

7.7 三角関数が現れる式の積分法

関数 f に対して、不定積分 $\int f(\sin x) \cos x dx$ の計算には次のような置換積分を用いる：変数 x, y について $y = \sin x$ とおくと、 $\frac{dy}{dx} = \cos x$ なので $\cos x dx = dy$ なので、

$$\int f(\sin x) \cos x dx = \int f(y) dy .$$

例 不定積分 $\int \sin^3 t \cos t dt$ を計算する.

例 不定積分 $\int \sin^3 t \cos t dt$ を計算する. 変数 x を $x = \sin t$ とおく.

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \quad \text{なので} \quad \cos t dt = dx .$$

例 不定積分 $\int \sin^3 t \cos t dt$ を計算する. 変数 x を $x = \sin t$ とおく.
 $\frac{dx}{dt} = \cos t$ なので $\cos t dt = dx$. 積分定数を C とおく.

$$\int \sin^3 t \cos t dt = \int (\sin t)^3 \cos t dt = \int x^3 dx$$

例 不定積分 $\int \sin^3 t \cos t dt$ を計算する. 変数 x を $x = \sin t$ とおく.
 $\frac{dx}{dt} = \cos t$ なので $\cos t dt = dx$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \sin^3 t \cos t dt &= \int (\sin t)^3 \cos t dt = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C = \frac{1}{4}(\sin t)^4 + C \\ &= \frac{1}{4} \sin^4 t + C .\end{aligned}$$

終

関数 f に対して、不定積分 $\int f(\cos x) \sin x dx$ の計算には次のような置換積分を用いる：変数 x, y について $y = \cos x$ とおくと、 $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x dx = -dy$ なので、

$$\int f(\cos x) \sin x dx = \int f(y)(-dy) = -\int f(y) dy .$$

例 不定積分 $\int \sin x (\cos^4 x + 2) dx$ を計算する.

例 不定積分 $\int \sin x (\cos^4 x + 2) dx$ を計算する. 変数 y を $y = \cos x$ とおく.

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \quad \text{なので} \quad \sin x dx = -dy .$$

例 不定積分 $\int \sin x (\cos^4 x + 2) dx$ を計算する. 変数 y を $y = \cos x$ とおく.
 $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x dx = -dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \sin x (\cos^4 x + 2) dx &= \int (\cos^4 x + 2) \sin x dx = \int (y^4 + 2)(-dy) \\ &= -\int (y^4 + 2) dy\end{aligned}$$

例 不定積分 $\int \sin x (\cos^4 x + 2) dx$ を計算する. 変数 y を $y = \cos x$ とおく.
 $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x dx = -dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \sin x (\cos^4 x + 2) dx &= \int (\cos^4 x + 2) \sin x dx = \int (y^4 + 2)(-dy) \\ &= -\int (y^4 + 2) dy = -\left(\frac{1}{5}y^5 + 2y\right) + C \\ &= -\frac{1}{5} \sin^5 x - 2 \sin x + C .\end{aligned}$$

終

問7.7.1 不定積分 $\int (\cos^2 t + 3) \sin t dt$ を計算せよ.

変数 x を $x =$ とおく. $\frac{dx}{dt} =$ なので $dt = -dx$. 積分定数を C とおく.

$$\int (\cos^2 t + 3) \sin t dt = \int (\quad) (\quad) = -\int (\quad) dx =$$

問7.7.1 不定積分 $\int (\cos^2 t + 3) \sin t dt$ を計算せよ.

変数 x を $x = \cos t$ とおく. $\frac{dx}{dt} = -\sin t$ なので $\sin t dt = -dx$. 積分定数を C とおく.

$$\int (\cos^2 t + 3) \sin t dt = \int (\quad) (\quad) = -\int (\quad) dx =$$

問7.7.1 不定積分 $\int (\cos^2 t + 3) \sin t dt$ を計算せよ.

変数 x を $x = \cos t$ とおく. $\frac{dx}{dt} = -\sin t$ なので $\sin t dt = -dx$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int (\cos^2 t + 3) \sin t dt &= \int (x^2 + 3)(-dx) = -\int (x^2 + 3) dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 + 3x\right) + C \\ &= -\frac{1}{3}\cos^3 t - 3\cos t + C .\end{aligned}$$

終

置換積分法によって正接関数 $\tan x$ の不定積分を求める.

