

## 7.9 ある形の2次式の根号の積分法

正の定数  $a$  に対して変数  $x$  の無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  で表される関数を積分する.

正の定数  $a$  に対して変数  $x$  の無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  で表される関数を積分する．無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  の値が実数である範囲で考えるので，今のところは実数の範囲で微分積分を考える．

正の定数  $a$  に対して変数  $x$  の無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  で表される関数を積分する．無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  の値が実数である範囲で考えるので， $a^2 - x^2 \geq 0$  ，

正の定数  $a$  に対して変数  $x$  の無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  で表される関数を積分する．無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  の値が実数である範囲で考えるので， $a^2 - x^2 \geq 0$  ，  $x^2 - a^2 \leq 0$  ，  $(x+a)(x-a) \leq 0$  ，  $a > 0$  なので  $-a \leq x \leq a$  ．

正の定数  $a$  に対して変数  $x$  の無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  で表される関数を積分する. 無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  の値が実数である範囲で考えるので,  $a^2 - x^2 \geq 0$ ,  $x^2 - a^2 \leq 0$ ,  $(x+a)(x-a) \leq 0$ ,  $a > 0$  なので  $-a \leq x \leq a$ .  $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$  なので  $\sin^{-1} \frac{x}{a}$  の値がある.

$-1 \leq X \leq 1$  である各実数  $X$  に対して  $\sin^{-1} X$  の値がある.

正の定数  $a$  に対して変数  $x$  の無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  で表される関数を積分する. 無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  の値が実数である範囲で考えるので,  $a^2 - x^2 \geq 0$ ,  $x^2 - a^2 \leq 0$ ,  $(x+a)(x-a) \leq 0$ ,  $a > 0$  なので  $-a \leq x \leq a$ .  $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$  なので  $\sin^{-1} \frac{x}{a}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$  とおく.

正の定数  $a$  に対して変数  $x$  の無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  で表される関数を積分する．無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  の値が実数である範囲で考えるので， $a^2 - x^2 \geq 0$  ，  $x^2 - a^2 \leq 0$  ，  $(x+a)(x-a) \leq 0$  ，  $a > 0$  なので  $-a \leq x \leq a$  ．  
 $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$  なので  $\sin^{-1} \frac{x}{a}$  の値がある．変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$  とおく．  
 $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a}$  なので，  
 $-1 \leq A \leq 1$  である各実数  $A$  について  $\sin(\sin^{-1} A) = A$  ．

正の定数  $a$  に対して変数  $x$  の無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  で表される関数を積分する．無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  の値が実数である範囲で考えるので， $a^2 - x^2 \geq 0$  ，  $x^2 - a^2 \leq 0$  ，  $(x+a)(x-a) \leq 0$  ，  $a > 0$  なので  $-a \leq x \leq a$  ．  
 $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$  なので  $\sin^{-1} \frac{x}{a}$  の値がある．変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$  とおく．  
 $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a}$  なので，  $x = a \sin t$  ．

正の定数  $a$  に対して変数  $x$  の無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  で表される関数を積分する. 無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  の値が実数である範囲で考えるので,  $a^2 - x^2 \geq 0$ ,  $x^2 - a^2 \leq 0$ ,  $(x+a)(x-a) \leq 0$ ,  $a > 0$  なので  $-a \leq x \leq a$ .  $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$  なので  $\sin^{-1} \frac{x}{a}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$  とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a}$  なので,  $x = a \sin t$ .  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$  より  $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$  なので,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2} \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \sqrt{\cos^2 t} .$$

正の定数  $a$  に対して変数  $x$  の無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  で表される関数を積分する．無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  の値が実数である範囲で考えるので， $a^2 - x^2 \geq 0$ ， $x^2 - a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $a > 0$  なので  $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$  なので  $\sin^{-1} \frac{x}{a}$  の値がある．変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$  とおく． $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a}$  なので， $x = a \sin t$ ． $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$  より  $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$  なので，

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2} \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \sqrt{\cos^2 t} .$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{a} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} ,$$

$$-1 \leq X \leq 1 \quad \text{である各実数 } X \text{ について} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} X \leq \frac{\pi}{2} .$$

正の定数  $a$  に対して変数  $x$  の無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  で表される関数を積分する. 無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  の値が実数である範囲で考えるので,  $a^2 - x^2 \geq 0$ ,  $x^2 - a^2 \leq 0$ ,  $(x+a)(x-a) \leq 0$ ,  $a > 0$  なので  $-a \leq x \leq a$ .  $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$  なので  $\sin^{-1} \frac{x}{a}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$  とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a}$  なので,  $x = a \sin t$ .  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$  より  $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$  なので,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2} \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \sqrt{\cos^2 t} .$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{a} \leq \frac{\pi}{2}$  なので  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , よって  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\sqrt{\cos^2 t} = \cos t .$$

