7.6 有理関数の積分法

変数 x 及び定数 a,b,c,h,k（$a\neq 0$）に対して，分母が 2 次式である真分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ の不定積分を考える．この不定積分の計算法は，x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 b^2-4ac の値の符号によって異なる．

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a,b,c,h,k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac>0$ のときを考える．

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a,b,c,h,k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で，$b^2-4ac>0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は係数が実数の範囲で 2 個の 1 次式の積の形に因数分解できる：

$$ax^2+bx+c = A(x)B(x) \quad \text{（ } A(x) \text{ と } B(x) \text{ とは } x \text{ の 1 次式で互いに素）}.$$

整式 A と整式 B との両方に共通の 1 以上の次数の因数がないとき，A と B とは互いに素であるという．

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a,b,c,h,k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac>0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は係数が実数の範囲で 2 個の 1 次式の積の形に因数分解できる：

$ax^2+bx+c = A(x)B(x)$ （ $A(x)$ と $B(x)$ とは x の 1 次式で互いに素）．

ある定数 p と q とをとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{hx+k}{A(x)B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} .$$

この等式が恒等式であるとは，x の値が何であっても，両辺の値があるときは，つまり $A(x) \neq 0$ かつ $B(x) \neq 0$ であるときは，両辺の値が同じであることである．

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a,b,c,h,k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac>0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は係数が実数の範囲で 2 個の 1 次式の積の形に因数分解できる：

$ax^2+bx+c = A(x)B(x)$ （ $A(x)$ と $B(x)$ とは x の 1 次式で互いに素）．

ある定数 p と q とをとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{hx+k}{A(x)B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \quad .$$

このような分数式の変形を部分分数分解という.

$A(x) \neq 0$　かつ　$B(x) \neq 0$　のとき，

$$\frac{hx+k}{A(x)B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)}$$

両辺に $A(x)B(x)$ を掛ける．

$$\iff \frac{hx+k}{A(x)B(x)}A(x)B(x) = \frac{p}{A(x)}A(x)B(x) + \frac{q}{B(x)}A(x)B(x)$$

$A(x) \neq 0$ かつ $B(x) \neq 0$ のとき，

$$
\begin{aligned}
& \frac{hx+k}{A(x)B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \\
\iff \ & \frac{hx+k}{A(x)B(x)} A(x)B(x) = \frac{p}{A(x)} A(x)B(x) + \frac{q}{B(x)} A(x)B(x) \\
\iff \ & hx+k = pB(x) + qA(x) \ .
\end{aligned}
$$

約分する.

$A(x) \neq 0$ かつ $B(x) \neq 0$ のとき，

$$\begin{aligned} & \frac{hx+k}{A(x)B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \\ \iff & \frac{hx+k}{A(x)B(x)}A(x)B(x) = \frac{p}{A(x)}A(x)B(x) + \frac{q}{B(x)}A(x)B(x) \\ \iff & hx+k = pB(x) + qA(x) \ . \end{aligned}$$

よって，変数 x について，

$$\begin{aligned} & \text{等式 } \frac{hx+k}{A(x)B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \text{ が } x \text{ に関する恒等式である} \\ \iff & \text{等式 } hx+k = pB(x) + qA(x) \text{ が } x \text{ に関する恒等式である} \ . \end{aligned}$$

$A(x) \neq 0$ かつ $B(x) \neq 0$ のとき，

$$\begin{aligned} & \frac{hx+k}{A(x)B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \\ \iff\ & \frac{hx+k}{A(x)B(x)}A(x)B(x) = \frac{p}{A(x)}A(x)B(x) + \frac{q}{B(x)}A(x)B(x) \\ \iff\ & hx+k = pB(x) + qA(x)\ . \end{aligned}$$

よって，変数 x について，

$$\begin{aligned} & \text{等式}\ \frac{hx+k}{A(x)B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)}\ \text{が}\ x\ \text{に関する恒等式である} \\ \iff\ & \text{等式}\ hx+k = pB(x)+qA(x)\ \text{が}\ x\ \text{に関する恒等式である}\quad . \end{aligned}$$

