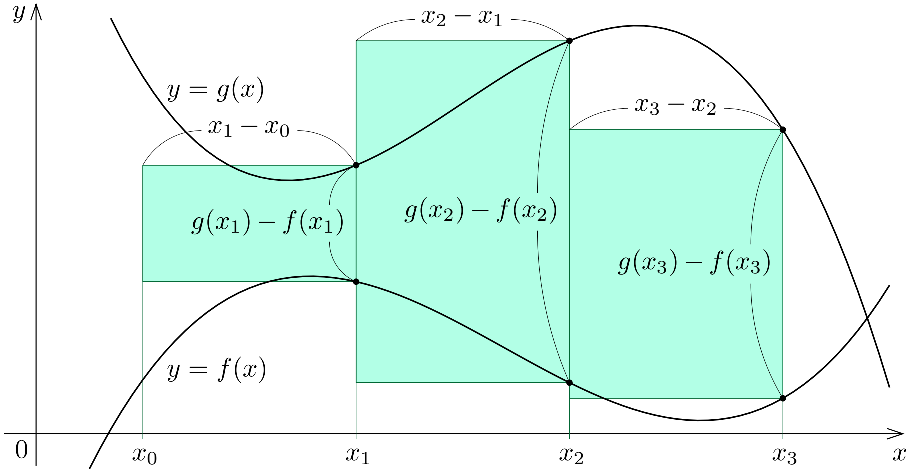
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(x_2) - f(x_2)\}(x_2 - x_1) \ .$$



上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(x_3) - f(x_3)\}(x_3 - x_2)\ .$$



上図の 3 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積は

$$\{g(x_1)-f(x_1)\}(x_1-x_0)+\{g(x_2)-f(x_2)\}(x_2-x_1)+\{g(x_3)-f(x_3)\}(x_3-x_2)\ .$$

このような 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$\{g(x_1) - f(x_1)\}(x_1 - x_0) + \{g(x_2) - f(x_2)\}(x_2 - x_1) + \{g(x_3) - f(x_3)\}(x_3 - x_2)$$
$$= \sum_{k=1}^{3} \Big[\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})\Big] \ .$$

このような 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$\{g(x_1)-f(x_1)\}(x_1-x_0)+\{g(x_2)-f(x_2)\}(x_2-x_1)+\{g(x_3)-f(x_3)\}(x_3-x_2)$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\Big[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})\Big]\ .$$

これは関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和である.

このような長方形を増やして個々の長方形を細くしていく.

このような長方形を増やして個々の長方形を細くしていく.

正の各自然数 n に対して

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとり,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})]$$

を考える;これは関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和である.

このような長方形を増やして個々の長方形を細くしていく.

正の各自然数 n に対して

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとり,

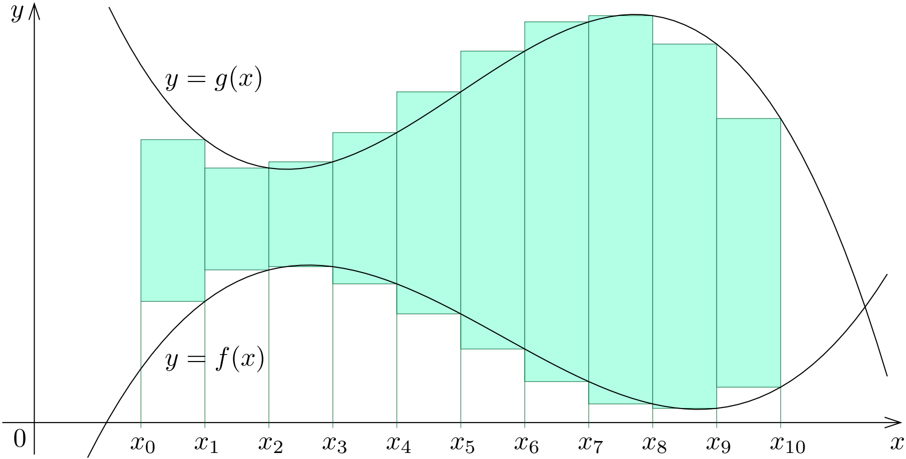
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})]$$

を考える;これは関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和である.

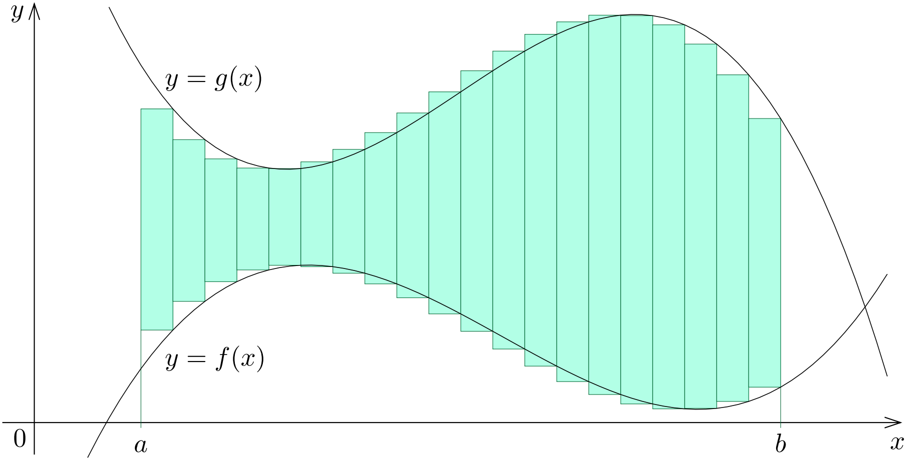
$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$$

について, $n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とする. つまり, $n \to \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n$ の間隔は 0 に限りなく近づくとする.

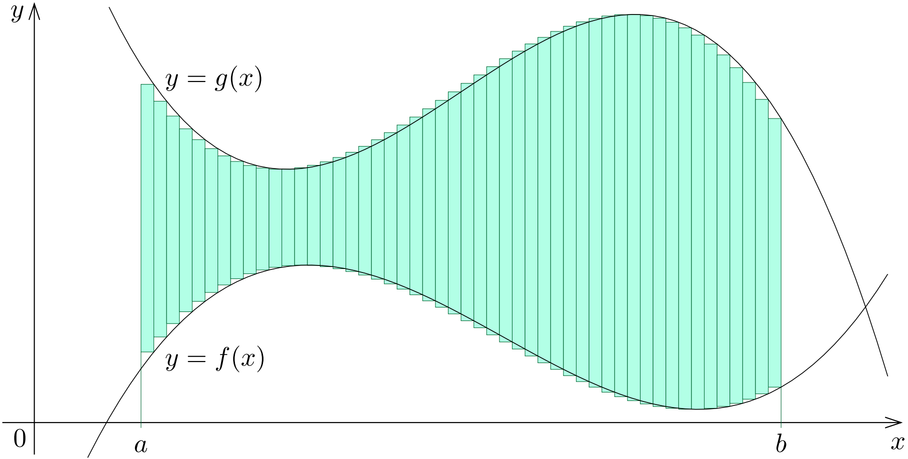
$n=10$ のとき，下図の 10 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_{10}=\sum_{k=1}^{10}[\{g(x_k)-f(y_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ である．



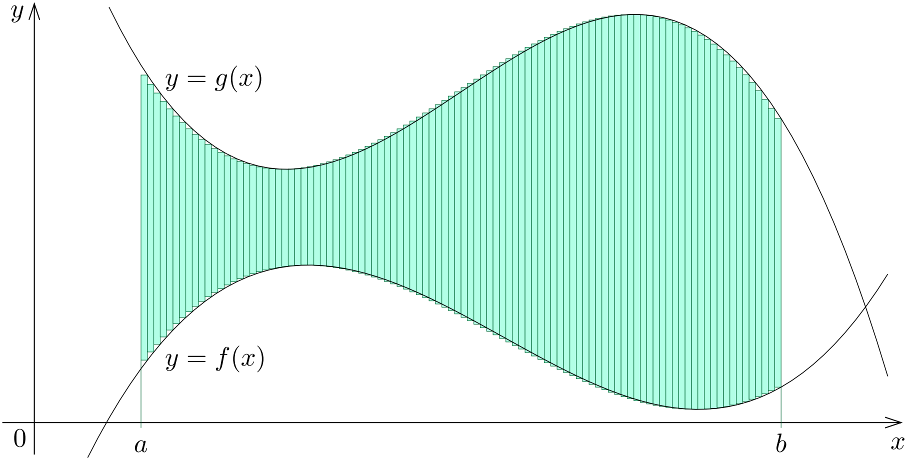
$n = 20$ のとき，下図の 20 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和 $S_{20} = \sum_{k=1}^{20} [\{g(x_k) - f(y_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ である．



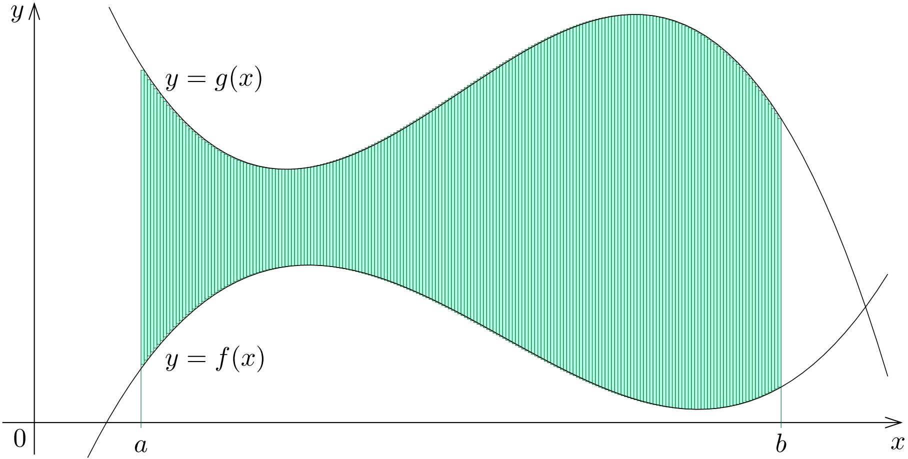
$n=50$ のとき，下図の 50 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_{50}=\sum_{k=1}^{50}[\{g(x_k)-f(y_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ である．