正の定数  $a$  に対して変数  $x$  の無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  で表される関数を積分する. 無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  の値が実数である範囲で考えるので,  $a^2 - x^2 \geq 0$ ,  $x^2 - a^2 \leq 0$ ,  $(x+a)(x-a) \leq 0$ ,  $a > 0$  なので  $-a \leq x \leq a$ .  $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$  なので  $\sin^{-1} \frac{x}{a}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$  とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a}$  なので,  $x = a \sin t$ .  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$  より  $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$  なので,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2} \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \sqrt{\cos^2 t} .$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{a} \leq \frac{\pi}{2}$  なので  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , よって  $\cos t \geq 0$  なので,

$\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ . これより

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t .$$

正の定数  $a$  に対して変数  $x$  の無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  で表される関数を積分する．無理式  $\sqrt{a^2 - x^2}$  の値が実数である範囲で考えるので， $a^2 - x^2 \geq 0$ ， $x^2 - a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $a > 0$  なので  $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$  なので  $\sin^{-1} \frac{x}{a}$  の値がある．変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$  とおくと， $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a}$  なので， $x = a \sin t$ ． $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$  より  $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$  なので，

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2} \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \sqrt{\cos^2 t} .$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{a} \leq \frac{\pi}{2}$  なので  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ，よって  $\cos t \geq 0$  なので，

$\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ ．これより

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t .$$

また， $x = a \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} = a \cos t$  なので， $dx = (a \cos t) dt$ ．

例 定積分  $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$  を計算する.

**例** 定積分  $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{9-x^2}$  は実数なので,  $9-x^2 \geq 0$ ,  
 $x^2-9 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ .

**例** 定積分  $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{9-x^2}$  は実数なので,  $9-x^2 \geq 0$ ,  $x^2-9 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ .

例 定積分  $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{9-x^2}$  は実数なので,  $9-x^2 \geq 0$ ,  $x^2-9 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ .  $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$  なので

$\sin^{-1} \frac{x}{3}$  の値がある.

$-1 \leq X \leq 1$  である各実数  $X$  に対して  $\sin^{-1} X$  の値がある.

**例** 定積分  $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{9-x^2}$  は実数なので,  $9-x^2 \geq 0$ ,  
 $x^2-9 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ .  $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$  なので  
 $\sin^{-1} \frac{x}{3}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{3}$  ( $-3 \leq x \leq 3$ ) とおく.

例 定積分  $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{9-x^2}$  は実数なので,  $9-x^2 \geq 0$ ,

$x^2 - 9 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ .  $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$  なので

$\sin^{-1} \frac{x}{3}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{3}$  ( $-3 \leq x \leq 3$ ) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$  なので  $x = 3 \sin t$ .

$-1 \leq X \leq 1$  である各実数  $X$  について  $\sin(\sin^{-1} X) = X$ .

**例** 定積分  $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{9-x^2}$  は実数なので,  $9-x^2 \geq 0$ ,  $x^2-9 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ .  $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$  なので

$\sin^{-1} \frac{x}{3}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{3}$  ( $-3 \leq x \leq 3$ ) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$  なので  $x = 3 \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}$  なので

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

$-1 \leq X \leq 1$  である各実数  $X$  について  $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} X \leq \frac{\pi}{2}$ .

**例** 定積分  $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{9-x^2}$  は実数なので,  $9-x^2 \geq 0$ ,  $x^2-9 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ .  $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$  なので

$\sin^{-1} \frac{x}{3}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{3}$  ( $-3 \leq x \leq 3$ ) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$  なので  $x = 3 \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}$  なので

$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , よって  $\cos t \geq 0$  なので,

例 定積分  $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{9-x^2}$  は実数なので,  $9-x^2 \geq 0$ ,  $x^2-9 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ .  $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$  なので

$\sin^{-1} \frac{x}{3}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{3}$  ( $-3 \leq x \leq 3$ ) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$  なので  $x = 3 \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}$  なので  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , よって  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-(3 \sin t)^2} = \sqrt{9-9 \sin^2 t} = \sqrt{9} \sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 3 \cos t .\end{aligned}$$

例 定積分  $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{9-x^2}$  は実数なので,  $9-x^2 \geq 0$ ,  $x^2-9 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ .  $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$  なので

$\sin^{-1} \frac{x}{3}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{3}$  ( $-3 \leq x \leq 3$ ) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$  なので  $x = 3 \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}$  なので  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , よって  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-(3 \sin t)^2} = \sqrt{9-9 \sin^2 t} = \sqrt{9} \sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 3 \cos t .\end{aligned}$$

$x = 3 \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} = 3 \cos t$  なので,  $dx = 3 \cos t dt$ .

例 定積分  $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{9-x^2}$  は実数なので,  $9-x^2 \geq 0$ ,  $x^2-9 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ .  $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$  なので

$\sin^{-1} \frac{x}{3}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{3}$  ( $-3 \leq x \leq 3$ ) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$  なので  $x = 3 \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}$  なので  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , よって  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-(3 \sin t)^2} = \sqrt{9-9 \sin^2 t} = \sqrt{9} \sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 3 \cos t .\end{aligned}$$

$x = 3 \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} = 3 \cos t$  なので,  $dx = 3 \cos t dt$ .  $x = 0$  のとき

$t = \sin^{-1} 0 = 0$ .  $x = 3$  のとき  $t = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$ .