そこで等式 $hx+k = pB(x)+qA(x)$ が x に関する恒等式になるように p, q の値を定める．

$A(x) \neq 0$ かつ $B(x) \neq 0$ のとき，

$$\begin{aligned} & \frac{hx+k}{A(x)B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{hx+k}{A(x)B(x)}A(x)B(x) = \frac{p}{A(x)}A(x)B(x) + \frac{q}{B(x)}A(x)B(x) \\ \Longleftrightarrow\ & hx+k = pB(x)+qA(x)\ . \end{aligned}$$

よって，変数 x について，

$$\begin{aligned} & \text{等式}\ \frac{hx+k}{A(x)B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)}\ \text{が}\ x\ \text{に関する恒等式である} \\ \Longleftrightarrow\ & \text{等式}\ hx+k = pB(x)+qA(x)\ \text{が}\ x\ \text{に関する恒等式である}\quad . \end{aligned}$$

そこで等式 $hx+k=pB(x)+qA(x)$ が x に関する恒等式になるように p, q の値を定める．そのために恒等式に関する次の性質を用いる：変数 x の高々1次の整式 $ax+b$ と $px+q$ と（ a, b, p, q は x と無関係な定数）について，

$$\text{等式}\ ax+b = px+q\ \text{が}\ x\ \text{に関する恒等式である} \Longleftrightarrow \quad = \quad \text{かつ} \quad = \quad .$$

$A(x) \neq 0$ かつ $B(x) \neq 0$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&\frac{hx+k}{A(x)B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \\
\iff\ &\frac{hx+k}{A(x)B(x)}A(x)B(x) = \frac{p}{A(x)}A(x)B(x) + \frac{q}{B(x)}A(x)B(x) \\
\iff\ &hx+k = pB(x)+qA(x)\ .
\end{aligned}
$$

よって，変数 x について，

$$
\begin{aligned}
&\text{等式}\ \frac{hx+k}{A(x)B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)}\ \text{が}\ x\ \text{に関する恒等式である} \\
\iff\ &\text{等式}\ hx+k = pB(x)+qA(x)\ \text{が}\ x\ \text{に関する恒等式である}\quad .
\end{aligned}
$$

そこで等式 $hx+k=pB(x)+qA(x)$ が x に関する恒等式になるように p,q の値を定める．そのために恒等式に関する次の性質を用いる：変数 x の高々1 次の整式 $ax+b$ と $px+q$ と（a,b,p,q は x と無関係な定数）について，

$$
\text{等式}\ ax+b=px+q\ \text{が}\ x\ \text{に関する恒等式である} \iff a=p\ \text{かつ}\ b=q\ .
$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する．等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けて整理する．

$\boxed{\text{例}}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する．等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けて整理する．

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$\boxed{例}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する．等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けて整理する．

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$$9x-7 = a(x-3) + b(x+2) \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a,b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3}\ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する．等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けて整理する．

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3)+\frac{b}{x-3}(x+2)(x-3)\ ,$$

$$9x-7 = a(x-3)+b(x+2)\ ,$$

$$9x-7 = (a+b)x-3a+2b\ .$$

$\boxed{例}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\, dx$ を計算する．等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けて整理する．

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$$9x-7 = a(x-3) + b(x+2) \ ,$$

$$9x-7 = (a+b)x - 3a + 2b \ .$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は，　　　　　　　かつ　　　　　　　　．

例 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する．等式 $\dfrac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けて整理する．

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$$9x-7 = a(x-3) + b(x+2) \ ,$$

$$9x-7 = (a+b)x - 3a + 2b \ .$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は，$a+b=9$ かつ $-3a+2b=-7$ ．

例 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する．等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けて整理する．

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$$9x-7 = a(x-3) + b(x+2) \ ,$$

$$9x-7 = (a+b)x - 3a + 2b \ .$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は，$a+b=9$ かつ $-3a+2b=-7$．
この方程式を解くと $a=5$ かつ $b=4$．

例 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a,b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する．等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けて整理する．