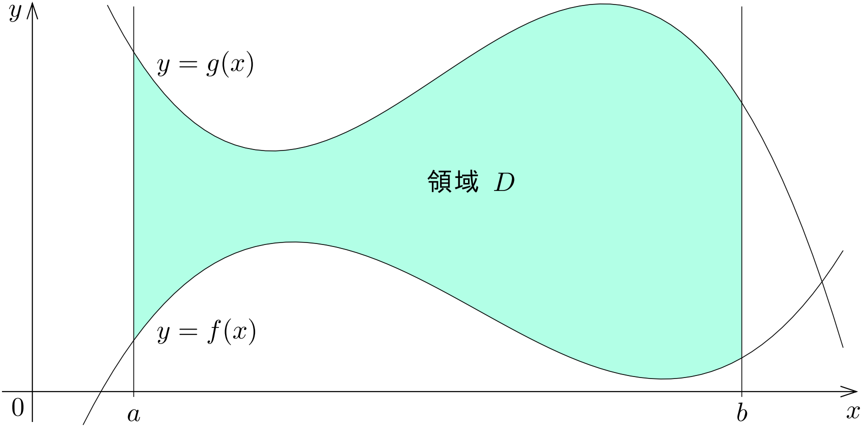
$n=100$ のとき，下図の 100 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_{100}=\sum_{k=1}^{100}[\{g(x_k)-f(y_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ である．

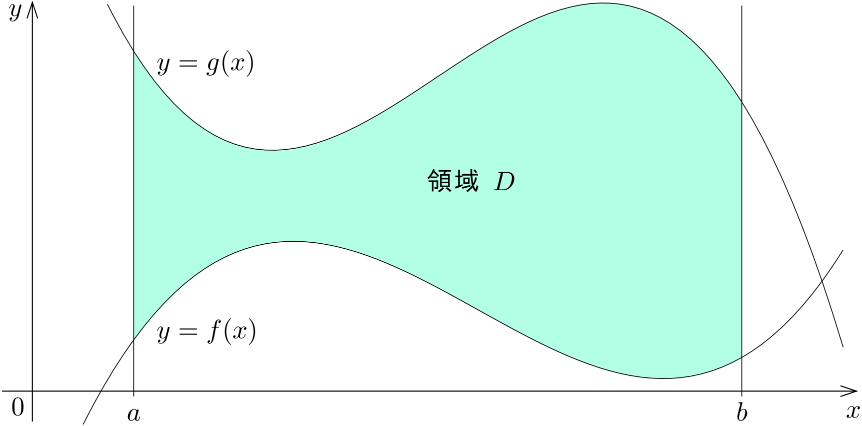


$n = 200$ のとき，下図の 200 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和 $S_{200} = \sum_{k=1}^{200} [\{g(x_k) - f(y_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ である.



このような n 個の長方形を併せた図形の面積は，関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ であり，長方形を限りなく増やして個々の長方形を限りなく細くすると元の領域 D の面積に限りなく近づく.





関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき領域 D の面積に限りなく近づく．故に領域 D の面積はリーマン和 S_n の $n\to\infty$ のときの極限値である．

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である.

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(x)-f(x)$ も a から b まで積分可能である．

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(x)-f(x)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ なので，関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_a^b\{g(x)-f(x)\}\,dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b\{g(x)-f(x)\}\,dx \ .$$

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ である．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(x)-f(x)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ なので，関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx\ .$$

故に，領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ の定積分 $\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx$ である．

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ である．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(x)-f(x)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ なので，関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx\ .$$

故に，領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ の定積分 $\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx$ である．

このようにして次の定理が成り立つ．

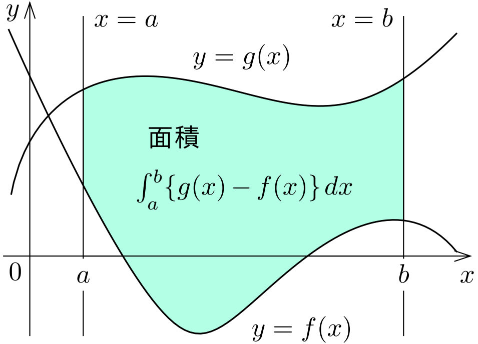
[定理 8.1]　実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能であり，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とする．xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq x \leq b \quad \text{かつ} \quad f(x) \leq y \leq g(x)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(x) - f(x)\}\,dx$$

である．



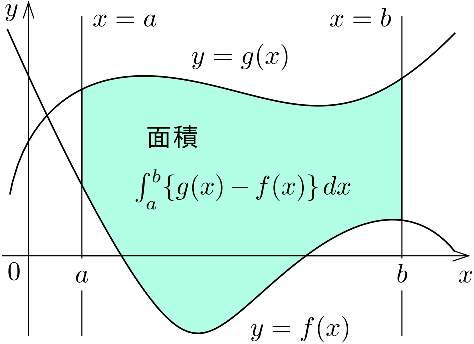
[定理 8.1] 実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能であり，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とする．xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq x \leq b \quad かつ \quad f(x) \leq y \leq g(x)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(x) - f(x)\}\,dx$$

である．



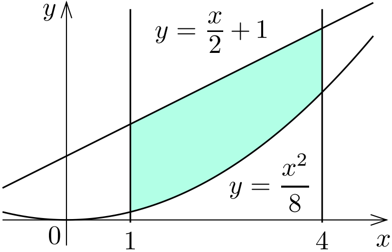
この定理を用いる際には，領域の点の x 座標の範囲と，その範囲で $f(x) \leq g(x)$ であるかどうかに注意すること．

　このように領域を長方形を併せた図形で近似して，長方形を限りなく増やして各長方形を限りなく細くしていくと長方形を併せた図形の面積が領域の面積に収束すると考えて領域の面積を求める方法を区分求積法という.

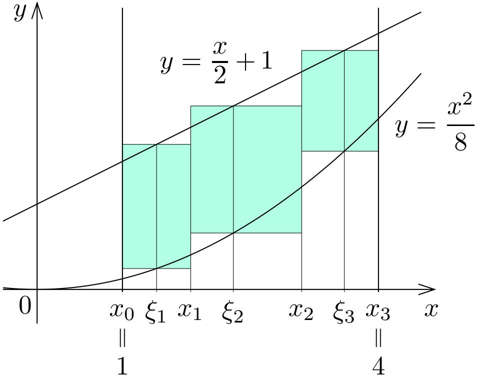
$\boxed{\text{問}8.1.1}$ xy 座標平面において連立不等式

$$1 \leq x \leq 4 \quad \text{かつ} \quad \frac{x^2}{8} \leq y \leq \frac{x}{2}+1$$

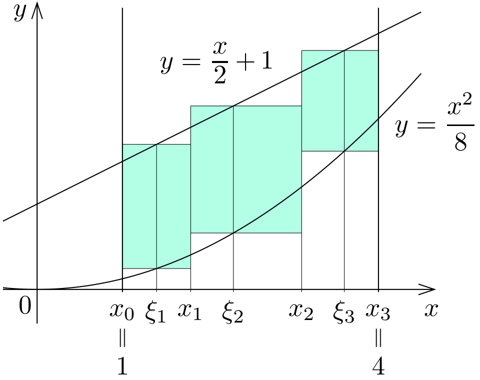
で表される領域 D の面積を求める.



(1) $1 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = 4$ である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 及び $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3$ である実数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 に対して，右図の明緑色の 3 個の長方形を併せた領域の面積 S_3 を表す式を記せ.



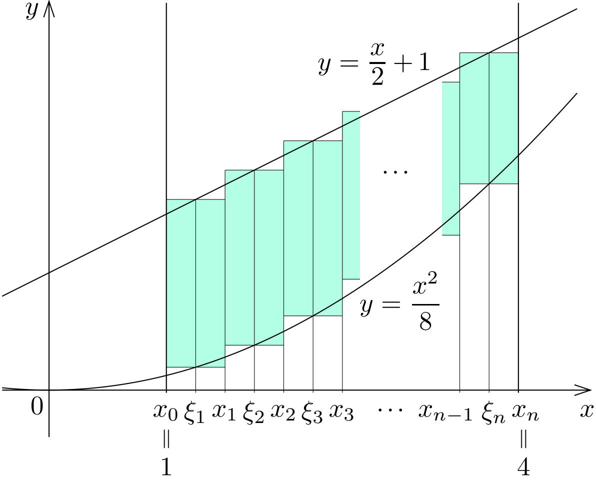
(1) $1 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = 4$ である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 及び $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3$ である実数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 に対して，右図の明緑色の 3 個の長方形を併せた領域の面積 S_3 を表す式を記せ.



$$S_3 = \left(\frac{\xi_1}{2} + 1 - \frac{{\xi_1}^2}{8}\right)(x_1 - x_0) + \left(\frac{\xi_2}{2} + 1 - \frac{{\xi_2}^2}{8}\right)(x_2 - x_1) + \left(\frac{\xi_3}{2} + 1 - \frac{{\xi_3}^2}{8}\right)(x_3 - x_2)$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\xi_k}{2} + 1 - \frac{{\xi_k}^2}{8}\right)(x_k - x_{k-1}) \ .$$

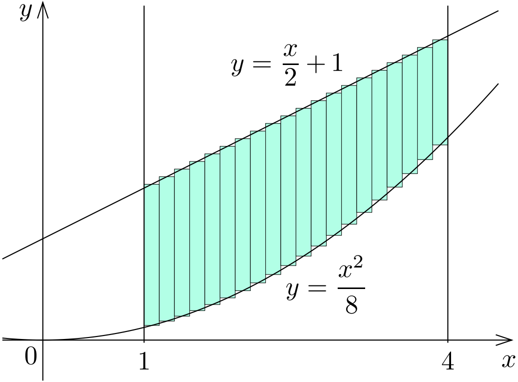
(2) 変数 n を正の自然数とする．$1 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ に対して，右図のような明緑色の n 個の長方形を併せた領域の面積 S_n を表す式を記せ．またこの式を何というか記せ．



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{\xi_k}{2} + 1 - \frac{{\xi_k}^2}{8} \right) (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

これは関数 $\dfrac{x}{2} + 1 - \dfrac{x^2}{8}$ のリーマン和である.

