7.8 1次式の根号を含む式の積分法

変数 x の無理式 $\sqrt{ax+b}$（a, b は定数で $a \neq 0$）を含む式を積分するために，変数 t を $t = \sqrt{ax+b}$ とおく．

変数 x の無理式 $\sqrt{ax+b}$（ a, b は定数で $a \neq 0$ ）を含む式を積分するために，変数 t を $t=\sqrt{ax+b}$ とおく． $t^2=\sqrt{ax+b}^2=ax+b$ なので

$x=\dfrac{t^2-b}{a}$ ；

変数 x の無理式 $\sqrt{ax+b}$ （ a,b は定数で $a \neq 0$ ）を含む式を積分するために，変数 t を $t=\sqrt{ax+b}$ とおく． $t^2=\sqrt{ax+b}^2=ax+b$ なので $x=\dfrac{t^2-b}{a}$ ；よって $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d}{dt}\dfrac{t^2-b}{a}=\dfrac{2}{a}t$ なので， $dx=\dfrac{2}{a}t\,dt$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx$ を計算する．変数 t を $t=\sqrt{4x-9}$ とおく．

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx$ を計算する．変数 t を $t=\sqrt{4x-9}$ とおく．
$t^2 = 4x-9$ なので $x = \dfrac{t^2+9}{4}$ ．

例　不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx$ を計算する．変数 t を $t=\sqrt{4x-9}$ とおく．
$t^2=4x-9$ なので $x=\dfrac{t^2+9}{4}$ ． $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t}{2}$ なので $dx=\dfrac{t}{2}\,dt$ ．

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx$ を計算する．変数 t を $t=\sqrt{4x-9}$ とおく．$t^2=4x-9$ なので $x=\dfrac{t^2+9}{4}$ ．$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t}{2}$ なので $dx=\dfrac{t}{2}\,dt$ ．積分定数を C とおく．

$$\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx = \int \frac{3}{\dfrac{t^2+9}{4}\cdot t}\,\frac{t}{2}\,dt = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+9}\,dt$$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx$ を計算する．変数 t を $t=\sqrt{4x-9}$ とおく．$t^2=4x-9$ なので $x=\dfrac{t^2+9}{4}$ ． $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t}{2}$ なので $dx=\dfrac{t}{2}\,dt$ ．積分定数を C とおく．

$$\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx = \int \frac{3}{\dfrac{t^2+9}{4}\cdot t}\frac{t}{2}\,dt = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+9}\,dt = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{t}{3}+C$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{4x-9}}{3}+C \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問7.8.1}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx$ を計算せよ.

変数 t を $t=$ とおく. $t^2=$ なので $x=$. $\dfrac{dx}{dt}=$ なので $dx=\quad dt$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx=\int \qquad\qquad dt=$$

$\boxed{\text{問}7.8.1}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx$ を計算せよ.

変数 t を $t=\sqrt{3x+1}$ とおく. $t^2=3x+1$ なので $x=\dfrac{t^2-1}{3}$. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{3}t$ なので $dx=\dfrac{2}{3}t\,dt$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx = \int \qquad\qquad dt =$$

$\boxed{問7.8.1}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx$ を計算せよ.

変数 t を $t=\sqrt{3x+1}$ とおく. $t^2=3x+1$ なので $x=\dfrac{t^2-1}{3}$. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{3}t$ なので $dx=\dfrac{2}{3}t\,dt$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx = \int \frac{3}{1+2t}\,\frac{2}{3}t\,dt = \int \frac{2t}{1+2t}\,dt =$$

$\boxed{問7.8.1}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx$ を計算せよ．

変数 t を $t=\sqrt{3x+1}$ とおく． $t^2=3x+1$ なので $x=\dfrac{t^2-1}{3}$ ． $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{3}t$ なので $dx=\dfrac{2}{3}t\,dt$ ．積分定数を C とおく．

$$\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx = \int \frac{3}{1+2t}\frac{2}{3}t\,dt = \int \frac{2t}{1+2t}\,dt = \int \left(1-\frac{1}{2t+1}\right)dt$$

$$=$$

t の整式 $2t$ を $2t+1$ で割ると整商は 1 で剰余は -1 なので，

$$\frac{2t}{2t+1} = \frac{1\cdot(2t+1)-1}{2t+1} = 1-\frac{1}{2t+1}\ .$$

$\boxed{問7.8.1}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx$ を計算せよ.