置換積分法によって正接関数 $\tan x$ の不定積分を求める． $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ．

変数 y を $y =$ とおく．

置換積分法によって正接関数 $\tan x$ の不定積分を求める． $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ．

変数 y を $y = \cos x$ とおく． $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x dx = -dy$ ．

置換積分法によって正接関数 $\tan x$ の不定積分を求める． $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ．

変数 y を $y = \cos x$ とおく． $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x dx = -dy$ ． よって

$$\tan x dx = \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{1}{\cos x} \sin x dx = \frac{1}{y} (-dy) = -\frac{1}{y} dy .$$

置換積分法によって正接関数 $\tan x$ の不定積分を求める． $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ．

変数 y を $y = \cos x$ とおく． $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x dx = -dy$ ． よって

$$\tan x dx = \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{1}{\cos x} \sin x dx = \frac{1}{y} (-dy) = -\frac{1}{y} dy .$$

積分定数を C とおく．

$$\int \tan x dx = \int \left(-\frac{1}{y}\right) dy = -\int \frac{1}{y} dy$$

置換積分法によって正接関数 $\tan x$ の不定積分を求める． $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ．

変数 y を $y = \cos x$ とおく． $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x dx = -dy$ ． よって

$$\tan x dx = \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{1}{\cos x} \sin x dx = \frac{1}{y} (-dy) = -\frac{1}{y} dy .$$

積分定数を C とおく．

$$\int \tan x dx = \int \left(-\frac{1}{y}\right) dy = -\int \frac{1}{y} dy = -\ln|y| + C = -\ln|\cos x| + C .$$

置換積分法によって正接関数 $\tan x$ の不定積分を求める． $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ．

変数 y を $y = \cos x$ とおく． $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x dx = -dy$ ． よって

$$\tan x dx = \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{1}{\cos x} \sin x dx = \frac{1}{y} (-dy) = -\frac{1}{y} dy .$$

積分定数を C とおく．

$$\int \tan x dx = \int \left(-\frac{1}{y}\right) dy = -\int \frac{1}{y} dy = -\ln|y| + C = -\ln|\cos x| + C .$$

[公式] 積分定数を C とおく．

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C .$$

問7.7.2 不定積分 $\int \tan \frac{y}{3} dy$ を計算せよ.

変数 z を $z =$ とおく. $\frac{dz}{dy} =$ なので $dy = dz$. 積分定数を C とおく.

$$\int \tan \frac{y}{3} dy = \int \quad \cdot dz =$$

問7.7.2 不定積分 $\int \tan \frac{y}{3} dy$ を計算せよ.

変数 z を $z = \frac{y}{3}$ とおく. $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{3}$ なので $dy = 3dz$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \tan \frac{y}{3} dy &= \int \tan z \cdot 3 dz = 3 \int \tan z dz = 3(-\ln |\cos z|) + C \\ &= -3 \ln \left| \cos \frac{y}{3} \right| + C .\end{aligned}$$

終

被積分関数を $f(\sin x)\cos x$ または $f(\cos x)\sin x$ の形の式に変形するために次の事実を用いることがある： $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ なので，

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x , \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x .$$

例 不定積分 $\int \cos^3 x dx$ を計算する.

例 不定積分 $\int \cos^3 x dx$ を計算する. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ なので,

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x .$$

例 不定積分 $\int \cos^3 x dx$ を計算する. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ なので,

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x .$$

変数 y を $y =$ とおく.

例 不定積分 $\int \cos^3 x dx$ を計算する. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ なので,

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x .$$

変数 y を $y = \sin x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = \cos x$ なので $\cos x dx = dy$. 積分定数を C とおく.

例 不定積分 $\int \cos^3 x dx$ を計算する. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ なので,

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x .$$

変数 y を $y = \sin x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = \cos x$ なので $\cos x dx = dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - y^2) dy$$

例 不定積分 $\int \cos^3 x dx$ を計算する. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ なので,

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x .$$

変数 y を $y = \sin x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = \cos x$ なので $\cos x dx = dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x dx &= \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - y^2) dy \\ &= y - \frac{1}{3}y^3 + C = \sin x - \frac{1}{3}(\sin x)^3 + C \\ &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C . \end{aligned}$$

終

問7.7.3 不定積分 $\int \sin^3 x dx$ を計算せよ.

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (\quad) \sin x .$$

変数 y を $y = \quad$ とおく. $\frac{dy}{dx} = \quad$ なので $dx = \quad dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \sin^3 x dx = \int \quad dx =$$

問7.7.3 不定積分 $\int \sin^3 x dx$ を計算せよ.