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$$9x-7 = a(x-3) + b(x+2) \ ,$$

$$9x-7 = (a+b)x - 3a + 2b \ .$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は，$a+b=9$ かつ $-3a+2b=-7$ ．この方程式を解くと $a=5$ かつ $b=4$ ．次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \ .$$

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} \;=\; \frac{5}{x+2}+\frac{4}{x-3} \quad .$$

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} \;=\; \frac{5}{x+2}+\frac{4}{x-3} \quad .$$

よって，

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx \;=\; \int\left(\frac{5}{x+2}+\frac{4}{x-3}\right)dx \;=\; 5\int\frac{1}{x+2}\,dx+4\int\frac{1}{x-3}\,dx \quad .$$

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \quad .$$

よって，

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \right) dx = 5\int \frac{1}{x+2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx \quad .$$

変数 y を $y = x+2$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$ ．

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \ .$$

よって，

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3}\right) dx = 5\int \frac{1}{x+2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx \ .$$

変数 y を $y = x+2$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$ ．変数 z を $z = x-3$ とおく． $\dfrac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$ ．

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \ .$$

よって，

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \right) dx = 5\int \frac{1}{x+2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx \ .$$

変数 y を $y = x+2$ とおく． $\frac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$ ．変数 z を $z = x-3$ とおく． $\frac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$ ．積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned} 5\int \frac{1}{x+2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx &= 5\int \frac{1}{y}\,dy + 4\int \frac{1}{z}\,dz = 5\ln|y| + 4\ln|z| + C \\ &= 5\ln|x+2| + 4\ln|x-3| + C \ , \end{aligned}$$

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \ .$$

よって，

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3}\right) dx = 5\int \frac{1}{x+2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx \ .$$

変数 y を $y = x+2$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$ ．変数 z を $z = x-3$ とおく． $\dfrac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$ ．積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned} 5\int \frac{1}{x+2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx &= 5\int \frac{1}{y}\,dy + 4\int \frac{1}{z}\,dz = 5\ln|y| + 4\ln|z| + C \\ &= 5\ln|x+2| + 4\ln|x-3| + C \ , \end{aligned}$$

故に

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = 5\ln|x+2| + 4\ln|x-3| + C \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}7.6.1}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定めよ：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}dx$ を計算せよ.

等式 $\dfrac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-4}$ の両辺に $(\qquad)(\qquad)$ を掛ける.

$$3x-22 = a(\qquad) + b(\qquad) \ ,$$

$$3x-22 = (\qquad)x - \qquad\quad .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は $\qquad = \qquad$ かつ $\qquad\qquad = \qquad$;
この方程式より $a = \qquad$ かつ $b = \qquad$. 次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{\qquad}{x+1} - \frac{\qquad}{x-4} \ .$$

$\boxed{問7.6.1}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a,b の値を定めよ：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4}\ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}dx$ を計算せよ．

等式 $\displaystyle\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4}$ の両辺に $(x+1)(x-4)$ を掛ける．

$$3x-22 = a(x-4)+b(x+1)\ ,$$

$$3x-22 = (a+b)x-4a+b\ .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は $\quad = \quad$ かつ $\quad = \quad$;

この方程式より $a =\quad$ かつ $b =\quad$ ．次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{\quad}{x+1} - \frac{\quad}{x-4}\ .$$

$\boxed{\text{問}7.6.1}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a,b の値を定めよ：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-4} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}\,dx$ を計算せよ.

等式 $\displaystyle\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-4}$ の両辺に $(x+1)(x-4)$ を掛ける.

$$3x-22 = a(x-4)+b(x+1) \ ,$$

$$3x-22 = (a+b)x-4a+b \ .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は $a+b=3$ かつ $-4a+b=-22$ ；
この方程式より $a=5$ かつ $b=-2$. 次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{5}{x+1}-\frac{2}{x-4} \ .$$

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{5}{x+1} - \frac{2}{x-4} \ .$$

よって

$$\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}\,dx = \int \left(\frac{5}{x+1} - \frac{2}{x-4}\right) dx = \int \frac{5}{x+1}\,dx - \int \frac{2}{x-4}\,dx \ .$$