例 定積分  $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{9-x^2}$  は実数なので,  $9-x^2 \geq 0$ ,  $x^2-9 \leq 0$ ,  $(x+3)(x-3) \leq 0$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ .  $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$  なので

$\sin^{-1} \frac{x}{3}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{3}$  ( $-3 \leq x \leq 3$ ) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$  なので  $x = 3 \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}$  なので  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , よって  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-(3 \sin t)^2} = \sqrt{9-9 \sin^2 t} = \sqrt{9} \sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 3 \cos t.\end{aligned}$$

$x = 3 \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} = 3 \cos t$  なので,  $dx = 3 \cos t dt$ .  $x = 0$  のとき

$t = \sin^{-1} 0 = 0$ .  $x = 3$  のとき  $t = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$ . よって

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \cdot 3 \cos t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \cdot 3 \cos t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \cdot 3 \cos t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt$$

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$$

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \cdot 3 \cos t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{9}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{9}{2} \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} - 0 \right) \\ &= \frac{9\pi}{4} .\end{aligned}$$

終

**問7.9.1** 定積分  $\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$  を計算せよ.

$4-x^2 \geq 0$  なので,  $(\quad)(\quad) \leq 0$ ,  $\quad \leq x \leq \quad$ ,  $-1 \leq \quad \leq 1$ .

変数  $t$  を  $t = \quad$  とおく.  $\sin t = \sin(\quad) = \quad$  なので  $x = \quad$ .

$\quad \leq t \leq \quad$  より  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(\quad)^2} =$$

$x = 2 \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} = \quad$  なので  $dx = \quad dt$ .  $x = 1$  のとき

$t = \quad = \quad$ .  $x = 2$  のとき  $t = \quad = \quad$ . よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx =$$

**問7.9.1** 定積分  $\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$  を計算せよ.

$$4-x^2 \geq 0 \text{ なので, } (x+2)(x-2) \leq 0, \quad -2 \leq x \leq 2, \quad -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1.$$

変数  $t$  を  $t =$                       とおく.  $\sin t = \sin(\quad) =$                       なので  $x =$                       .

$\leq t \leq$                       より  $\cos t$                        $0$  なので,

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(\quad)^2} =$$

$x = 2 \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} =$                       なので  $dx =$                        $dt$ .  $x = 1$  のとき

$t =$                        $=$                       .  $x = 2$  のとき  $t =$                        $=$                       . よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx =$$

**問7.9.1** 定積分  $\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$  を計算せよ.

$4-x^2 \geq 0$  なので,  $(x+2)(x-2) \leq 0$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$ .

変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$  とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$  なので  $x = 2 \sin t$ .

$\leq t \leq$  より  $\cos t$   $0$  なので,

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4 - \left(\right)^2} =$$

$x = 2 \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} =$  なので  $dx = dt$ .  $x = 1$  のとき

$t =$   $=$ .  $x = 2$  のとき  $t =$   $=$ . よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx =$$

**問7.9.1** 定積分  $\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$  を計算せよ.

$4-x^2 \geq 0$  なので,  $(x+2)(x-2) \leq 0$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$ .

変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$  とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$  なので  $x = 2 \sin t$ .

$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\cos t \geq 0$  なので,

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2 \sin t)^2} = \sqrt{4-4 \sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2 \cos t$ .

$x = 2 \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} =$                       なので  $dx =$                        $dt$ .  $x = 1$  のとき

$t =$                        $=$                       .  $x = 2$  のとき  $t =$                        $=$                       . よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx =$$

**問7.9.1** 定積分  $\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$  を計算せよ.

$4-x^2 \geq 0$  なので,  $(x+2)(x-2) \leq 0$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$ .

変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$  とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$  なので  $x = 2 \sin t$ .

$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\cos t \geq 0$  なので,

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2 \sin t)^2} = \sqrt{4-4 \sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2 \cos t$ .

$x = 2 \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} = 2 \cos t$  なので  $dx = 2 \cos t dt$ .  $x = 1$  のとき

$t = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ .  $x = 2$  のとき  $t = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$ . よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx =$$

**問7.9.1** 定積分  $\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$  を計算せよ.

$4-x^2 \geq 0$  なので,  $(x+2)(x-2) \leq 0$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$ .

変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$  とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$  なので  $x = 2 \sin t$ .

$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\cos t \geq 0$  なので,

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2 \sin t)^2} = \sqrt{4-4 \sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2 \cos t$ .

$x = 2 \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} = 2 \cos t$  なので  $dx = 2 \cos t dt$ .  $x = 1$  のとき

$t = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ .  $x = 2$  のとき  $t = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$ . よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1 + \cos 2t) dt$$

**問7.9.1** 定積分  $\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$  を計算せよ.

$4-x^2 \geq 0$  なので,  $(x+2)(x-2) \leq 0$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$ .

変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$  とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$  なので  $x = 2 \sin t$ .

$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\cos t \geq 0$  なので,

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2 \sin t)^2} = \sqrt{4-4 \sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2 \cos t$ .