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x) \sin x .$$

変数 y を $y = \cos x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x dx = -dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \sin^3 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx =$$

問7.7.3 不定積分 $\int \sin^3 x dx$ を計算せよ.

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x) \sin x .$$

変数 y を $y = \cos x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x dx = -dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \int (1 - y^2)(-dy) \\ &= \int (y^2 - 1) dy = \frac{1}{3}y^3 - y + C \\ &= \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C . \end{aligned}$$

終

正接関数 $\tan x$ が現われる式は，公式 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ によって変形する．

例 不定積分 $\int \tan x(1 - \cos x) dx$ を計算する.

例 不定積分 $\int \tan x(1 - \cos x) dx$ を計算する. 公式 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ により

$$\tan x(1 - \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x}(1 - \cos x) = \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) \sin x .$$

例 不定積分 $\int \tan x(1 - \cos x) dx$ を計算する. 公式 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ により

$$\tan x(1 - \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x}(1 - \cos x) = \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) \sin x .$$

変数 y を $y =$ とおく.

例 不定積分 $\int \tan x(1 - \cos x) dx$ を計算する. 公式 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ により

$$\tan x(1 - \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x}(1 - \cos x) = \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) \sin x .$$

変数 y を $y = \cos x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x dx = -dy$.

例 不定積分 $\int \tan x(1 - \cos x) dx$ を計算する. 公式 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ により

$$\tan x(1 - \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x}(1 - \cos x) = \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) \sin x .$$

変数 y を $y = \cos x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x dx = -dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \tan x(1 - \cos x) dx = \int \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) \sin x dx = \int \left(\frac{1}{y} - 1\right) (-dy)$$

例 不定積分 $\int \tan x(1 - \cos x) dx$ を計算する. 公式 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ により

$$\tan x(1 - \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x}(1 - \cos x) = \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) \sin x .$$

変数 y を $y = \cos x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x dx = -dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \tan x(1 - \cos x) dx &= \int \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) \sin x dx = \int \left(\frac{1}{y} - 1\right) (-dy) \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy = y - \ln|y| + C \\ &= \cos x - \ln|\cos x| + C . \end{aligned}$$

終

問7.7.4 不定積分 $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$ を計算せよ.

$\frac{\tan x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$. 変数 y を $y = \cos x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので

$dx = -\frac{dy}{\sin x}$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \cdot \left(-\frac{dy}{\sin x}\right) = \int -\frac{1}{y^3} dy = \frac{1}{2y^2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

問7.7.4 不定積分 $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$ を計算せよ.

$\frac{\tan x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$. 変数 y を $y = \cos x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので

$dx = -\frac{dy}{\sin x}$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{-1}{y^3} dy = \frac{1}{2y^2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

問7.7.4 不定積分 $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$ を計算せよ.

$\frac{\tan x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$. 変数 y を $y = \cos x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x dx = -dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx =$$

問7.7.4 不定積分 $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$ を計算せよ.

$\frac{\tan x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$. 変数 y を $y = \cos x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x dx = -dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{1}{\cos^3 x} \sin x dx = \int \frac{1}{y^3} (-dy) \\ &= -\int y^{-3} dy = -\left(-\frac{1}{2}y^{-2}\right) + C = \frac{1}{2y^2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C \\ &= \frac{1}{2} \sec^2 x + C .\end{aligned}$$

終

定数 a, b に対して関数 $\sin x$ の 1 次式 $a \sin x + b$ 或いは関数 $\cos x$ の 1 次式 $a \cos x + b$ を置換することがある.

例 不定積分 $\int \frac{\sin x}{3 \cos x + 5} dx$ を計算する.

例 不定積分 $\int \frac{\sin x}{3 \cos x + 5} dx$ を計算する. 変数 y を $y = 3 \cos x + 5$ とおく.

例 不定積分 $\int \frac{\sin x}{3 \cos x + 5} dx$ を計算する. 変数 y を $y = 3 \cos x + 5$ とおく.

$$\frac{dy}{dx} = -3 \sin x \quad \text{なので,} \quad \sin x dx = -\frac{1}{3} dy .$$

例 不定積分 $\int \frac{\sin x}{3 \cos x + 5} dx$ を計算する. 変数 y を $y = 3 \cos x + 5$ とおく.

$\frac{dy}{dx} = -3 \sin x$ なので, $\sin x dx = -\frac{1}{3} dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{\sin x}{3 \cos x + 5} dx = \int \frac{1}{y} \left(-\frac{1}{3} dy \right) = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{y} dy$$

例 不定積分 $\int \frac{\sin x}{3 \cos x + 5} dx$ を計算する. 変数 y を $y = 3 \cos x + 5$ とおく.