(3) $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ について $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする；つまり $n \to \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ の間隔は総て 0 に限りなく近付くとする．$n \to \infty$ のとき S_n は右図のように領域 D の面積に限りなく近付く；つまり S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が領域 D の面積になる．このことを用いて，定積分によって領域 D の面積を求めよ．

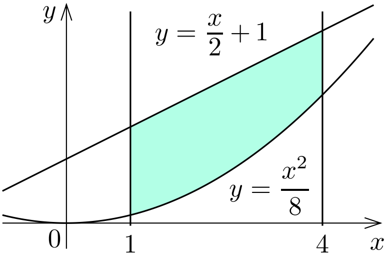


$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ なので，関数 $\dfrac{x}{2}+1-\dfrac{x^2}{8}$ のリーマン和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{\xi_k}{2}+1-\frac{{\xi_k}^2}{8}\right)(x_k - x_{k-1})\right\}$$

の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ は定積分

$$\int_1^4\left(\frac{x}{2}+1-\frac{x^2}{8}\right)dx$$

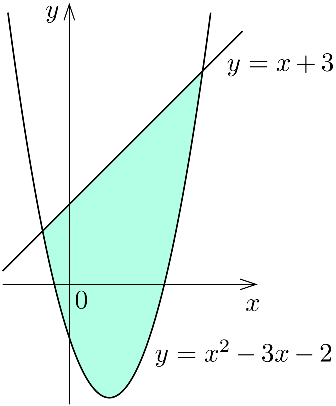


である．故に D の面積は

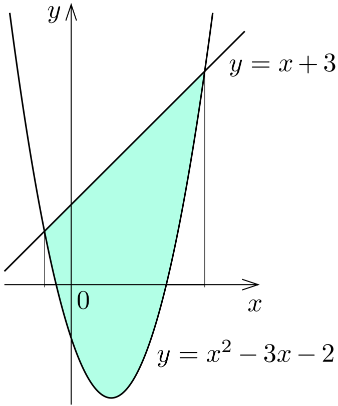
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_1^4\left(\frac{x}{2}+1-\frac{x^2}{8}\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{24}x^3\right]_1^4 = \frac{33}{8}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める.



例 xy 座標平面において関数 $y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める．まず，$y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める．

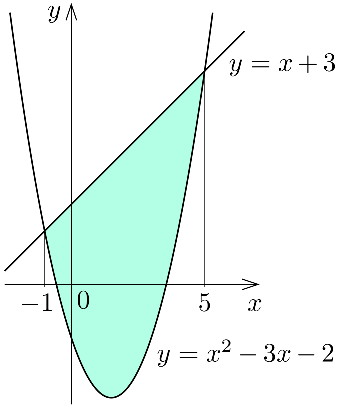


$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める．まず，$y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める．$x^2-3x-2=x+3$ とすると，

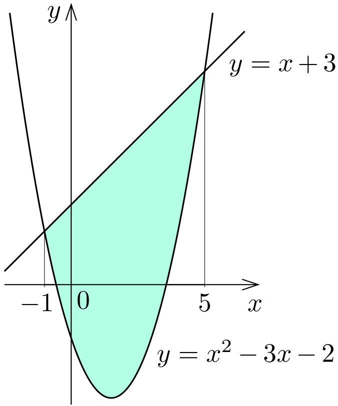
$$x^2-4x-5=0\ ,$$

$$(x+1)(x-5)=0\ ,$$

$$x=-1,5\ .$$



$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める．まず，$y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める．$x^2-3x-2=x+3$ とすると，



$$x^2-4x-5=0\ ,$$

$$(x+1)(x-5)=0\ ,$$

$$x=-1,5\ .$$

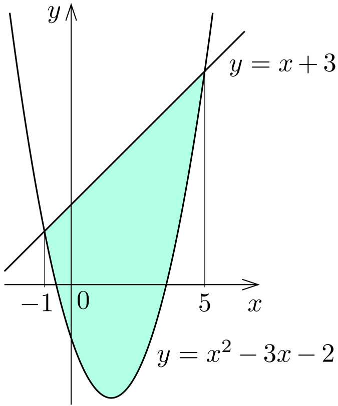
$y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとの共有点の x 座標は -1 と 5 の 2 個である．$-1\leq x\leq 5$ のとき $x^2-3x-2\leq x+3$ ．

$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める．まず，$y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める．$x^2-3x-2=x+3$ とすると，

$$x^2-4x-5=0\ ,$$

$$(x+1)(x-5)=0\ ,$$

$$x=-1,5\ .$$

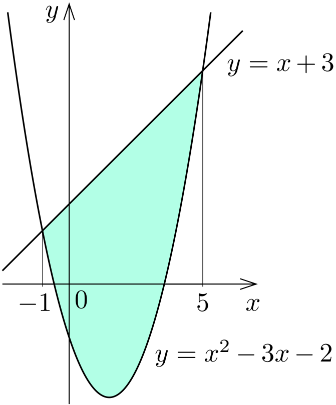


$y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとの共有点の x 座標は -1 と 5 の 2 個である．$-1\le x\le 5$ のとき $x^2-3x-2\le x+3$ ．従って，$y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積は

$$\int_{-1}^{5}\{(x+3)-(x^2-3x-2)\}\,dx=\int_{-1}^{5}(-x^2+4x+5)\,dx$$

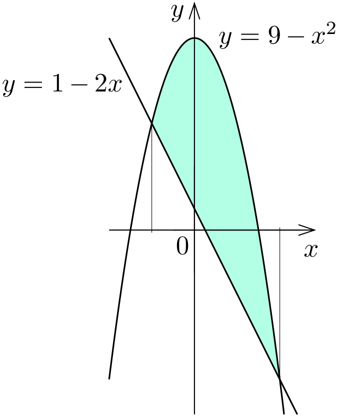
$y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積は

$$\int_{-1}^{5}\{(x+3)-(x^2-3x-2)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{5}(-x^2+4x+5)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\right]_{-1}^{5}$$
$$=-\frac{125}{3}+50+25-\left(\frac{1}{3}+2-5\right)$$
$$=36\ .$$



終

$\boxed{問8.1.2}$ xy 座標平面において関数 $y = 9 - x^2$ のグラフと $y = 1 - 2x$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求めよ.



方程式 $9 - x^2 = 1 - 2x$ を解くと,

$= 0$, $(\quad)(\quad) = 0$,

$x =\ ,$. $\le x \le$ のとき

$9 - x^2 \quad 1 - 2x$. 従って求める面積は

$\boxed{問 8.1.2}$ xy 座標平面において関数 $y=9-x^2$ のグラフと $y=1-2x$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求めよ.

方程式 $9-x^2=1-2x$ を解くと,

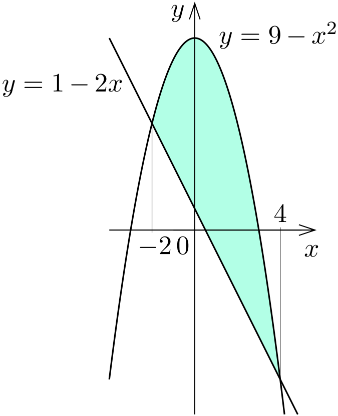
$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$,

$x=4,-2$. $-2\leq x\leq 4$ のとき

$9-x^2\geq 1-2x$. 従って求める面積は

$$\int_{-2}^{4}\{(\qquad)-(\qquad)\}dx$$

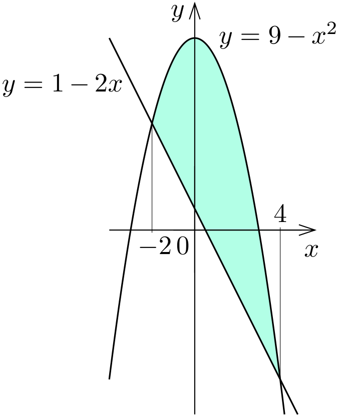
$$=$$



$\boxed{\text{問}8.1.2}$ xy 座標平面において関数 $y=9-x^2$ のグラフと $y=1-2x$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求めよ.

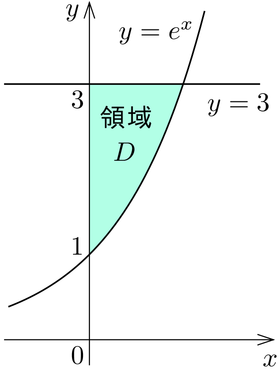
方程式 $9-x^2=1-2x$ を解くと,
$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$,
$x=4,-2$. $-2\leq x\leq 4$ のとき
$9-x^2\geq 1-2x$. 従って求める面積は

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{4}\{(9-x^2)-(1-2x)\}\,dx\\
&=\int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)\,dx\\
&=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+8x\right]_{-2}^{4}\\
&=36\ .
\end{aligned}$$

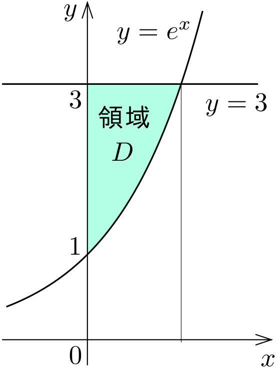


$\boxed{\text{終}}$

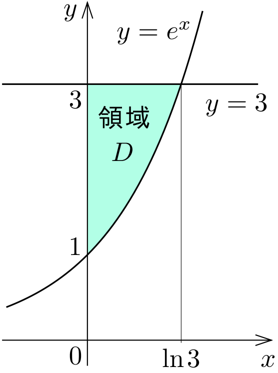
例 xy 座標平面において指数関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.