$x = 2 \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} = 2 \cos t$  なので  $dx = 2 \cos t dt$ .  $x = 1$  のとき

$t = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ .  $x = 2$  のとき  $t = \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$ . よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1 + \cos 2t) dt$$

$$= [2t + \sin 2t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi + \sin \pi - \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

終

例 定積分  $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$  を計算する.

**例** 定積分  $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{6-3x^2}$  は実数なので,  $6-3x^2 \geq 0$ ,  
 $x^2 - 2 \leq 0$ ,  $(x + \quad)(x - \quad) \leq 0$ ,  $\quad \leq x \leq \quad$ .

**例** 定積分  $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{6-3x^2}$  は実数なので,  $6-3x^2 \geq 0$ ,  $x^2 - 2 \leq 0$ ,  $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \leq 0$ ,  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ .

例 定積分  $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{6-3x^2}$  は実数なので,  $6-3x^2 \geq 0$ ,  $x^2 - 2 \leq 0$ ,  $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \leq 0$ ,  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ .  $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$  なの

で  $\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$  の値がある.

$-1 \leq X \leq 1$  である各実数  $X$  に対して  $\sin^{-1} X$  の値がある.

例 定積分  $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{6-3x^2}$  は実数なので,  $6-3x^2 \geq 0$ ,  $x^2 - 2 \leq 0$ ,  $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \leq 0$ ,  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ .  $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$  なので  $\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$  ( $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ) とおく.

例 定積分  $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{6-3x^2}$  は実数なので,  $6-3x^2 \geq 0$ ,  $x^2 - 2 \leq 0$ ,  $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \leq 0$ ,  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ .  $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$  なので  $\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$  ( $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ) とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}$  なので  $x = \sqrt{2} \sin t$ .  
 $-1 \leq X \leq 1$  である各実数  $X$  について  $\sin(\sin^{-1} X) = X$ .

例 定積分  $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{6-3x^2}$  は実数なので,  $6-3x^2 \geq 0$ ,  $x^2 - 2 \leq 0$ ,  $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \leq 0$ ,  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ .  $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$  なので  $\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$  ( $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ) とおくと,  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}$  なので  $x = \sqrt{2} \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi}{2}$  なので  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ,

$-1 \leq X \leq 1$  である各実数  $X$  について  $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} X \leq \frac{\pi}{2}$ .

例 定積分  $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{6-3x^2}$  は実数なので,  $6-3x^2 \geq 0$ ,  $x^2 - 2 \leq 0$ ,  $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \leq 0$ ,  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ .  $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$  なので  $\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$  ( $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ) とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}$  なので  $x = \sqrt{2} \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi}{2}$  なので  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , よって  $\cos t \geq 0$  なので,

**例** 定積分  $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{6-3x^2}$  は実数なので,  $6-3x^2 \geq 0$ ,  $x^2 - 2 \leq 0$ ,  $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \leq 0$ ,  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ .  $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$  なので  $\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$  ( $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ) とおくと,  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}$  なので  $x = \sqrt{2} \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi}{2}$  なので  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , よって  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{6-3x^2} &= \sqrt{6-3(\sqrt{2} \sin t)^2} = \sqrt{6-6 \sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{\cos^2 t} \\
 &= \sqrt{6} \cos t .
 \end{aligned}$$

**例** 定積分  $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{6-3x^2}$  は実数なので,  $6-3x^2 \geq 0$ ,  $x^2-2 \leq 0$ ,  $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$ ,  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ .  $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$  なので  $\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$  ( $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ) とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}$  なので  $x = \sqrt{2} \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi}{2}$  なので  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , よって  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{6-3x^2} &= \sqrt{6-3(\sqrt{2} \sin t)^2} = \sqrt{6-6 \sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{\cos^2 t} \\
 &= \sqrt{6} \cos t.
 \end{aligned}$$

$$x = \sqrt{2} \sin t \quad \text{より} \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{2} \cos t \quad \text{なので} \quad dx = \sqrt{2} \cos t dt.$$

**例** 定積分  $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{6-3x^2}$  は実数なので,  $6-3x^2 \geq 0$ ,  $x^2-2 \leq 0$ ,  $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$ ,  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ .  $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$  なので  $\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$  ( $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ) とおくと,  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}$  なので  $x = \sqrt{2} \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi}{2}$  なので  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , よって  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{6-3x^2} &= \sqrt{6-3(\sqrt{2} \sin t)^2} = \sqrt{6-6 \sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{\cos^2 t} \\
 &= \sqrt{6} \cos t.
 \end{aligned}$$

$x = \sqrt{2} \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} = \sqrt{2} \cos t$  なので  $dx = \sqrt{2} \cos t dt$ .  $x = 0$  のとき

$$t = \sin^{-1} 0 = 0. \quad x = 1 \text{ のとき } t = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

**例** 定積分  $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{6-3x^2}$  は実数なので,  $6-3x^2 \geq 0$ ,  $x^2-2 \leq 0$ ,  $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$ ,  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ .  $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$  なので  $\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}$  ( $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ) とおくと,  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}$  なので  $x = \sqrt{2} \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi}{2}$  なので  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , よって  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{6-3x^2} &= \sqrt{6-3(\sqrt{2} \sin t)^2} = \sqrt{6-6\sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{\cos^2 t} \\
 &= \sqrt{6} \cos t.
 \end{aligned}$$