$\frac{dy}{dx} = -3 \sin x$ なので, $\sin x dx = -\frac{1}{3} dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{3 \cos x + 5} dx &= \int \frac{1}{y} \left(-\frac{1}{3} dy \right) = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{3} \ln|y| + C \\ &= -\frac{1}{3} \ln|3 \cos x + 5| + C . \end{aligned}$$

例 不定積分 $\int \frac{\sin x}{3 \cos x + 5} dx$ を計算する. 変数 y を $y = 3 \cos x + 5$ とおく.

$\frac{dy}{dx} = -3 \sin x$ なので, $\sin x dx = -\frac{1}{3} dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{3 \cos x + 5} dx &= \int \frac{1}{y} \left(-\frac{1}{3} dy \right) = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{3} \ln|y| + C \\ &= -\frac{1}{3} \ln|3 \cos x + 5| + C. \end{aligned}$$

任意の実数 x について, $\cos x \geq -1$ なので, $3 \cos x \geq -3$, $3 \cos x + 5 \geq 2$,
よって $|3 \cos x + 5| = 3 \cos x + 5$.

例 不定積分 $\int \frac{\sin x}{3 \cos x + 5} dx$ を計算する. 変数 y を $y = 3 \cos x + 5$ とおく.

$\frac{dy}{dx} = -3 \sin x$ なので, $\sin x dx = -\frac{1}{3} dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{3 \cos x + 5} dx &= \int \frac{1}{y} \left(-\frac{1}{3} dy \right) = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{3} \ln|y| + C \\ &= -\frac{1}{3} \ln|3 \cos x + 5| + C. \end{aligned}$$

任意の実数 x について, $\cos x \geq -1$ なので, $3 \cos x \geq -3$, $3 \cos x + 5 \geq 2$,
よって $|3 \cos x + 5| = 3 \cos x + 5$.

$$\int \frac{\sin x}{3 \cos x + 5} dx = -\frac{1}{3} \ln(3 \cos x + 5) + C.$$

終

問7.7.5 不定積分 $\int \frac{\cos x}{5 \sin x - 7} dx$ を計算せよ.

変数 y を $y =$ とおく. $\frac{dy}{dx} =$ なので, $dx =$ dy .

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{5 \sin x - 7} dx &= \int \quad dx = \int dy = \ln | \quad | + C \\ &= \ln | \quad | + C . \end{aligned}$$

任意の実数 x について, $\sin x \leq 1$ なので, $5 \sin x \leq$, $5 \sin x - 7 \leq$,
よって $| \quad | =$. 故に

$$\int \frac{\cos x}{5 \sin x - 7} dx =$$

問7.7.5 不定積分 $\int \frac{\cos x}{5 \sin x - 7} dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = 5 \sin x - 7$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 5 \cos x$ なので, $\cos x dx = \frac{1}{5} dy$.
積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{5 \sin x - 7} dx &= \int \frac{1}{y} \frac{1}{5} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{5} \ln |y| + C \\ &= \frac{1}{5} \ln |5 \sin x - 7| + C . \end{aligned}$$

任意の実数 x について, $\sin x \leq 1$ なので, $5 \sin x \leq 5$, $5 \sin x - 7 \leq -2$,
よって $|5 \sin x - 7| = 7 - 5 \sin x$. 故に

$$\int \frac{\cos x}{5 \sin x - 7} dx =$$

問7.7.5 不定積分 $\int \frac{\cos x}{5 \sin x - 7} dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = 5 \sin x - 7$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 5 \cos x$ なので, $\cos x dx = \frac{1}{5} dy$.
積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{5 \sin x - 7} dx &= \int \frac{1}{y} \frac{1}{5} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{5} \ln |y| + C \\ &= \frac{1}{5} \ln |5 \sin x - 7| + C . \end{aligned}$$

任意の実数 x について, $\sin x \leq 1$ なので, $5 \sin x \leq 5$, $5 \sin x - 7 \leq -2$,
よって $|5 \sin x - 7| = 7 - 5 \sin x$. 故に

$$\int \frac{\cos x}{5 \sin x - 7} dx = \frac{1}{5} \ln(7 - 5 \sin x) + C .$$

終

例 不定積分 $\int \frac{\cos t}{9 - 4 \cos^2 t} dt$ を計算する.