変数 y を $y = x+1$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$ ．変数 z を $z = x-4$ とおく． $\dfrac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$ ．積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{x+1}\,dx - \int \frac{2}{x-4}\,dx &= 5\int \frac{1}{y}\,dy - 2\int \frac{1}{z}\,dx = 5\ln|y| - 2\ln|z| + C \\ &= 5\ln|x+1| - 2\ln|x-4| + C \ , \end{aligned}$$

故に

$$\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}\,dx = 5\ln|x+1| - 2\ln|x-4| + C \ . \qquad \boxed{終}$$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する． $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 a,b をとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)} = \frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する． $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 a, b をとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)} = \frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4} \ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けて整理する．

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4) = \frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4) \ ,$$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する． $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 a,b をとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)} = \frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4} \ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けて整理する．

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4) = \frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4) \ ,$$

$$7x+10 = a(x+4)+b(2x-1) \ ,$$

$$7x+10 = (a+2b)x+4a-b \ .$$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する． $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 a,b をとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)} = \frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4} \ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けて整理する．

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4) = \frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4) \ ,$$

$$7x+10 = a(x+4)+b(2x-1) \ ,$$

$$7x+10 = (a+2b)x+4a-b \ .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は，　　　　　　　　　かつ　　　　　　　　．

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する． $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 a,b をとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)} = \frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4} \ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けて整理する．

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4) = \frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4) \ ,$$

$$7x+10 = a(x+4)+b(2x-1) \ ,$$

$$7x+10 = (a+2b)x+4a-b \ .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は， $a+2b=7$ かつ $4a-b=10$ ．

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する． $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 a,b をとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)} = \frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4} \ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けて整理する．

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4) = \frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4) \ ,$$

$$7x+10 = a(x+4)+b(2x-1) \ ,$$

$$7x+10 = (a+2b)x+4a-b \ .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は， $a+2b=7$ かつ $4a-b=10$ ．

この方程式を解くと $a=3$ かつ $b=2$ ．

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する． $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 a,b をとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)} = \frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4}\ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けて整理する．

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4) = \frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4)\ ,$$

$$7x+10 = a(x+4)+b(2x-1)\ ,$$

$$7x+10 = (a+2b)x+4a-b\ .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は， $a+2b=7$ かつ $4a-b=10$ ．
この方程式を解くと $a=3$ かつ $b=2$ ．次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1}+\frac{2}{x+4}\ .$$

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} \;=\; \frac{3}{2x-1}+\frac{2}{x+4} \quad .$$

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \quad .$$

よって,

$$\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx = \int \left(\frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4}\right)dx = \int \frac{3}{2x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+4}\,dx \quad .$$

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \ .$$

よって，

$$\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx = \int \left(\frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4}\right) dx = \int \frac{3}{2x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+4}\,dx \ .$$

変数 y を $y = 2x-1$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dy$ ．

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1}+\frac{2}{x+4} \ .$$

よって,

$$\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx = \int\left(\frac{3}{2x-1}+\frac{2}{x+4}\right)dx = \int \frac{3}{2x-1}\,dx+\int \frac{2}{x+4}\,dx \ .$$

変数 y を $y=2x-1$ とおく. $\frac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\frac{1}{2}dy$. 変数 z を $z=x+4$ とおく. $\frac{dz}{dx}=1$ なので $dx=dz$.

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \ .$$

よって,

$$\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx = \int \left(\frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \right) dx = \int \frac{3}{2x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+4}\,dx \ .$$

変数 y を $y = 2x-1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. 変数 z を $z = x+4$ とおく. $\dfrac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}
\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx &= \int \frac{3}{2x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+4}\,dx = \int \frac{3}{y}\,\frac{1}{2}\,dy + \int \frac{2}{z}\,dz \\
&= \frac{3}{2}\ln|y| + 2\ln|z| + C \\
&= \frac{3}{2}\ln|2x-1| + 2\ln|x+4| + C \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}7.6.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx$ を計算せよ．