$x = \sqrt{2} \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} = \sqrt{2} \cos t$  なので  $dx = \sqrt{2} \cos t dt$ .  $x = 0$  のとき  $t = \sin^{-1} 0 = 0$ .  $x = 1$  のとき  $t = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ .

$$\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6} \cos t \cdot \sqrt{2} \cos t dt = 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$$

$$\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6} \cos t \cdot \sqrt{2} \cos t dt = 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6} \cos t \cdot \sqrt{2} \cos t dt = 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt \\ &= 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt \quad \cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6} \cos t \cdot \sqrt{2} \cos t dt = 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt \\ &= 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6} \cos t \cdot \sqrt{2} \cos t dt = 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt \\ &= 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \sqrt{3} \left[ t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}(\pi + 2)}{4} .\end{aligned}$$

終

**問7.9.2** 定積分  $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx$  を計算せよ.

$\geq 0$  なので,  $\leq 0$ ,  $(x \quad)(x \quad) \leq 0$ ,  $\leq x \leq$ ,  
 $-1 \leq \leq 1$ . 変数  $t$  を  $t =$  とおく.  $\sin t = \sin(\quad) =$  なの

で  $x =$ .  $\leq t \leq$  より  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\sqrt{12-3x^2} =$$

$x =$  より  $\frac{dx}{dt} =$  なので  $dx = dt$ .  $x = -1$  のとき

$t =$   $=$ .  $x = \sqrt{3}$  のとき  $t =$   $=$ .

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx =$$

**問7.9.2** 定積分  $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx$  を計算せよ.

$12-3x^2 \geq 0$  なので,  $x^2-4 \leq 0$ ,  $(x+2)(x-2) \leq 0$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ ,  
 $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$ . 変数  $t$  を  $t =$                       とおく.  $\sin t = \sin\left(\quad\right) =$                       なの

で  $x =$                       .                       $\leq t \leq$                       より  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\sqrt{12-3x^2} =$$

$x =$                       より  $\frac{dx}{dt} =$                       なので  $dx =$                        $dt$ .  $x = -1$  のとき

$t =$                       =                      .  $x = \sqrt{3}$  のとき  $t =$                       =                      .

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx =$$

**問7.9.2** 定積分  $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx$  を計算せよ.

$12-3x^2 \geq 0$  なので,  $x^2-4 \leq 0$ ,  $(x+2)(x-2) \leq 0$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ ,  
 $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$ . 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$  とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$  なの

で  $x = 2 \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\sqrt{12-3x^2} =$$

$x = -2$  より  $\frac{dx}{dt} = 2 \cos t$  なので  $dx = 2 \cos t dt$ .  $x = -1$  のとき

$t = -\frac{\pi}{2}$   $= -\frac{\pi}{2}$ .  $x = \sqrt{3}$  のとき  $t = \frac{\pi}{3}$   $= \frac{\pi}{3}$ .

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx =$$

**問7.9.2** 定積分  $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx$  を計算せよ.

$12-3x^2 \geq 0$  なので,  $x^2-4 \leq 0$ ,  $(x+2)(x-2) \leq 0$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ ,  
 $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$ . 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$  とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$  なの

で  $x = 2 \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{12-3x^2} &= \sqrt{12-3(2 \sin t)^2} = \sqrt{12-12 \sin^2 t} \\ &= \sqrt{12} \sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{3} \sqrt{\cos^2 t} \\ &= 2\sqrt{3} \cos t.\end{aligned}$$

$x =$             より  $\frac{dx}{dt} =$             なので  $dx =$              $dt$ .  $x = -1$  のとき

$t =$              $=$             .  $x = \sqrt{3}$  のとき  $t =$              $=$             .

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx =$$

**問7.9.2** 定積分  $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx$  を計算せよ.

$12-3x^2 \geq 0$  なので,  $x^2-4 \leq 0$ ,  $(x+2)(x-2) \leq 0$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ ,  
 $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$ . 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$  とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$  なの  
で  $x = 2 \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{12-3x^2} &= \sqrt{12-3(2 \sin t)^2} = \sqrt{12-12 \sin^2 t} \\ &= \sqrt{12} \sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{3} \sqrt{\cos^2 t} \\ &= 2\sqrt{3} \cos t.\end{aligned}$$

$x = 2 \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} = 2 \cos t$  なので  $dx = 2 \cos t dt$ .  $x = -1$  のとき

$$t = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}. \quad x = \sqrt{3} \text{ のとき } t = \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx =$$

**問7.9.2** 定積分  $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx$  を計算せよ.

$12-3x^2 \geq 0$  なので,  $x^2-4 \leq 0$ ,  $(x+2)(x-2) \leq 0$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ ,  
 $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$ . 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$  とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$  なの

で  $x = 2 \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{12-3x^2} &= \sqrt{12-3(2 \sin t)^2} = \sqrt{12-12 \sin^2 t} \\ &= \sqrt{12} \sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{3} \sqrt{\cos^2 t} \\ &= 2\sqrt{3} \cos t.\end{aligned}$$

$x = 2 \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} = 2 \cos t$  なので  $dx = 2 \cos t dt$ .  $x = -1$  のとき

$t = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ .  $x = \sqrt{3}$  のとき  $t = \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ .

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3} \cdot 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = 4\sqrt{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3} \cdot 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = 4\sqrt{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt \\ &= 2\sqrt{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = 2\sqrt{3} \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 2\sqrt{3} \left( \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 3 + \sqrt{3} \pi .\end{aligned}$$

終

例 定積分  $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$  を計算する.

**例** 定積分  $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{16-x^2}$  は実数なので,

$$16-x^2 \geq 0, \quad x^2-16 \leq 0, \quad (x+4)(x-4) \leq 0, \quad -4 \leq x \leq 4.$$

**例** 定積分  $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{16-x^2}$  は実数なので,

$$16-x^2 \geq 0, \quad x^2-16 \leq 0, \quad (x+4)(x-4) \leq 0, \quad -4 \leq x \leq 4.$$

**例** 定積分  $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{16-x^2}$  は実数なので,

$$16-x^2 \geq 0, \quad x^2-16 \leq 0, \quad (x+4)(x-4) \leq 0, \quad -4 \leq x \leq 4. \quad -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$$

なので  $\sin^{-1} \frac{x}{4}$  の値がある.

$-1 \leq X \leq 1$  である各実数  $X$  に対して  $\sin^{-1} X$  の値がある.

例 定積分  $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{16-x^2}$  は実数なので,

$$16-x^2 \geq 0, \quad x^2-16 \leq 0, \quad (x+4)(x-4) \leq 0, \quad -4 \leq x \leq 4. \quad -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$$

なので  $\sin^{-1} \frac{x}{4}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{4}$  ( $-4 \leq x \leq 4$ ) とおく.

例 定積分  $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{16-x^2}$  は実数なので,

$$16-x^2 \geq 0, \quad x^2-16 \leq 0, \quad (x+4)(x-4) \leq 0, \quad -4 \leq x \leq 4. \quad -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$$

なので  $\sin^{-1} \frac{x}{4}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{4}$  ( $-4 \leq x \leq 4$ ) とおく.

$$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4} \quad \text{なので} \quad x = 4 \sin t.$$

$-1 \leq X \leq 1$  である各実数  $X$  について  $\sin(\sin^{-1} X) = X$ .

例 定積分  $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{16-x^2}$  は実数なので,

$$16-x^2 \geq 0, \quad x^2-16 \leq 0, \quad (x+4)(x-4) \leq 0, \quad -4 \leq x \leq 4. \quad -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$$

なので  $\sin^{-1} \frac{x}{4}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{4}$  ( $-4 \leq x \leq 4$ ) とおく.

$$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4} \quad \text{なので} \quad x = 4 \sin t. \quad -\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{4} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{なので}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

$$-1 \leq X \leq 1 \quad \text{である各実数 } X \text{ について} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} X \leq \frac{\pi}{2}.$$

例 定積分  $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{16-x^2}$  は実数なので,

$$16-x^2 \geq 0, \quad x^2-16 \leq 0, \quad (x+4)(x-4) \leq 0, \quad -4 \leq x \leq 4. \quad -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$$

なので  $\sin^{-1} \frac{x}{4}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{4}$  ( $-4 \leq x \leq 4$ ) とおく.

$$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4} \quad \text{なので} \quad x = 4 \sin t. \quad -\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{4} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{なので}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{よって} \quad \cos t \geq 0 \quad \text{なので,}$$

例 定積分  $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{16-x^2}$  は実数なので,

$$16-x^2 \geq 0, \quad x^2-16 \leq 0, \quad (x+4)(x-4) \leq 0, \quad -4 \leq x \leq 4. \quad -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$$

なので  $\sin^{-1} \frac{x}{4}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{4}$  ( $-4 \leq x \leq 4$ ) とおく.

$$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4} \quad \text{なので} \quad x = 4 \sin t. \quad -\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{4} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{なので}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{よって} \quad \cos t \geq 0 \quad \text{なので,}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{16-x^2} &= \sqrt{16-(4 \sin t)^2} = \sqrt{16-16 \sin^2 t} = \sqrt{16} \sqrt{1-\sin^2 t} = 4\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 4 \cos t. \end{aligned}$$

例 定積分  $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{16-x^2}$  は実数なので,

$$16-x^2 \geq 0, \quad x^2-16 \leq 0, \quad (x+4)(x-4) \leq 0, \quad -4 \leq x \leq 4. \quad -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$$

なので  $\sin^{-1} \frac{x}{4}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{4}$  ( $-4 \leq x \leq 4$ ) とおく.

$$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4} \quad \text{なので} \quad x = 4 \sin t. \quad -\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{4} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{なので}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{よって} \quad \cos t \geq 0 \quad \text{なので,}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{16-x^2} &= \sqrt{16-(4 \sin t)^2} = \sqrt{16-16 \sin^2 t} = \sqrt{16} \sqrt{1-\sin^2 t} = 4\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 4 \cos t. \end{aligned}$$

$$x = 4 \sin t \quad \text{より} \quad \frac{dx}{dt} = 4 \cos t \quad \text{なので} \quad dx = 4 \cos t dt.$$