例 不定積分 $\int \frac{\cos t}{9 - 4 \cos^2 t} dt$ を計算する.

$$9 - 4 \cos^2 t = 9 - 4(1 - \sin^2 t) = 4 \sin^2 t + 5 .$$

例 不定積分 $\int \frac{\cos t}{9 - 4 \cos^2 t} dt$ を計算する.

$$9 - 4 \cos^2 t = 9 - 4(1 - \sin^2 t) = 4 \sin^2 t + 5 .$$

よって

$$\int \frac{\cos t}{9 - 4 \sin^2 t} dt = \int \frac{\cos t}{4 \sin^2 t + 5} dt .$$

例 不定積分 $\int \frac{\cos t}{9 - 4 \cos^2 t} dt$ を計算する.

$$9 - 4 \cos^2 t = 9 - 4(1 - \sin^2 t) = 4 \sin^2 t + 5 .$$

よって

$$\int \frac{\cos t}{9 - 4 \sin^2 t} dt = \int \frac{\cos t}{4 \sin^2 t + 5} dt .$$

変数 x を $x = \sin t$ とおく. $\frac{dx}{dt} = \cos t$ なので $\cos t dt = dx$.

例 不定積分 $\int \frac{\cos t}{9 - 4 \cos^2 t} dt$ を計算する.

$$9 - 4 \cos^2 t = 9 - 4(1 - \sin^2 t) = 4 \sin^2 t + 5 .$$

よって

$$\int \frac{\cos t}{9 - 4 \sin^2 t} dt = \int \frac{\cos t}{4 \sin^2 t + 5} dt .$$

変数 x を $x = \sin t$ とおく. $\frac{dx}{dt} = \cos t$ なので $\cos t dt = dx$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{\cos t}{9 - 4 \cos^2 t} dt = \int \frac{1}{4 \sin^2 t + 5} \cos t dt = \int \frac{1}{4x^2 + 5} dx$$

例 不定積分 $\int \frac{\cos t}{9 - 4 \cos^2 t} dt$ を計算する.

$$9 - 4 \cos^2 t = 9 - 4(1 - \sin^2 t) = 4 \sin^2 t + 5 .$$

よって

$$\int \frac{\cos t}{9 - 4 \sin^2 t} dt = \int \frac{\cos t}{4 \sin^2 t + 5} dt .$$

変数 x を $x = \sin t$ とおく. $\frac{dx}{dt} = \cos t$ なので $\cos t dt = dx$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos t}{9 - 4 \cos^2 t} dt &= \int \frac{1}{4 \sin^2 t + 5} \cos t dt = \int \frac{1}{4x^2 + 5} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2 + \frac{5}{4}} dx = \end{aligned}$$

例 不定積分 $\int \frac{\cos t}{9 - 4 \cos^2 t} dt$ を計算する.

$$9 - 4 \cos^2 t = 9 - 4(1 - \sin^2 t) = 4 \sin^2 t + 5 .$$

よって

$$\int \frac{\cos t}{9 - 4 \sin^2 t} dt = \int \frac{\cos t}{4 \sin^2 t + 5} dt .$$

変数 x を $x = \sin t$ とおく. $\frac{dx}{dt} = \cos t$ なので $\cos t dt = dx$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos t}{9 - 4 \cos^2 t} dt &= \int \frac{1}{4 \sin^2 t + 5} \cos t dt = \int \frac{1}{4x^2 + 5} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2 + \frac{5}{4}} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{\frac{5}{4}}} + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{2 \sin t}{\sqrt{5}} + C . \end{aligned}$$

終

問7.7.6 不定積分 $\int \frac{\sin t}{7-3\sin^2 t} dt$ を計算する.

$$7-3\sin^2 t =$$

変数 x を $x =$ とおく. $\frac{dx}{dt} =$ なので $dt = -dx$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{\sin t}{7-3\sin^2 t} dt =$$

問7.7.6 不定積分 $\int \frac{\sin t}{7-3\sin^2 t} dt$ を計算する.

$$7-3\sin^2 t = 7-3(1-\cos^2 t) = 3\cos^2 t + 4 .$$

変数 x を $x = \cos t$ とおく. $\frac{dx}{dt} = -\sin t$ なので $\sin t dt = -dx$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{\sin t}{7-3\sin^2 t} dt = \int \frac{1}{3\cos^2 t + 4} \sin t dt =$$

問7.7.6 不定積分 $\int \frac{\sin t}{7-3\sin^2 t} dt$ を計算する.