$2x^2+x-6=(x\quad\ )(2x\quad\ )$ なので，ある定数 a,b をとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6}=\frac{x-12}{(x\quad\ )(2x\quad\ )}=\frac{a}{x\qquad}+\frac{b}{2x\qquad}\ ,$$

$$x-12=a(2x\qquad)+b(x\qquad)\ ,$$

$$x-12=(\qquad\quad)x\qquad\qquad\qquad.$$

この等式が x に関する恒等式である条件は，$\qquad=\qquad$ かつ $\qquad\qquad=\qquad$．
この方程式より $a=\qquad$ かつ $b=\qquad$．次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6}=\frac{\qquad}{x\qquad}\qquad\frac{\qquad}{2x\qquad}\ .$$

$\boxed{\text{問}7.6.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx$ を計算せよ．

$2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$ なので，ある定数 a, b をとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6} = \frac{x-12}{(x+2)(2x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{2x-3} \ ,$$

$$x-12 = a(2x-3) + b(x+2) \ ,$$

$$x-12 = (2a+b)x - 3a + 2b \ .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は，　　$=$　　かつ　　　　$=$　　．

この方程式より $a=$　　かつ $b=$　　．次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6} = \frac{\qquad}{x\qquad} \qquad \frac{\qquad}{2x\qquad} \ .$$

$\boxed{\text{問}7.6.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx$ を計算せよ.

$2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$ なので，ある定数 a,b をとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6}=\frac{x-12}{(x+2)(2x-3)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{2x-3}\ ,$$

$$x-12=a(2x-3)+b(x+2)\ ,$$

$$x-12=(2a+b)x-3a+2b\ .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は，$2a+b=1$ かつ $-3a+2b=-12$ ．この方程式より $a=2$ かつ $b=-3$ ．次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6}=\frac{2}{x+2}-\frac{3}{2x-3}\ .$$

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6} = \frac{2}{x+2} - \frac{3}{2x-3} \ .$$

よって

$$\int \frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx = \int \left(\frac{2}{x+2} - \frac{3}{2x-3}\right) dx = \int \frac{2}{x+2}\,dx - \int \frac{3}{2x-3}\,dx \ .$$

変数 y を $y = x+2$ とおく．$\dfrac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$ ．変数 z を $z = 2x-3$ とおく．$\dfrac{dz}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dz$ ．積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x+2}\,dx - \int \frac{3}{2x-3}\,dx &= 2\int \frac{1}{y}\,dy - 3\int \frac{1}{z}\,\frac{1}{2}\,dz = 2\ln|y| - \frac{3}{2}\ln|z| + C \\ &= 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|2x-3| + C \ .\end{aligned}$$

故に

$$\int \frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx = 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|2x-3| + C \ .$$

$\boxed{終}$

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac=0$ のときを考える．

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac=0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は 1 次式の 2 乗の定数倍の形に因数分解できる：

$$ax^2+bx+c = l(px+q)^2 \quad （ l, p, q \text{ は定数で } p \neq 0 ）.$$

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac=0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は 1 次式の 2 乗の定数倍の形に因数分解できる：

$$ax^2+bx+c = l(px+q)^2 \quad （l, p, q \text{ は定数で } p \neq 0）.$$

変数 y を $y = px+q$ とおく． $x = \dfrac{y-q}{p}$ ．

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a,b,c,h,k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac=0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は 1 次式の 2 乗の定数倍の形に因数分解できる：

$$ax^2+bx+c = l(px+q)^2 \quad （ l,p,q \text{ は定数で } p \neq 0 ）.$$

変数 y を $y=px+q$ とおく． $x=\dfrac{y-q}{p}$ ．

$$\begin{aligned}\frac{hx+k}{ax^2+bx+c} &= \frac{hx+k}{l(px+q)^2} = \frac{h\dfrac{y-q}{p}+k}{ly^2} = \frac{\dfrac{h}{p}y}{ly^2} + \frac{k-\dfrac{hq}{p}}{ly^2} \\ &= \frac{h}{lpy} + \frac{kp-hq}{lpy^2} \quad .\end{aligned}$$