例 定積分  $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{16-x^2}$  は実数なので,

$$16-x^2 \geq 0, \quad x^2-16 \leq 0, \quad (x+4)(x-4) \leq 0, \quad -4 \leq x \leq 4. \quad -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$$

なので  $\sin^{-1} \frac{x}{4}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{4}$  ( $-4 \leq x \leq 4$ ) とおく.

$$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4} \quad \text{なので} \quad x = 4 \sin t. \quad -\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{4} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{なので}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{よって} \quad \cos t \geq 0 \quad \text{なので,}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{16-x^2} &= \sqrt{16-(4 \sin t)^2} = \sqrt{16-16 \sin^2 t} = \sqrt{16} \sqrt{1-\sin^2 t} = 4\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 4 \cos t. \end{aligned}$$

$x = 4 \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} = 4 \cos t$  なので  $dx = 4 \cos t dt$ .  $x = 0$  のとき

$t = \sin^{-1} 0 = 0$ .  $x = 3$  のとき  $t = \sin^{-1} \frac{3}{4}$ . この式は簡単にできない.

例 定積分  $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$  を計算する.  $\sqrt{16-x^2}$  は実数なので,  
 $16-x^2 \geq 0$ ,  $x^2-16 \leq 0$ ,  $(x+4)(x-4) \leq 0$ ,  $-4 \leq x \leq 4$ .  $-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$

なので  $\sin^{-1} \frac{x}{4}$  の値がある. 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{4}$  ( $-4 \leq x \leq 4$ ) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4}$  なので  $x = 4 \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{4} \leq \frac{\pi}{2}$  なので

$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , よって  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{16-x^2} &= \sqrt{16-(4 \sin t)^2} = \sqrt{16-16 \sin^2 t} = \sqrt{16} \sqrt{1-\sin^2 t} = 4\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 4 \cos t .\end{aligned}$$

$x = 4 \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} = 4 \cos t$  なので  $dx = 4 \cos t dt$ .  $x = 0$  のとき

$t = \sin^{-1} 0 = 0$ .  $x = 3$  のとき  $t = \sin^{-1} \frac{3}{4}$ .

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx = \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} 4 \cos t \cdot 4 \cos t dt = 16 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} \cos^2 t dt$$

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx &= \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} 4 \cos t \cdot 4 \cos t dt = 16 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} \cos^2 t dt \\ &= 16 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt \quad \cos^2 t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx &= \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} 4 \cos t \cdot 4 \cos t dt = 16 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} \cos^2 t dt \\ &= 16 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = 8 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} (1 + \cos 2t) dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx &= \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} 4 \cos t \cdot 4 \cos t dt = 16 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} \cos^2 t dt \\ &= 16 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = 8 \int_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= 8 \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\sin^{-1} \frac{3}{4}} = 8 \left\{ \sin^{-1} \frac{3}{4} + \frac{\sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right)}{2} - 0 \right\} \\ &= 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .\end{aligned}$$

$$\int_0^3 \sqrt{16 - x^2} dx = 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx = 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

$\sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right)$  を計算する.

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx = 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

$\sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right)$  を計算する.

$$\sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 2 \sin \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \cos \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx = 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

$\sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right)$  を計算する.

$$\sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 2 \sin \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \cos \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

まず

$$\sin \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4} .$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx = 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

$\sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right)$  を計算する.

$$\sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 2 \sin \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \cos \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

まず

$$\sin \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4} .$$

更に,

$$\cos^2 \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 1 - \sin^2 \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 1 - \left( \frac{3}{4} \right)^2 = \frac{7}{16} ,$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx = 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

$\sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right)$  を計算する.

$$\sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 2 \sin \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \cos \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

まず

$$\sin \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4} .$$

更に,

$$\cos^2 \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 1 - \sin^2 \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 1 - \left( \frac{3}{4} \right)^2 = \frac{7}{16} ,$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{3}{4} \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\cos \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \geq 0$  なので

$$\cos \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} .$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx = 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

$\sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right)$  を計算する.

$$\sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 2 \sin \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \cos \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) .$$

まず

$$\sin \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4} .$$

更に,

$$\cos^2 \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 1 - \sin^2 \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 1 - \left( \frac{3}{4} \right)^2 = \frac{7}{16} ,$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{3}{4} \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\cos \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \geq 0$  なので

$$\cos \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} .$$

よって

$$\sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 2 \sin \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \cos \left( \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3}{8} \sqrt{7} .$$

故に

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx &= 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \right) \\ &= 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{3}{8} \sqrt{7} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{7} + 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} .\end{aligned}$$

終

**問7.9.3** 定積分  $\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx$  を計算せよ.

$\geq 0$  なので,  $\leq 0$ ,  $(x+)(x-)\leq 0$ ,  $\leq x \leq$ ,  
 $-1 \leq \leq 1$ . 変数  $t$  を  $t =$  とおく.  $\sin t = \sin(\quad) =$  なの

で  $x =$ .  $\leq t \leq$  より  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\sqrt{25-x^2} =$$

$x =$  より  $\frac{dx}{dt} =$  なので  $dx = dt$ .  $x = 0$  のとき

$t =$   $=$ .  $x = 4$  のとき  $t =$ .

$$\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx =$$

問7.9.3 定積分  $\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx$  を計算せよ.