$$7-3\sin^2 t = 7-3(1-\cos^2 t) = 3\cos^2 t + 4 .$$

変数 x を $x = \cos t$ とおく. $\frac{dx}{dt} = -\sin t$ なので $\sin t dt = -dx$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin t}{7-3\sin^2 t} dt &= \int \frac{1}{3\cos^2 t + 4} \sin t dt = - \int \frac{1}{3x^2 + 4} dx \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2 + \frac{4}{3}} dx = \end{aligned}$$

問7.7.6 不定積分 $\int \frac{\sin t}{7-3\sin^2 t} dt$ を計算する.

$$7-3\sin^2 t = 7-3(1-\cos^2 t) = 3\cos^2 t + 4 .$$

変数 x を $x = \cos t$ とおく. $\frac{dx}{dt} = -\sin t$ なので $\sin t dt = -dx$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin t}{7-3\sin^2 t} dt &= \int \frac{1}{3\cos^2 t + 4} \sin t dt = -\int \frac{1}{3x^2 + 4} dx \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2 + \frac{4}{3}} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{\frac{4}{3}}} + C \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3} \cos t}{2} + C . \end{aligned}$$

終

a, b を実数とする.

余弦関数の加法定理の等式 $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ と $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ とを左辺どうし右辺どうし足す.

$$\begin{array}{r} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ + \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b \end{array}$$

これより

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \{ \cos(a+b) + \cos(a-b) \} .$$

a, b を実数とする.

余弦関数の加法定理の等式 $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ と $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ とを左辺どうし右辺どうし足す.

$$\begin{array}{r} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ + \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b \end{array}$$

これより

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \{ \cos(a+b) + \cos(a-b) \} .$$

更に, $b = a$ とすると

$$\begin{aligned} \cos^2 a &= \cos a \cos a = \frac{1}{2} \{ \cos(a+a) + \cos(a-a) \} = \frac{1}{2} (\cos 2a + \cos 0) \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2a) . \end{aligned}$$

余弦関数の加法定理の等式 $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ と
 $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ とを左辺どうし右辺どうし引く.

$$\begin{array}{r} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ - \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b \end{array}$$

これより

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} \{ \cos(a+b) - \cos(a-b) \} .$$

余弦関数の加法定理の等式 $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ と
 $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ とを左辺どうし右辺どうし引く.

$$\begin{array}{r} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ - \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b \end{array}$$

これより

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} \{ \cos(a+b) - \cos(a-b) \} .$$

更に, $b = a$ とすると

$$\begin{aligned} \sin^2 a &= \sin a \sin a = -\frac{1}{2} \{ \cos(a+a) - \cos(a-a) \} = -\frac{1}{2} (\cos 2a - \cos 0) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2a) . \end{aligned}$$

正弦関数の加法定理の等式 $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ と
 $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ とを左辺どうし右辺どうし足す.

$$\begin{array}{r} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ + \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \hline \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b \end{array}$$

これより

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \{ \sin(a+b) + \sin(a-b) \} .$$

正弦関数の加法定理の等式 $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ と
 $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ とを左辺どうし右辺どうし足す.

$$\begin{array}{r} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ + \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \hline \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b \end{array}$$

これより

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \{ \sin(a+b) + \sin(a-b) \} .$$

更に $b = a$ とすると

$$\begin{aligned} \sin a \cos a &= \frac{1}{2} \{ \sin(a+a) + \sin(a-a) \} = \frac{1}{2} (\sin 2a + \sin 0) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2a . \end{aligned}$$

任意の実数 a, b について,

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \{ \cos(a + b) + \cos(a - b) \} ,$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} \{ \cos(a + b) - \cos(a - b) \} ,$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \{ \sin(a + b) + \sin(a - b) \} ;$$

任意の実数 a, b について,

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \{ \cos(a+b) + \cos(a-b) \} ,$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} \{ \cos(a+b) - \cos(a-b) \} ,$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \{ \sin(a+b) + \sin(a-b) \} ;$$

特に $b = a$ の場合は,

$$\sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos 2a) ,$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos 2a) ,$$

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a .$$

任意の実数 a, b について,

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \{ \cos(a+b) + \cos(a-b) \} ,$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} \{ \cos(a+b) - \cos(a-b) \} ,$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \{ \sin(a+b) + \sin(a-b) \} ;$$

特に $b = a$ の場合は,

$$\sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos 2a) ,$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos 2a) ,$$

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a .$$

正弦関数や余弦関数の積を積分するときは, これらの公式を用いて三角関数の積を和・差に変形する.