$\boxed{例}$ xy 座標平面において指数関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める．まず関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ との共有点の x 座標を求める．



例　xy 座標平面において指数関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める．まず関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標を求める．$y=e^x$ かつ $y=3$ とすると，$e^x=3$ なので $x=\ln 3$ ．

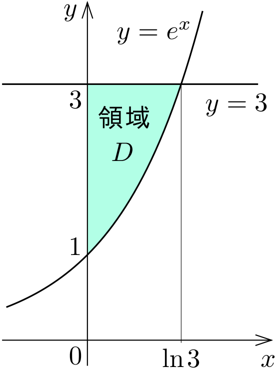


各実数 a 及び正の各実数 b について，

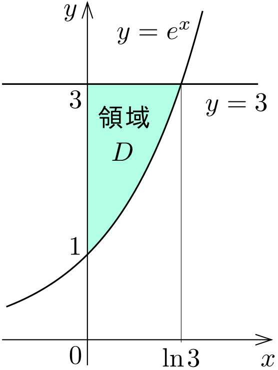
$e^a=b$ ならば $a=\ln e^a=\ln b$ ，

$\ln b=a$ ならば $b=e^{\ln b}=e^a$ ．

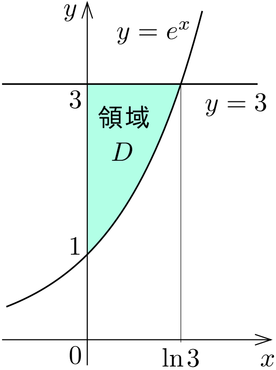
例　xy 座標平面において指数関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める．まず関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ との共有点の x 座標を求める． $y = e^x$ かつ $y = 3$ とすると， $e^x = 3$ なので $x = \ln 3$ ．関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である．



$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において指数関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める．まず関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標を求める． $y=e^x$ かつ $y=3$ とすると， $e^x=3$ なので $x=\ln 3$ ．関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である．領域 D の点の x 座標の範囲は $0 \leq x \leq \ln 3$ であり，このとき $e^x \leq e^{\ln 3}=3$ ．



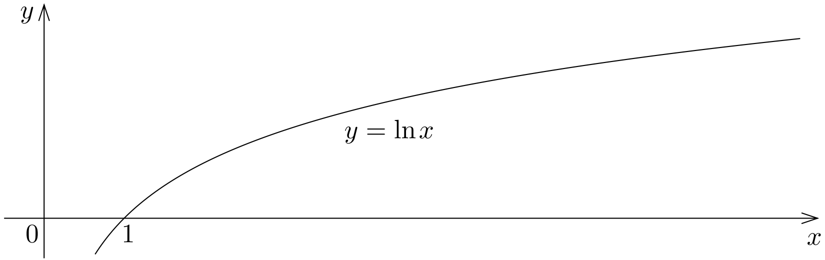
例 xy 座標平面において指数関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める．まず関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標を求める． $y=e^x$ かつ $y=3$ とすると， $e^x=3$ なので $x=\ln 3$ ．関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である．領域 D の点の x 座標の範囲は $0 \leq x \leq \ln 3$ であり，このとき $e^x \leq e^{\ln 3}=3$ ．領域 D の面積は



$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 3}(3-e^x)\,dx &= \Big[3x-e^x\Big]_0^{\ln 3} = 3\ln 3 - e^{\ln 3} - (-1) = 3\ln 3 - 3 + 1 \\ &= \ln 27 - 2 \ .\end{aligned}$$

終

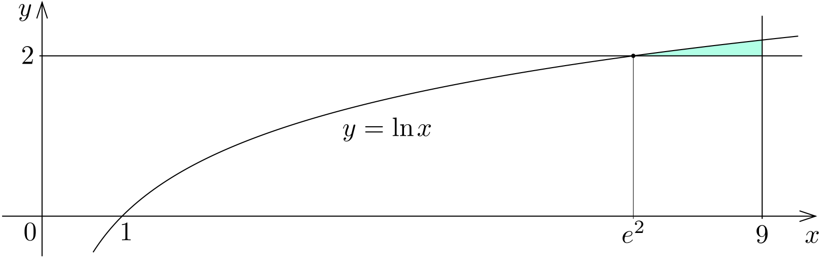
$\boxed{問 8.1.3}$ xy 座標平面において対数関数 $y = \ln x$ のグラフと直線 $x = 9$ と直線 $y = 2$ とで囲まれる領域 D の面積を求めよ.



$\ln x = 2$ とすると $x =$ 　　　. 領域 D の点の x 座標の範囲は 　　$\leq x \leq$ 　　であり, このとき $\ln x$ 　$\ln e^2 = 2$. 領域 D の面積は

$$\int \ (\qquad\qquad) dx =$$

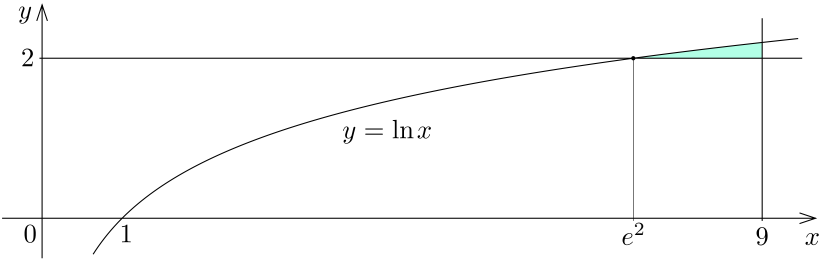
$\boxed{\text{問}8.1.3}$ xy 座標平面において対数関数 $y = \ln x$ のグラフと直線 $x = 9$ と直線 $y = 2$ とで囲まれる領域 D の面積を求めよ.



$\ln x = 2$ とすると $x = e^2 < 9$. 領域 D の点の x 座標の範囲は $e^2 \leq x \leq 9$ であり, このとき $\ln x \geq \ln e^2 = 2$. 領域 D の面積は

$$\int \ (\qquad\qquad) \, dx =$$

$\boxed{問8.1.3}$ xy 座標平面において対数関数 $y = \ln x$ のグラフと直線 $x = 9$ と直線 $y = 2$ とで囲まれる領域 D の面積を求めよ.

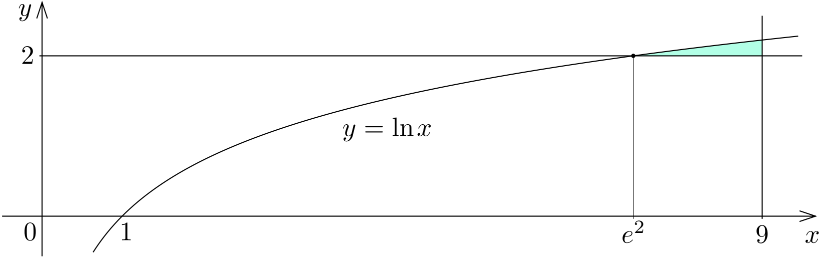


$\ln x = 2$ とすると $x = e^2 < 9$. 領域 D の点の x 座標の範囲は $e^2 \leq x \leq 9$ であり, このとき $\ln x \geq \ln e^2 = 2$. 領域 D の面積は

$$\int_{e^2}^{9} (\ln x - 2)\, dx = \left[x \ln x - x - 2x \right]_{e^2}^{9} =$$

$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$ (C は積分定数)

$\boxed{\text{問}8.1.3}$ xy 座標平面において対数関数 $y = \ln x$ のグラフと直線 $x = 9$ と直線 $y = 2$ とで囲まれる領域 D の面積を求めよ.

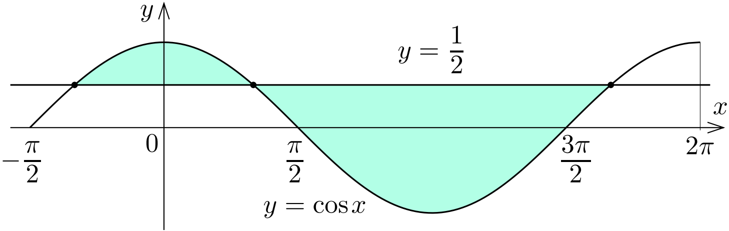


$\ln x = 2$ とすると $x = e^2 < 9$. 領域 D の点の x 座標の範囲は $e^2 \leq x \leq 9$ であり, このとき $\ln x \geq \ln e^2 = 2$. 領域 D の面積は

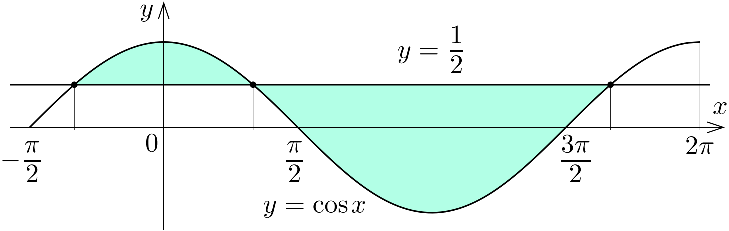
$$\int_{e^2}^{9} (\ln x - 2)\, dx = \Big[x \ln x - x - 2x \Big]_{e^2}^{9} = 9 \ln 9 - 27 - e^2 \ln e^2 + 3e^2$$
$$= e^2 + 9 \ln 9 - 27 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

例　xy 座標平面において関数 $y=\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.



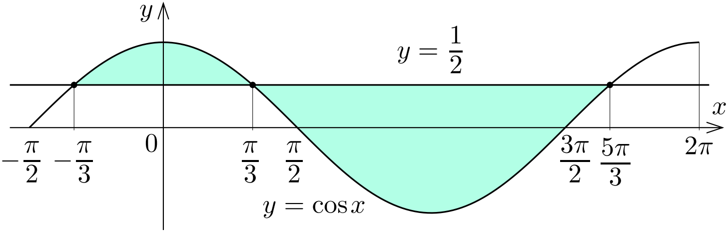
例　xy 座標平面において関数 $y=\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める．



$-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ の範囲で，$\cos x=\dfrac{1}{2}$ とすると，

$x=$

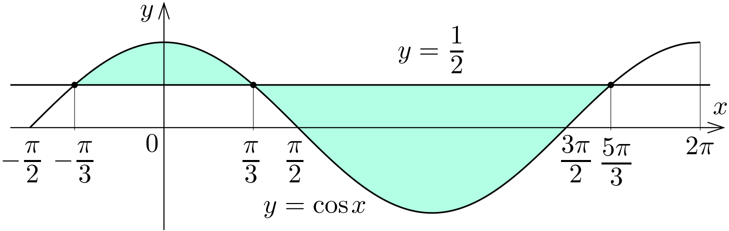
例　xy 座標平面において関数 $y=\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める．



$-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ の範囲で，$\cos x = \dfrac{1}{2}$ とすると，

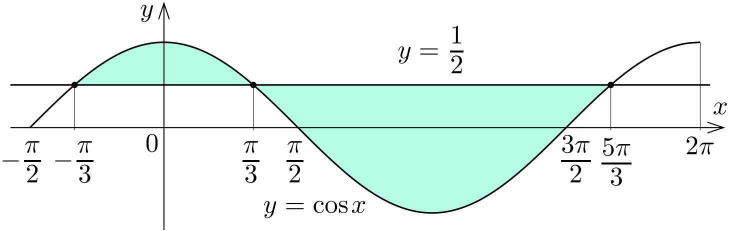
$x = -\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$ ．

例 xy 座標平面において関数 $y=\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める． $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ の範囲で， $\cos x=\dfrac{1}{2}$ とすると，



$x=-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$ ． $-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$ のとき $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$ ． $\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{3}$ のとき $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$ ．

例　xy 座標平面において関数 $y=\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める．



$-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ の範囲で，$\cos x = \dfrac{1}{2}$ とすると，$x = -\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$ ．$-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$ のとき $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$ ．$\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{3}$ のとき $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$ ．領域の面積は

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \cos x\right) dx$$

領域の面積は

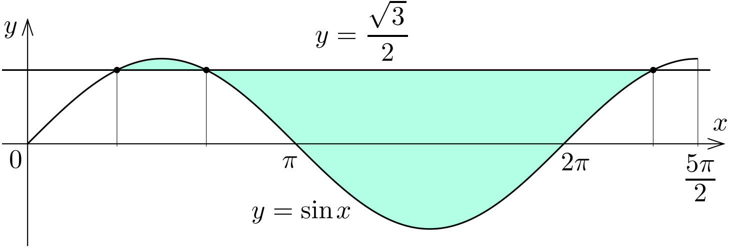
$$
\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)dx\\
&=\left[\sin x-\frac{x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}+\left[\frac{x}{2}-\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}\\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&=\frac{\pi}{3}+2\sqrt{3}\quad.
\end{aligned}
$$

終

$\boxed{問8.1.4}$ xy 座標平面において関数 $y = \sin x$ $\left(0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2}\right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2}$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと

$x = \quad , \quad , \quad$.