$25-x^2 \geq 0$  なので,  $x^2-25 \leq 0$ ,  $(x+5)(x-5) \leq 0$ ,  $-5 \leq x \leq 5$ ,  
 $-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$ . 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{5}$  とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{5}\right) = \frac{x}{5}$  なの

で  $x = 5 \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\sqrt{25-x^2} =$$

$x = 5 \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} = 5 \cos t$  なので  $dx = 5 \cos t dt$ .  $x = 0$  のとき

$t = 0$  である.  $x = 4$  のとき  $t = \sin^{-1} \frac{4}{5}$ .

$$\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx =$$

**問7.9.3** 定積分  $\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx$  を計算せよ.

$25-x^2 \geq 0$  なので,  $x^2-25 \leq 0$ ,  $(x+5)(x-5) \leq 0$ ,  $-5 \leq x \leq 5$ ,  
 $-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$ . 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{5}$  とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{5}\right) = \frac{x}{5}$  なの

で  $x = 5 \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{25-x^2} &= \sqrt{25-(5 \sin t)^2} = \sqrt{25-25 \sin^2 t} = 5\sqrt{1-\sin^2 t} = 5\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 5 \cos t .\end{aligned}$$

$x =$             より  $\frac{dx}{dt} =$             なので  $dx =$              $dt$ .  $x = 0$  のとき

$t =$              $=$             .  $x = 4$  のとき  $t =$             .

$$\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx =$$

**問7.9.3** 定積分  $\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx$  を計算せよ.

$25-x^2 \geq 0$  なので,  $x^2-25 \leq 0$ ,  $(x+5)(x-5) \leq 0$ ,  $-5 \leq x \leq 5$ ,  
 $-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$ . 変数  $t$  を  $t = \sin^{-1} \frac{x}{5}$  とおく.  $\sin t = \sin\left(\sin^{-1} \frac{x}{5}\right) = \frac{x}{5}$  なの

で  $x = 5 \sin t$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\cos t \geq 0$  なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{25-x^2} &= \sqrt{25-(5 \sin t)^2} = \sqrt{25-25 \sin^2 t} = 5\sqrt{1-\sin^2 t} = 5\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 5 \cos t.\end{aligned}$$

$x = 5 \sin t$  より  $\frac{dx}{dt} = 5 \cos t$  なので  $dx = 5 \cos t dt$ .  $x = 0$  のとき

$t = \sin^{-1} 0 = 0$ .  $x = 4$  のとき  $t = \sin^{-1} \frac{4}{5}$ .

$$\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx = \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} 5 \cos t \cdot 5 \cos t dt = 25 \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} \cos^2 t dt$$

$$\begin{aligned}\int_0^4 \sqrt{25 - x^2} dx &= \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} 5 \cos t \cdot 5 \cos t dt = 25 \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} \cos^2 t dt \\ &= 25 \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{25}{2} \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{25}{2} \left[ t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} = \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{4}{5} + \frac{25}{4} \sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{4}{5} \right) \\ &= \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{4}{5} + \frac{25}{2} \sin \left( \sin^{-1} \frac{4}{5} \right) \cos \left( \sin^{-1} \frac{4}{5} \right) .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx &= \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} 5 \cos t \cdot 5 \cos t dt = 25 \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} \cos^2 t dt \\
&= 25 \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{25}{2} \int_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} (1+\cos 2t) dt \\
&= \frac{25}{2} \left[ t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\sin^{-1} \frac{4}{5}} = \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{4}{5} + \frac{25}{4} \sin \left( 2 \sin^{-1} \frac{4}{5} \right) \\
&= \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{4}{5} + \frac{25}{2} \sin \left( \sin^{-1} \frac{4}{5} \right) \cos \left( \sin^{-1} \frac{4}{5} \right) .
\end{aligned}$$

ここで、 $\sin \left( \sin^{-1} \frac{4}{5} \right) = \frac{4}{5}$ 、また、

$$\cos^2 \left( \sin^{-1} \frac{4}{5} \right) = 1 - \left\{ \sin \left( \sin^{-1} \frac{4}{5} \right) \right\}^2 = 1 - \left( \frac{4}{5} \right)^2 = \frac{9}{25} ,$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{4}{5} \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\cos \left( \sin^{-1} \frac{4}{5} \right) \geq 0$  なので

$$\cos \left( \sin^{-1} \frac{4}{5} \right) = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} .$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{4}{5} + \frac{25}{2} \sin\left(\sin^{-1} \frac{4}{5}\right) \cos\left(\sin^{-1} \frac{4}{5}\right) &= \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{4}{5} + \frac{25}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{4}{5} + 6 .\end{aligned}$$

故に  $\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx = 6 + \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{4}{5}$  .

終