例 不定積分 $\int \cos^2 3t dt$ を計算する.

例 不定積分 $\int \cos^2 3t dt$ を計算する.

$$\int \cos^2 3t dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 6t) dt$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) .$$

例 不定積分 $\int \cos^2 3t dt$ を計算する.

$$\int \cos^2 3t dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 6t) dt = \frac{1}{2}(\int 1 dt + \int \cos 6t dt) .$$

例 不定積分 $\int \cos^2 3t dt$ を計算する.

$$\int \cos^2 3t dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 6t) dt = \frac{1}{2}(\int 1 dt + \int \cos 6t dt) .$$

変数 x を $x = 6t$ とおく. $\frac{dx}{dt} = 6$ なので $dt = \frac{1}{6} dx$.

例 不定積分 $\int \cos^2 3t dt$ を計算する.

$$\int \cos^2 3t dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 6t) dt = \frac{1}{2}(\int 1 dt + \int \cos 6t dt) .$$

変数 x を $x = 6t$ とおく. $\frac{dx}{dt} = 6$ なので $dt = \frac{1}{6} dx$. 積分定数を C_0 とおく.

$$\int \cos 6t dt = \int \cos x \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} \sin x + C_0 = \frac{1}{6} \sin 6t + C_0 .$$

例 不定積分 $\int \cos^2 3t dt$ を計算する.

$$\int \cos^2 3t dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 6t) dt = \frac{1}{2}(\int 1 dt + \int \cos 6t dt) .$$

変数 x を $x = 6t$ とおく. $\frac{dx}{dt} = 6$ なので $dt = \frac{1}{6} dx$. 積分定数を C_0 とおく.

$$\int \cos 6t dt = \int \cos x \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} \sin x + C_0 = \frac{1}{6} \sin 6t + C_0 .$$

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \cos^2 3t dt &= \frac{1}{2}(\int 1 dt + \int \cos 6t dt) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 6t}{6}\right) + C \\ &= \frac{t}{2} + \frac{\sin 6t}{12} + C . \end{aligned}$$

終

問7.7.7 不定積分 $\int \sin^2 \frac{x}{6} dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \sin^2 \frac{x}{6} dx = \int \frac{\quad}{2} dx =$$

問7.7.7 不定積分 $\int \sin^2 \frac{x}{6} dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 \frac{x}{6} dx &= \int \frac{1 - \cos \frac{x}{3}}{2} dx = \frac{1}{2} \int \left(1 - \cos \frac{x}{3}\right) dx = \frac{1}{2} \left(x - 3 \sin \frac{x}{3}\right) + C \\ &= \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \sin \frac{x}{3} + C .\end{aligned}$$

終

例 不定積分 $\int \sin(2x - 3) \sin(5x + 1) dx$ を計算せよ.

例 不定積分 $\int \sin(2x - 3) \sin(5x + 1) dx$ を計算せよ.

$$\sin(2x - 3) \sin(5x + 1) = -\frac{1}{2} \{ \cos(7x - 2) - \cos(-3x - 4) \}$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} \{ \cos(a + b) - \cos(a - b) \}$$

例 不定積分 $\int \sin(2x - 3) \sin(5x + 1) dx$ を計算せよ.

$$\begin{aligned}\sin(2x - 3) \sin(5x + 1) &= -\frac{1}{2} \{ \cos(7x - 2) - \cos(-3x - 4) \} \\ &= -\frac{1}{2} [\cos(7x - 2) - \cos\{-(3x + 4)\}] \\ &= -\frac{1}{2} \{ \cos(7x - 2) - \cos(3x + 4) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos(3x + 4) - \cos(7x - 2) \} .\end{aligned}$$

$$\sin(2x - 3) \sin(5x + 1) = \frac{1}{2} \{ \cos(3x + 4) - \cos(7x - 2) \} .$$

$$\sin(2x - 3) \sin(5x + 1) = \frac{1}{2} \{ \cos(3x + 4) - \cos(7x - 2) \} .$$

変数 y を $y = 3x + 4$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 3$ なので $dx = \frac{1}{3} dy$. 変数 z を $z = 7x - 2$ とおく. $\frac{dz}{dx} = 7$ なので $dx = \frac{1}{7} dz$.