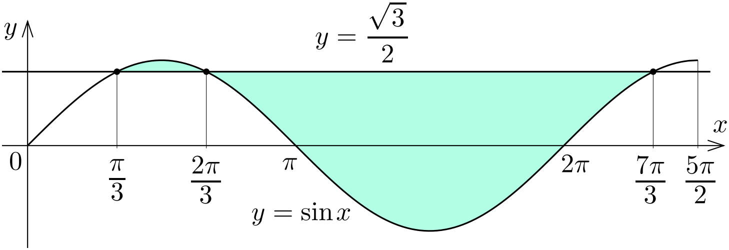


$\leq x \leq \quad$ のとき $\sin x \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\quad \leq x \leq \quad$ のとき $\sin x \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 領域の面積は

$$\int \left(\qquad \right) dx + \int \left(\qquad \right) dx$$

$\boxed{\text{問}8.1.4}$ xy 座標平面において関数 $y=\sin x$ $\left(0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2}\right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2}$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと $x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{7\pi}{3}$.



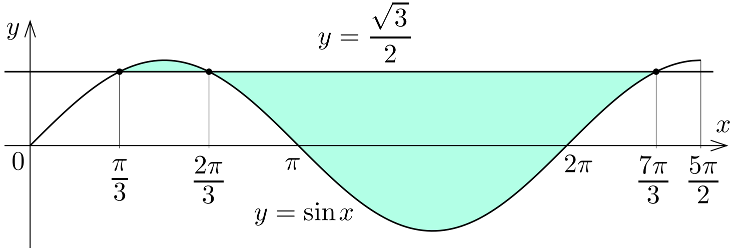
$\leq x \leq$ 　　の

とき $\sin x$ 　 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 　　$\leq x \leq$ 　　のとき $\sin x$ 　 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 領域の面積は

$$\int \quad \Bigg(\qquad\qquad \Bigg) dx + \int \quad \Bigg(\qquad\qquad \Bigg) dx$$

$\boxed{\text{問}8.1.4}$ xy 座標平面において関数 $y=\sin x$ $\left(\ 0\leq x\leq \dfrac{5\pi}{2}\ \right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求めよ.

$0\leq x\leq \dfrac{5\pi}{2}$ の範囲で方程式 $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと $x=\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{7\pi}{3}$. $\dfrac{\pi}{3}\leq x\leq \dfrac{2\pi}{3}$ の



とき $\sin x\geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\dfrac{2\pi}{3}\leq x\leq \dfrac{7\pi}{3}$ のとき $\sin x\leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 領域の面積は

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx+\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x\right)dx$$

領域の面積は

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x\right) dx$$

$$= \left[-\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} + \left[\frac{\sqrt{3}}{2} x + \cos x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}}$$

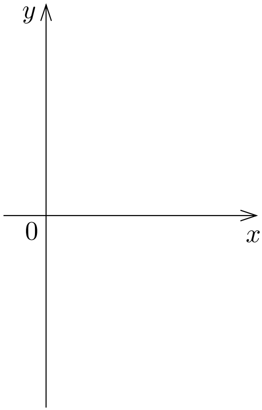
$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6} + \frac{7\sqrt{3}\,\pi}{6} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= 2 + \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{3} \quad .$$

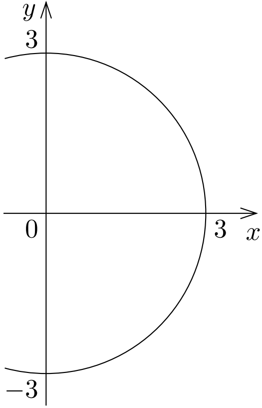
$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$　xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2 + y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2 + y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める. 不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ は　　　　　　　　　　（境界を含む）を表す.

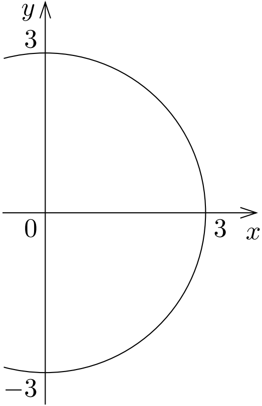


$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2 + y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める. 不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ は円で囲まれる領域（境界を含む）を表す.

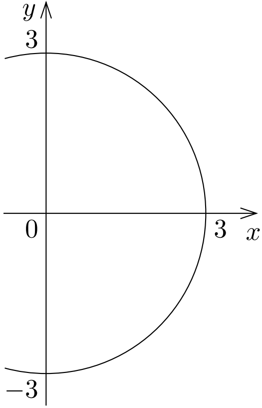


例 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める．不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ は円で囲まれる領域（境界を含む）を表す．この不等式より，$x^2-9 \leq -y^2 \leq 0$,

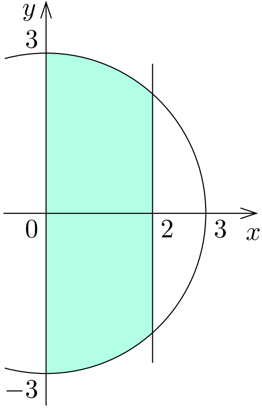
任意の実数 a について，$a^2 \geq 0$ ， $-a^2 \leq 0$.



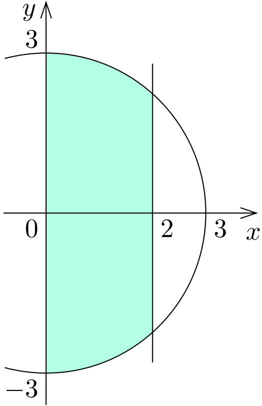
例 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める．不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ は円で囲まれる領域（境界を含む）を表す．この不等式より，$x^2-9 \leq -y^2 \leq 0$ ，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ．（念のために調べた.）



$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める．不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ は円で囲まれる領域（境界を含む）を表す．この不等式より，$x^2-9 \leq -y^2 \leq 0$ ，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ． $0 \leq x \leq 2$ である実数 x に対して不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ を y について解く．



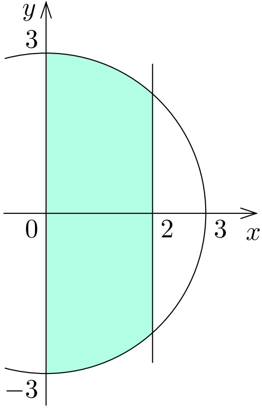
例 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める．不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ は円で囲まれる領域（境界を含む）を表す．この不等式より，$x^2-9 \leq -y^2 \leq 0$ ，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ．$0 \leq x \leq 2$ である実数 x に対して不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ を y について解く．



$x^2+y^2 \leq 9 \iff y^2-(9-x^2) \leq 0$

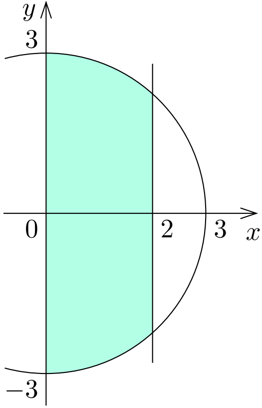
$-3 \leq x \leq 3$ のとき $9-x^2 \geq 0$ ．

例 xy 座標平面において不等式 $0 \le x \le 2$ と $x^2+y^2 \le 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める．不等式 $x^2+y^2 \le 9$ は円で囲まれる領域（境界を含む）を表す．この不等式より，$x^2-9 \le -y^2 \le 0$ ，$(x+3)(x-3) \le 0$ ，$-3 \le x \le 3$ ． $0 \le x \le 2$ である実数 x に対して不等式 $x^2+y^2 \le 9$ を y について解く．



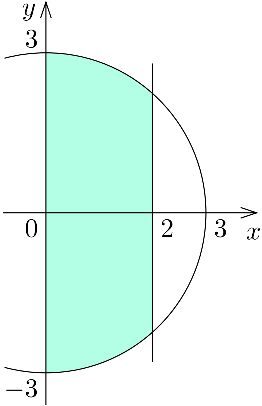
$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 \le 9 &\iff y^2-(9-x^2) \le 0 \\
&\iff y^2-\sqrt{9-x^2}^{\,2} \le 0
\end{aligned}
$$

$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める．不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ は円で囲まれる領域（境界を含む）を表す．この不等式より，$x^2-9 \leq -y^2 \leq 0$ ，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ． $0 \leq x \leq 2$ である実数 x に対して不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ を y について解く．



$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 \leq 9 &\iff y^2-(9-x^2) \leq 0 \\
&\iff y^2-\sqrt{9-x^2}^{\,2} \leq 0 \\
&\iff \left(y+\sqrt{9-x^2}\right)\left(y-\sqrt{9-x^2}\right) \leq 0
\end{aligned}
$$

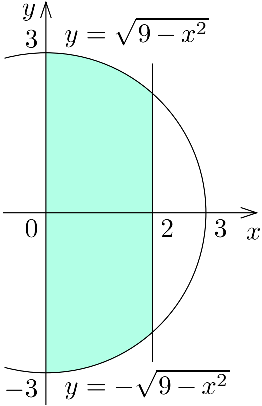
例 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める．不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ は円で囲まれる領域（境界を含む）を表す．この不等式より，$x^2-9 \leq -y^2 \leq 0$ ，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ．$0 \leq x \leq 2$ である実数 x に対して不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ を y について解く．



$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 \leq 9 &\iff y^2-(9-x^2) \leq 0 \\
&\iff y^2-\sqrt{9-x^2}^{\,2} \leq 0 \\
&\iff \left(y+\sqrt{9-x^2}\right)\left(y-\sqrt{9-x^2}\right) \leq 0 \\
&\iff -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2}\ .
\end{aligned}
$$