変数 t を $t=\sqrt{3x+1}$ とおく. $t^2=3x+1$ なので $x=\dfrac{t^2-1}{3}$. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{3}t$ なので $dx=\dfrac{2}{3}t\,dt$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx &= \int \frac{3}{1+2t}\frac{2}{3}t\,dt = \int \frac{2t}{1+2t}\,dt = \int\left(1-\frac{1}{2t+1}\right)dt \\ &= t-\frac{1}{2}\ln|2t+1|+C \\ &= \sqrt{3x+1}-\frac{1}{2}\ln\left|2\sqrt{3x+1}+1\right|+C \\ &= \end{aligned}$$

$\boxed{問 7.8.1}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx$ を計算せよ．

変数 t を $t=\sqrt{3x+1}$ とおく．$t^2=3x+1$ なので $x=\dfrac{t^2-1}{3}$ ．$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{3}t$ なので $dx=\dfrac{2}{3}t\,dt$ ．積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx &= \int \frac{3}{1+2t}\frac{2}{3}t\,dt = \int \frac{2t}{1+2t}\,dt = \int \left(1-\frac{1}{2t+1}\right)dt \\ &= t-\frac{1}{2}\ln|2t+1|+C \\ &= \sqrt{3x+1}-\frac{1}{2}\ln\left|2\sqrt{3x+1}+1\right|+C \\ &= \sqrt{3x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(1+2\sqrt{3x+1}\right)+C\ .\end{aligned}$$

$3x+1\geq 0$ である各実数 x について，$\sqrt{3x+1}\geq 0$ なので $2\sqrt{3x+1}+1\geq 1>0$ ，よって $\left|2\sqrt{3x+1}+1\right|=2\sqrt{3x+1}+1$ ．

$\boxed{問7.8.1}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx$ を計算せよ．

変数 t を $t=\sqrt{3x+1}$ とおく． $t^2=3x+1$ なので $x=\dfrac{t^2-1}{3}$ ． $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{3}t$ なので $dx=\dfrac{2}{3}t\,dt$ ．積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}
\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx &= \int \frac{3}{1+2t}\frac{2}{3}t\,dt = \int \frac{2t}{1+2t}\,dt = \int\left(1-\frac{1}{2t+1}\right)dt \\
&= t-\frac{1}{2}\ln|2t+1|+C \\
&= \sqrt{3x+1}-\frac{1}{2}\ln\left|2\sqrt{3x+1}+1\right|+C \\
&= \sqrt{3x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(1+2\sqrt{3x+1}\right)+C \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問 7.8.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy$ を計算せよ.

変数 x を $x=$ とおく. $x^2=$ なので $y=$. $\dfrac{dy}{dx}=$ なので $dy=$ dx . 積分定数を C_0, C とおく.

$$\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy = \int \frac{\qquad}{\qquad}\, dx =$$

$\boxed{問 7.8.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy$ を計算せよ.

変数 x を $x=\sqrt{2y+1}$ とおく. $x^2=2y+1$ なので $y=\dfrac{x^2-1}{2}$. $\dfrac{dy}{dx}=x$ なので $dy=x\,dx$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy = \int \frac{\qquad\qquad}{}\ dx =$$

$\boxed{\text{問}7.8.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy$ を計算せよ．

変数 x を $x=\sqrt{2y+1}$ とおく． $x^2=2y+1$ なので $y=\dfrac{x^2-1}{2}$ ． $\dfrac{dy}{dx}=x$ なので $dy=x\,dx$ ．積分定数を C_0, C とおく．

$$\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy=\int \frac{2\dfrac{x^2-1}{2}}{1+x}\,x\,dx=\int \frac{x(x^2-1)}{x+1}\,dx=$$

$\boxed{問7.8.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy$ を計算せよ．

変数 x を $x=\sqrt{2y+1}$ とおく． $x^2=2y+1$ なので $y=\dfrac{x^2-1}{2}$ ． $\dfrac{dy}{dx}=x$ なので $dy=x\,dx$ ．積分定数を C_0, C とおく．

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy &= \int \frac{2\dfrac{x^2-1}{2}}{1+x}\,x\,dx = \int \frac{x(x^2-1)}{x+1}\,dx = \int \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}\,dx \\
&= \int (x^2-x)\,dx = \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C_0 \\
&= \frac{1}{3}(2y+1)\sqrt{2y+1}-\frac{1}{2}(2y+1)+C_0 \\
&= \frac{2y+1}{3}\sqrt{2y+1}-y-\frac{1}{2}+C_0 \\
&= \frac{2y+1}{3}\sqrt{2y+1}-y+C \ .
\end{aligned}
$$

$-\dfrac{1}{2}+C_0$ の値は一定なので定数 C に置き換える．

$\boxed{問 7.8.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy$ を計算せよ．

変数 x を $x=\sqrt{2y+1}$ とおく． $x^2=2y+1$ なので $y=\dfrac{x^2-1}{2}$ ． $\dfrac{dy}{dx}=x$ なので $dy=x\,dx$ ．積分定数を C_0, C とおく．

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy &= \int \frac{2\,\frac{x^2-1}{2}}{1+x}\,x\,dx = \int \frac{x(x^2-1)}{x+1}\,dx = \int \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}\,dx \\
&= \int (x^2-x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_0 \\
&= \frac{1}{3}(2y+1)\sqrt{2y+1} - \frac{1}{2}(2y+1) + C_0 \\
&= \frac{2y+1}{3}\sqrt{2y+1} - y - \frac{1}{2} + C_0 \\
&= \frac{2y+1}{3}\sqrt{2y+1} - y + C \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$