$$\sin(2x - 3) \sin(5x + 1) = \frac{1}{2} \{ \cos(3x + 4) - \cos(7x - 2) \} .$$

変数 y を $y = 3x + 4$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 3$ なので $dx = \frac{1}{3} dy$. 変数 z を $z = 7x - 2$ とおく. $\frac{dz}{dx} = 7$ なので $dx = \frac{1}{7} dz$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \sin(2x - 3) \sin(5x + 1) dx &= \int \frac{1}{2} \{ \cos(3x + 4) - \cos(7x - 2) \} dx \\ &= \frac{1}{2} \{ \int \cos(3x + 4) dx - \int \cos(7x - 2) dx \} \end{aligned}$$

$$\sin(2x - 3) \sin(5x + 1) = \frac{1}{2} \{ \cos(3x + 4) - \cos(7x - 2) \} .$$

変数 y を $y = 3x + 4$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 3$ なので $dx = \frac{1}{3} dy$. 変数 z を $z = 7x - 2$ とおく. $\frac{dz}{dx} = 7$ なので $dx = \frac{1}{7} dz$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \sin(2x - 3) \sin(5x + 1) dx &= \int \frac{1}{2} \{ \cos(3x + 4) - \cos(7x - 2) \} dx \\ &= \frac{1}{2} \{ \int \cos(3x + 4) dx - \int \cos(7x - 2) dx \} \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \cos y \cdot \frac{1}{3} dy - \int \cos z \cdot \frac{1}{7} dz \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \sin y - \frac{1}{7} \sin z \right) + C \\ &= \frac{\sin(3x + 4)}{6} - \frac{\sin(7x - 2)}{14} + C . \end{aligned}$$

問7.7.8 不定積分 $\int \cos(2x - 4) \cos(3x + 2) dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \cos(2x - 4) \cos(3x + 2) dx = \int \left[\frac{1}{2} \{ \quad \quad \quad \} \right] dx$$
$$=$$

問7.7.8 不定積分 $\int \cos(2x - 4) \cos(3x + 2) dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \cos(2x - 4) \cos(3x + 2) dx &= \int \left[\frac{1}{2} \{ \cos(5x - 2) + \cos(-x - 6) \} \right] dx \\ &= \int \left[\frac{1}{2} \{ \cos(5x - 2) + \cos(x + 6) \} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int \cos(5x - 2) dx + \int \cos(x + 6) dx \right\} \\ &= \end{aligned}$$

問7.7.8 不定積分 $\int \cos(2x - 4) \cos(3x + 2) dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \cos(2x - 4) \cos(3x + 2) dx &= \int \left[\frac{1}{2} \{ \cos(5x - 2) + \cos(-x - 6) \} \right] dx \\ &= \int \left[\frac{1}{2} \{ \cos(5x - 2) + \cos(x + 6) \} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int \cos(5x - 2) dx + \int \cos(x + 6) dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(5x - 2)}{5} + \sin(x + 6) \right\} + C \\ &= \frac{\sin(5x - 2)}{10} + \frac{\sin(x + 6)}{2} + C .\end{aligned}$$

終

問7.7.9 不定積分 $\int \sin(7 - 3y) \cos(5y - 2) dy$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \sin(7 - 3y) \cos(5y - 2) dy = \int \left[\frac{1}{2} \{ \quad \quad \quad \} \right] dy$$
$$=$$

問7.7.9 不定積分 $\int \sin(7 - 3y) \cos(5y - 2) dy$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \sin(7 - 3y) \cos(5y - 2) dy &= \int \left[\frac{1}{2} \{ \sin(2y + 5) + \sin(-8y + 9) \} \right] dy \\ &= \int \left[\frac{1}{2} \{ \sin(2y + 5) - \sin(8y - 9) \} \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \{ \int \sin(2y + 5) dy - \int \sin(8y - 9) dy \} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \{ -\cos(2y + 5) \} - \frac{1}{8} \{ -\cos(8y - 9) \} \right] + C \\ &= \end{aligned}$$

問7.7.9 不定積分 $\int \sin(7-3y) \cos(5y-2) dy$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \sin(7-3y) \cos(5y-2) dy &= \int \left[\frac{1}{2} \{ \sin(2y+5) + \sin(-8y+9) \} \right] dy \\ &= \int \left[\frac{1}{2} \{ \sin(2y+5) - \sin(8y-9) \} \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int \sin(2y+5) dy - \int \sin(8y-9) dy \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \{ -\cos(2y+5) \} - \frac{1}{8} \{ -\cos(8y-9) \} \right] + C \\ &= \frac{\cos(8y-9)}{16} - \frac{\cos(2y+5)}{4} + C .\end{aligned}$$

終