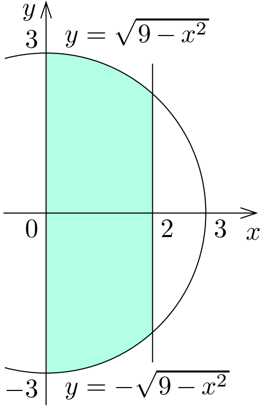
例 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める．不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ は円で囲まれる領域（境界を含む）を表す．この不等式より， $x^2-9 \leq -y^2 \leq 0$ ， $(x+3)(x-3) \leq 0$ ， $-3 \leq x \leq 3$ ． $0 \leq x \leq 2$ である実数 x に対して不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ を y について解く．

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 \leq 9 &\iff y^2-(9-x^2) \leq 0 \\
&\iff y^2-\sqrt{9-x^2}^{\,2} \leq 0 \\
&\iff \left(y+\sqrt{9-x^2}\right)\left(y-\sqrt{9-x^2}\right) \leq 0 \\
&\iff -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \ .
\end{aligned}
$$



不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積は

$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める．不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ は円で囲まれる領域（境界を含む）を表す．この不等式より，$x^2-9 \leq -y^2 \leq 0$ ，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ． $0 \leq x \leq 2$ である実数 x に対して不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ を y について解く．



$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 \leq 9 &\iff y^2-(9-x^2) \leq 0 \\
&\iff y^2-\sqrt{9-x^2}^{\,2} \leq 0 \\
&\iff \left(y+\sqrt{9-x^2}\right)\left(y-\sqrt{9-x^2}\right) \leq 0 \\
&\iff -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \ .
\end{aligned}
$$

不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積は

$$\int_0^2 \left\{\sqrt{9-x^2}-\left(-\sqrt{9-x^2}\right)\right\}dx = 2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx \ .$$

$-3 \leq x \leq 3$ なので $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$.

$-3 \leq x \leq 3$ なので $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ ． 変数 t を $t = \sin^{-1} \dfrac{x}{3}$ とおく.

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X に対して $\sin^{-1} X$ の値がある.

$-3 \leq x \leq 3$ なので $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ ．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく．

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ．

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X について $\sin(\sin^{-1}X) = X$ ．

$-3 \leq x \leq 3$ なので $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ ．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり

$-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X について $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}X \leq \dfrac{\pi}{2}$ ．

$-3 \leq x \leq 3$ なので $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ ．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり

$-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - (3\sin t)^2} = \sqrt{9(1 - \sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t \ .$$

$-3 \leq x \leq 3$ なので $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ ．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり

$-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t \ .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので $dx = 3\cos t\, dt$ ．

$-3 \leq x \leq 3$ なので $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ ．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり

$-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t \ .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので $dx = 3\cos t\, dt$ ． $x = 0$ のとき $t = 0$ ．

$x = 2$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ ．

$-3 \leq x \leq 3$ なので $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ ．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり

$-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t \ .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので $dx = 3\cos t\,dt$ ． $x = 0$ のとき $t = 0$ ．

$x = 2$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ ．領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 2\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 3\cos t\, 3\cos t\,dt = 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 2\cos^2 t\,dt$$

$-3 \leq x \leq 3$ なので $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ ．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり

$-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t \ .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので $dx = 3\cos t\,dt$ ． $x = 0$ のとき $t = 0$ ．

$x = 2$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ ．領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 2\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 3\cos t\, 3\cos t\,dt = 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 2\cos^2 t\,dt$$

$$= 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} (1+\cos 2t)\,dt \qquad \cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$$

$-3 \leq x \leq 3$ なので $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ ．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり

$-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t \ .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので $dx = 3\cos t\, dt$ ． $x = 0$ のとき $t = 0$ ．

$x = 2$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ ．領域 D の面積は

$$\begin{aligned}
2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\, dx &= 2\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 3\cos t\, 3\cos t\, dt = 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 2\cos^2 t\, dt \\
&= 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} (1+\cos 2t)\, dt = 9\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} \\
&= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \ .
\end{aligned}$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \qquad \sin 2a = 2\sin a\cos a$$

$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\ .$$

領域 D の面積は

$$\begin{aligned} 2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx &= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \\ &= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \quad . \end{aligned}$$

ここで,

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \quad .$$

領域 D の面積は

$$
\begin{aligned}
2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx &= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \\
&= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \quad .
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \quad .
$$

$$
\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \quad .
$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \ .$$

ここで，

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \ .$$

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \ .$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{2}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{2}{3}\right) \geq 0$ ，よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \ .$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$$
$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \ .$$

ここで,

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \ .$$

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \ .$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\frac{2}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \geq 0$ ，よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \ .$$

故に

$$9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 2\sqrt{5} \ .$$

領域 D の面積は $2\sqrt{5}+9\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ である. $\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}8.1.5}$ xy 座標平面において不等式 $x \geq 3$ と $x^2+y^2 \leq 25$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

不等式 $x^2+y^2 \leq 25$ より, $x^2-25 \quad\quad 0$, $(x+\quad)(x-\quad) \leq 0$, $\quad\quad \leq x \leq \quad$.

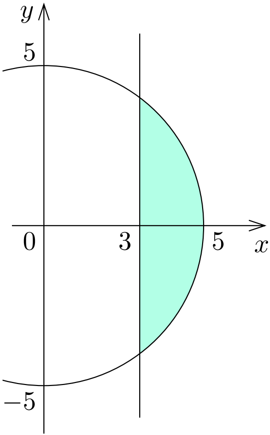
$3 \leq x \leq \quad$ である実数 x に対して不等式 $x^2+y^2 \leq 25$ を y について解く:

$$y^2-(\qquad\qquad) \leq 0 \ ,$$

$$\bigl(y \qquad\qquad\qquad\bigr)\bigl(y \qquad\qquad\qquad\bigr) \leq 0 \ ,$$

$$\qquad \leq y \leq \qquad\qquad .$$

領域 D の面積は



$\boxed{問8.1.5}$ xy 座標平面において不等式 $x \geq 3$ と $x^2+y^2 \leq 25$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

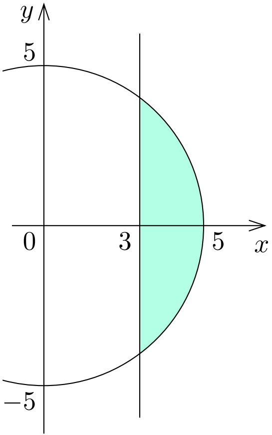
不等式 $x^2+y^2 \leq 25$ より, $x^2-25 \leq -y^2 \leq 0$, $(x+5)(x-5) \leq 0$, $-5 \leq x \leq 5$.
$3 \leq x \leq 5$ である実数 x に対して不等式 $x^2+y^2 \leq 25$ を y について解く:

$$y^2 - (\qquad\qquad) \leq 0 ,$$

$$\big(y \qquad\qquad\qquad\qquad\big)\big(y \qquad\qquad\qquad\qquad\big) \leq 0 ,$$

$$\qquad\qquad \leq y \leq \qquad\qquad .$$

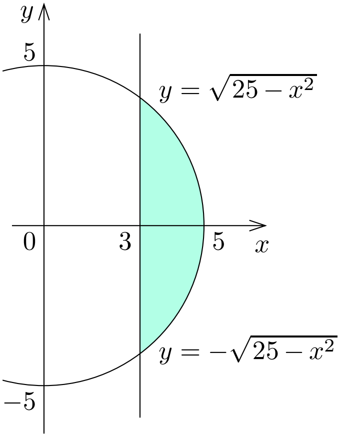
領域 D の面積は



$\boxed{\text{問}8.1.5}$ xy 座標平面において不等式 $x \geq 3$ と $x^2+y^2 \leq 25$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

不等式 $x^2+y^2 \leq 25$ より, $x^2-25 \leq -y^2 \leq 0$, $(x+5)(x-5) \leq 0$, $-5 \leq x \leq 5$. $3 \leq x \leq 5$ である実数 x に対して不等式 $x^2+y^2 \leq 25$ を y について解く:

$$y^2-(25-x^2) \leq 0 \ ,$$
$$\left(y+\sqrt{25-x^2}\right)\left(y-\sqrt{25-x^2}\right) \leq 0 \ ,$$
$$-\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \ .$$

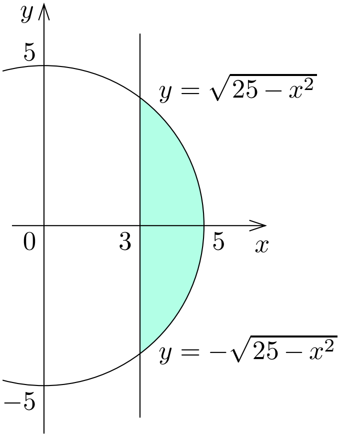


領域 D の面積は

$\boxed{問8.1.5}$ xy 座標平面において不等式 $x \geq 3$ と $x^2+y^2 \leq 25$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

不等式 $x^2+y^2 \leq 25$ より, $x^2-25 \leq -y^2 \leq 0$, $(x+5)(x-5) \leq 0$, $-5 \leq x \leq 5$. $3 \leq x \leq 5$ である実数 x に対して不等式 $x^2+y^2 \leq 25$ を y について解く:

$$y^2-(25-x^2) \leq 0 \ ,$$
$$\bigl(y+\sqrt{25-x^2}\bigr)\bigl(y-\sqrt{25-x^2}\bigr) \leq 0 \ ,$$
$$-\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \ .$$



領域 D の面積は

$$\int_3^5 \bigl\{\sqrt{25-x^2}-\bigl(-\sqrt{25-x^2}\bigr)\bigr\}\,dx$$
$$=2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$$

$-5 \leq x \leq 5$ なので $-1 \leq \dfrac{x}{5} \leq 1$．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{5}$ とおく． $\sin t = \dfrac{x}{5}$ なので $x = 5\sin t$．　$\leq \sin^{-1}\dfrac{x}{5} \leq$　つまり　$\leq t \leq$　なので $\cos t$　0．

$$\sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - (\qquad)^2} =$$

$x =$　より $\dfrac{dx}{dt} =$　なので $dx =$　． $x = 3$ のとき $t =$　． $x = 5$ のとき $t =$　．領域 D の面積は

$$2\int_3^5 \sqrt{25 - x^2}\,dx = 2\int \qquad dt =$$

$-5 \leq x \leq 5$ なので $-1 \leq \dfrac{x}{5} \leq 1$ ．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{5}$ とおく． $\sin t = \dfrac{x}{5}$ なので $x = 5\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{5} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(5\sin t)^2} = \sqrt{25(1-\sin^2 t)} = 5\sqrt{\cos^2 t} = 5\cos t \ .$$

$x = 5\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 5\cos t$ なので $dx = 5\cos t\, dt$ ． $x = 3$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ ． $x = 5$ のとき $t = \dfrac{\pi}{2}$ ．領域 D の面積は

$$2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\,dx = 2\int \qquad\qquad\qquad\qquad dt =$$

$-5 \leq x \leq 5$ なので $-1 \leq \dfrac{x}{5} \leq 1$ ．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{5}$ とおく． $\sin t = \dfrac{x}{5}$ なので $x = 5\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{5} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - (5\sin t)^2} = \sqrt{25(1 - \sin^2 t)} = 5\sqrt{\cos^2 t} = 5\cos t \ .$$

$x = 5\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 5\cos t$ なので $dx = 5\cos t\,dt$ ． $x = 3$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ ． $x = 5$ のとき $t = \dfrac{\pi}{2}$ ．領域 D の面積は

$$\begin{aligned}
2\int_3^5 \sqrt{25 - x^2}\,dx &= 2\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} 5\cos t 5\cos t\,dt = 25\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\,dt \\
&= 25\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt = 25\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - \frac{25}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)
\end{aligned}$$

.

領域 D の面積は

$$\begin{aligned} 2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\,dx &= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - \frac{25}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) \\ &= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 25\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) \ . \end{aligned}$$

ここで,

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5} \ .$$

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = 1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \ .$$

$-\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1}\frac{3}{5} \le \frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) \ge 0$ ，よって

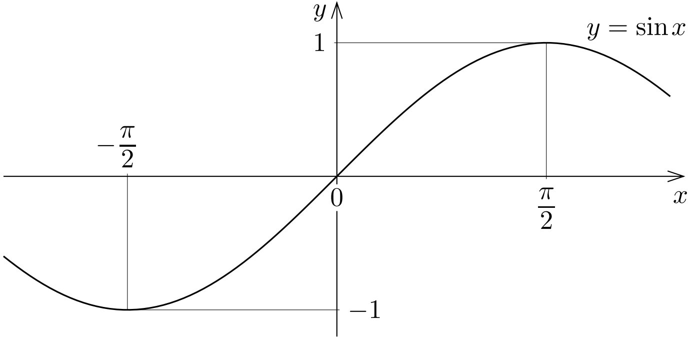
$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \ .$$

故に

$$\begin{aligned} \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 25\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) &= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 25\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} \\ &= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 12 \ . \end{aligned}$$

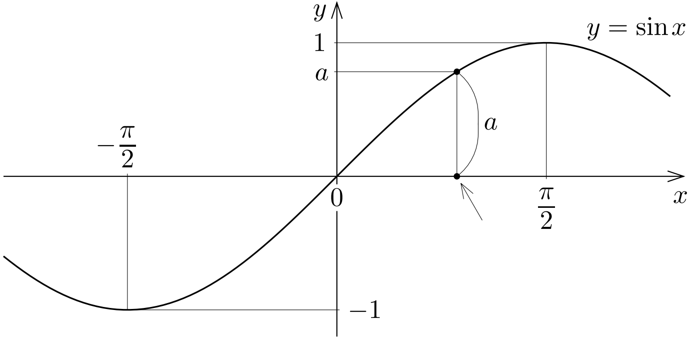
領域 D の面積は $\dfrac{25\pi}{2} - 12 - 25\sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ である. $\boxed{終}$

xy 座標平面において $y = \sin x$ のグラフを考える．実数 a について $0 \leq a \leq 1$ とする．

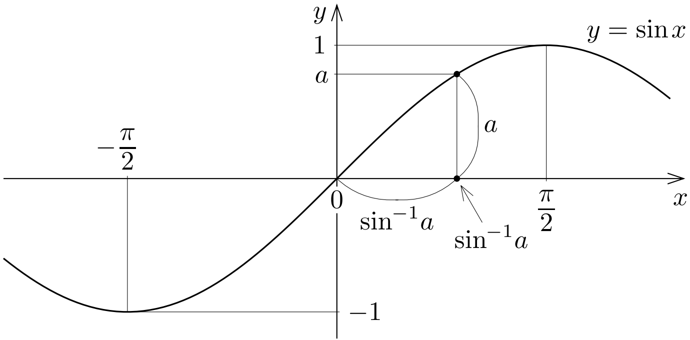


xy 座標平面において $y = \sin x$ のグラフを考える．実数 a について $0 \leq a \leq 1$ とする． $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ である実数 x について，点 (x, a) が $y = \sin x$ のグラフに属すとき，

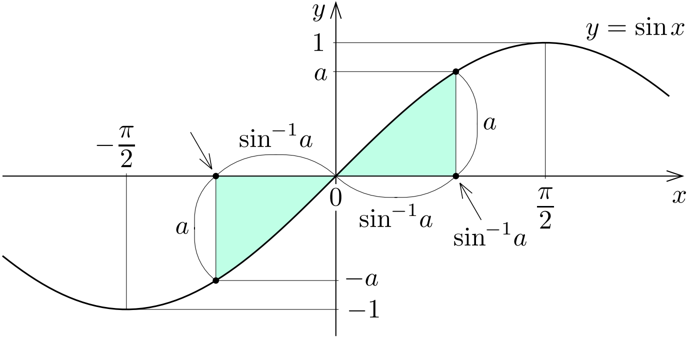
$x =$ 　　　　．



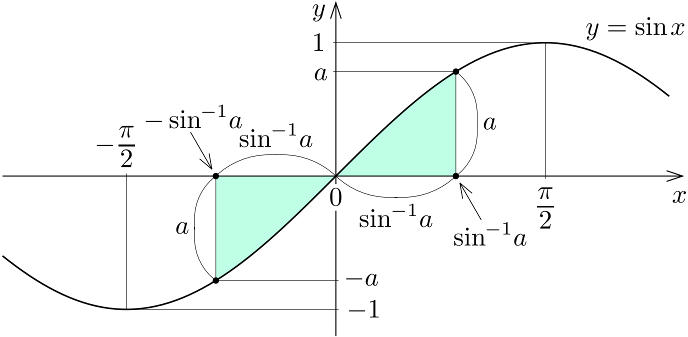
xy 座標平面において $y=\sin x$ のグラフを考える．実数 a について $0 \leq a \leq 1$ とする． $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ である実数 x について，点 (x,a) が $y=\sin x$ のグラフに属すとき， $a=\sin x$ なので， $\sin^{-1}a=\sin^{-1}(\sin x)=x$ ，つまり $x=\sin^{-1}a$ ．



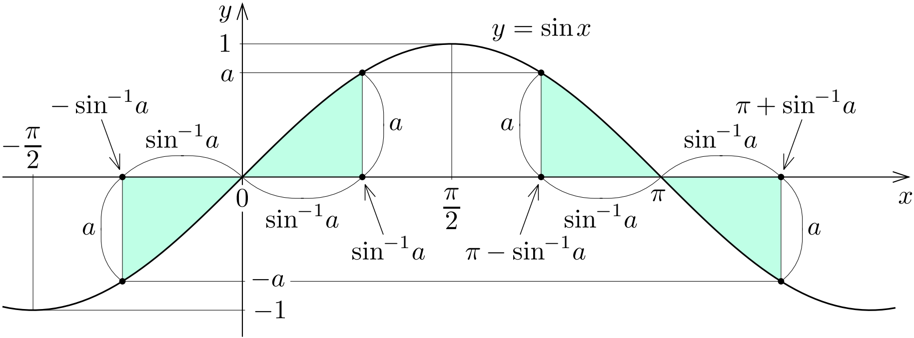
xy 座標平面において $y=\sin x$ のグラフを考える．実数 a について $0 \leq a \leq 1$ とする． $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ である実数 x について，点 (x,a) が $y=\sin x$ のグラフに属すとき， $a=\sin x$ なので， $\sin^{-1}a=\sin^{-1}(\sin x)=x$ ，つまり $x=\sin^{-1}a$ ．点 $(x,-a)$ が $y=\sin x$ のグラフに属すとき， $-a=\sin x$ なので， $x=\qquad=\qquad$．



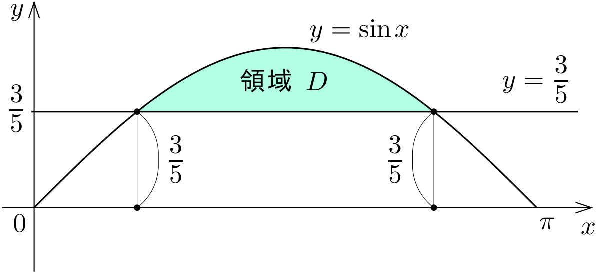
xy 座標平面において $y=\sin x$ のグラフを考える．実数 a について $0 \leq a \leq 1$ とする． $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ である実数 x について，点 (x,a) が $y=\sin x$ のグラフに属すとき， $a=\sin x$ なので， $\sin^{-1}a=\sin^{-1}(\sin x)=x$ ，つまり $x=\sin^{-1}a$ ．点 $(x,-a)$ が $y=\sin x$ のグラフに属すとき， $-a=\sin x$ なので， $\sin^{-1}(-a)=\sin^{-1}(\sin x)=x$ ，よって $x=\sin^{-1}(-a)=-\sin^{-1}a$ ．



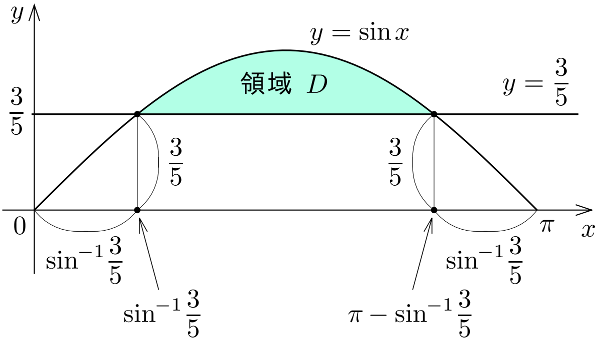
x 座標が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3\pi}{2}$ の範囲で，$y = \sin x$ のグラフと直線 $y = a$ との共有点の x 座標及び $y = \sin x$ のグラフと直線 $y = -a$ との共有点の x 座標は以下の図のようになる．



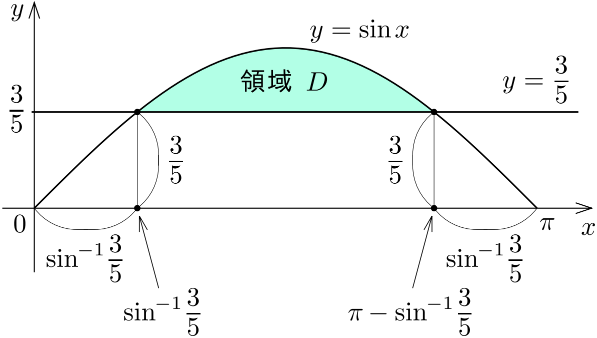
$\boxed{\text{例}}$　xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{5} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.



$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\frac{3}{5} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める．$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で，$\sin x = \frac{3}{5}$ とすると $x = \sin^{-1}\frac{3}{5}$ または $x = \pi - \sin^{-1}\frac{3}{5}$ ，

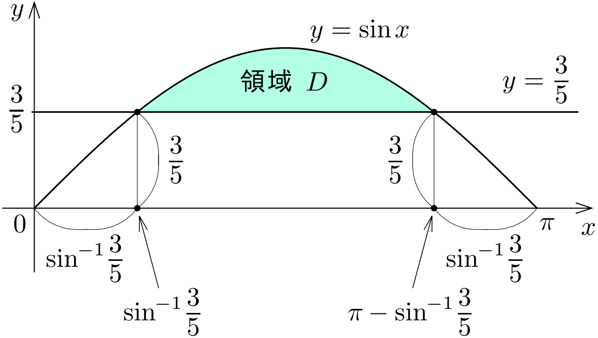


例　xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\frac{3}{5} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める．$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で，$\sin x = \frac{3}{5}$ とすると $x = \sin^{-1}\frac{3}{5}$ または $x = \pi - \sin^{-1}\frac{3}{5}$ ，



$\sin x \geq \frac{3}{5}$ である x の値の範囲は $\sin^{-1}\frac{3}{5} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\frac{3}{5}$ ．

例　xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{5} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める．$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で，$\sin x = \dfrac{3}{5}$ とすると $x = \sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ または $x = \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{5}$，



$\sin x \geq \dfrac{3}{5}$ である x の値の範囲は $\sin^{-1}\dfrac{3}{5} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{5}$．領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}} \left(\sin x - \frac{3}{5}\right) dx = \left[-\cos x - \frac{3}{5}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}} .$$

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}} \left(\sin x - \frac{3}{5}\right) dx = \left[-\cos x - \frac{3}{5}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}}$$

$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{5}\right) - \frac{3}{5}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{5}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$$= 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) + \frac{6}{5}\sin^{-1}\frac{3}{5} - \frac{3\pi}{5} \ .$$

各実数 X について， $\cos(\pi - X) = \cos(X - \pi) = -\cos X$ ，ついでに $\sin(\pi - X) = -\sin(X - \pi) = \sin X$ ．

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}} \left(\sin x - \frac{3}{5}\right) dx = \left[-\cos x - \frac{3}{5}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}}$$

$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{5}\right) - \frac{3}{5}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{5}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$$= 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) + \frac{6}{5}\sin^{-1}\frac{3}{5} - \frac{3\pi}{5} \ .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{5}\right)$ を計算する． $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{3}{5}$ なので，

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X について $\sin(\sin^{-1}X) = X$ ．

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}}\left(\sin x-\frac{3}{5}\right)dx=\left[-\cos x-\frac{3}{5}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}}$$

$$=-\cos\left(\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)-\frac{3}{5}\left(\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)+\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)+\frac{3}{5}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$$=2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)+\frac{6}{5}\sin^{-1}\frac{3}{5}-\frac{3\pi}{5}\ .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{5}\right)$ を計算する． $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{3}{5}$ なので，

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)=1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}\ .$$

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}} \left(\sin x - \frac{3}{5}\right) dx = \left[-\cos x - \frac{3}{5}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}}$$

$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{5}\right) - \frac{3}{5}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{5}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$$= 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) + \frac{6}{5}\sin^{-1}\frac{3}{5} - \frac{3\pi}{5} \ .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{5}\right)$ を計算する． $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{3}{5}$ なので，

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = 1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \ .$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{3}{5} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので

$-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X について $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} X \leq \dfrac{\pi}{2}$ ．

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}}\left(\sin x-\frac{3}{5}\right)dx=\left[-\cos x-\frac{3}{5}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}}$$

$$=-\cos\left(\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)-\frac{3}{5}\left(\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)+\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)+\frac{3}{5}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$$=2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)+\frac{6}{5}\sin^{-1}\frac{3}{5}-\frac{3\pi}{5}\ .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)$ を計算する． $\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5}$ なので，

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)=1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}\ .$$

$-\frac{\pi}{2}\leq\sin^{-1}\frac{3}{5}\leq\frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\geq 0$ ，

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}}\left(\sin x-\frac{3}{5}\right)dx=\left[-\cos x-\frac{3}{5}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}}$$

$$=-\cos\left(\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)-\frac{3}{5}\left(\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)+\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)+\frac{3}{5}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$$=2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)+\frac{6}{5}\sin^{-1}\frac{3}{5}-\frac{3\pi}{5}\ .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)$ を計算する． $\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5}$ なので，

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)=1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}\ .$$

$-\frac{\pi}{2}\leq\sin^{-1}\frac{3}{5}\leq\frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\geq 0$ ，よって $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$ ．

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}}\left(\sin x-\frac{3}{5}\right)dx=\left[-\cos x-\frac{3}{5}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}}$$

$$= -\cos\left(\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)-\frac{3}{5}\left(\pi-\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)+\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)+\frac{3}{5}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$$=2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)+\frac{6}{5}\sin^{-1}\frac{3}{5}-\frac{3\pi}{5} \ .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)$ を計算する． $\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5}$ なので，

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \ .$$

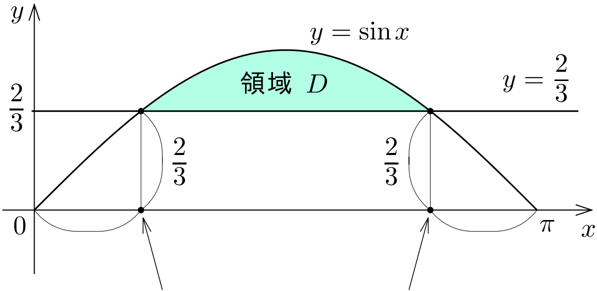
$-\frac{\pi}{2}\leq\sin^{-1}\frac{3}{5}\leq\frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\geq 0$ ，よって $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$ ．領域 D の面積は $\frac{8}{5}-\frac{3\pi}{5}+\frac{6}{5}\sin^{-1}\frac{3}{5}$ である． 終

$\boxed{\text{問}8.1.6}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{2}{3} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ．

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{2}{3}$ の解は　　　と

とである．$\sin x \geq \dfrac{2}{3}$ である x の値の範囲は

$\leq x \leq$ 　　　．

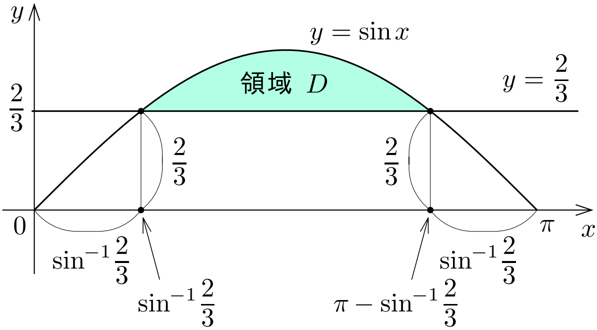


領域 D の面積は

$$\int \qquad \left(\qquad \right) dx =$$

$\boxed{問8.1.6}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{2}{3} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

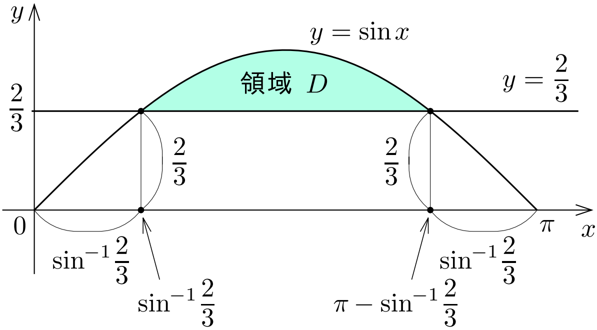
$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{2}{3}$ の解は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ と $\pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ とである. $\sin x \geq \dfrac{2}{3}$ である x の値の範囲は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$.



領域 D の面積は

$$\int \qquad \Big(\qquad \Big) dx =$$

$\boxed{問 8.1.6}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{2}{3} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ．



$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{2}{3}$ の解は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ と $\pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ とである． $\sin x \geq \dfrac{2}{3}$ である x の値の範囲は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ ．領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}} \left(\sin x - \frac{2}{3}\right) dx = \left[-\cos x - \frac{2}{3}x\right]_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}}$$

$$\int_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}} \left(\sin x - \frac{2}{3}\right) dx = \left[-\cos x - \frac{2}{3}x\right]_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}}$$

$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

$$= \cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) - \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3} + \cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

$$= 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3} - \frac{2\pi}{3}\ .$$

$$\int_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}}\left(\sin x-\frac{2}{3}\right)dx=\left[-\cos x-\frac{2}{3}x\right]_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}}$$
$$=-\cos\left(\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}\left(\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)+\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$
$$=\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)-\frac{2\pi}{3}+\frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}+\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$
$$=2\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}-\frac{2\pi}{3}\ .$$

$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$ なので

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)=1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}\ .$$

$-\frac{\pi}{2}\leq\sin^{-1}\frac{2}{3}\leq\frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\geq 0$ ，よって $\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ．

$$\int_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}}\left(\sin x-\frac{2}{3}\right)dx=\left[-\cos x-\frac{2}{3}x\right]_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}}$$

$$=-\cos\left(\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}\left(\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)+\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

$$=\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)-\frac{2\pi}{3}+\frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}+\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

$$=2\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}-\frac{2\pi}{3}\ .$$

$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$ なので

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)=1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}\ .$$

$-\frac{\pi}{2}\le\sin^{-1}\frac{2}{3}\le\frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\ge 0$ ，よって $\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ．領域 D の面積は $\frac{2\sqrt{5}}{3}-\frac{2\pi}{3}+\frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}$ である. 終