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a,b,c,h,k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac=0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は 1 次式の 2 乗の定数倍の形に因数分解できる：

$$ax^2+bx+c = l(px+q)^2 \quad （ l,p,q \text{ は定数で } p \neq 0 ）.$$

変数 y を $y=px+q$ とおく． $x = \dfrac{y-q}{p}$ ．

$$\begin{aligned}\frac{hx+k}{ax^2+bx+c} &= \frac{hx+k}{l(px+q)^2} = \frac{h\dfrac{y-q}{p}+k}{ly^2} = \frac{\dfrac{h}{p}y}{ly^2} + \frac{k-\dfrac{hq}{p}}{ly^2} \\ &= \frac{h}{lpy} + \frac{kp-hq}{lpy^2} \quad .\end{aligned}$$

このような分数式の変形も部分分数分解という．

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する．x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$ ．

例　不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する．x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$ ．変数 y を $y=2x+1$ とおく．$x=\dfrac{y-1}{2}$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する．x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$ ．変数 y を $y=2x+1$ とおく．$x=\dfrac{y-1}{2}$ ．

$$\frac{6x-5}{4x^2+4x+1} = \frac{6x-5}{(2x+1)^2} = \frac{6\cdot\dfrac{y-1}{2}-5}{y^2} = \frac{3y-8}{y^2} = \frac{3y}{y^2} - \frac{8}{y^2} = \frac{3}{y} - \frac{8}{y^2} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する．x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$ ．変数 y を $y=2x+1$ とおく．$x=\dfrac{y-1}{2}$ ．

$$\frac{6x-5}{4x^2+4x+1} = \frac{6x-5}{(2x+1)^2} = \frac{6\cdot\dfrac{y-1}{2}-5}{y^2} = \frac{3y-8}{y^2} = \frac{3y}{y^2}-\frac{8}{y^2} = \frac{3}{y}-\frac{8}{y^2}\ .$$

$\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}\,dy$ ．

$\boxed{例}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する．x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$ ．変数 y を $y=2x+1$ とおく．$x=\dfrac{y-1}{2}$ ．

$$\frac{6x-5}{4x^2+4x+1}=\frac{6x-5}{(2x+1)^2}=\frac{6\cdot\dfrac{y-1}{2}-5}{y^2}=\frac{3y-8}{y^2}=\frac{3y}{y^2}-\frac{8}{y^2}=\frac{3}{y}-\frac{8}{y^2}\ .$$

$\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}\,dy$ ．積分定数を C とおく．

$$\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx=\int\left(\frac{3}{y}-\frac{8}{y^2}\right)\frac{1}{2}\,dy=\frac{3}{2}\int\frac{1}{y}\,dy-4\textstyle\int y^{-2}dy$$

例　不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する． x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$ ．変数 y を $y=2x+1$ とおく． $x=\dfrac{y-1}{2}$ ．

$$\frac{6x-5}{4x^2+4x+1}=\frac{6x-5}{(2x+1)^2}=\frac{6\cdot\dfrac{y-1}{2}-5}{y^2}=\frac{3y-8}{y^2}=\frac{3y}{y^2}-\frac{8}{y^2}=\frac{3}{y}-\frac{8}{y^2}\ .$$

$\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dy$ ．積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx &= \int\left(\frac{3}{y}-\frac{8}{y^2}\right)\frac{1}{2}\,dy=\frac{3}{2}\int\frac{1}{y}\,dy-4\int y^{-2}dy\\ &=\frac{3}{2}\ln|y|-4(-y^{-1})+C\\ &=\frac{3}{2}\ln|2x+1|+\frac{4}{2x+1}+C\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問 7.6.3}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x+7}{9x^2-6x+1}\,dx$ を計算せよ.

変数 x の 2 次式 $9x^2-6x+1$ を因数分解すると $9x^2-6x+1 = (\qquad\quad)^2$.

変数 y を $y = \qquad\qquad$ とおく. $x = \qquad\quad$.

$$\frac{6x+7}{9x^2-6x+1} = \frac{6x+7}{(\qquad\quad)^2} = \frac{6\cdot\qquad\quad+7}{y^2} = \frac{\qquad}{y^2} = \frac{\quad}{y} + \frac{\quad}{y^2} \ .$$

$\dfrac{dy}{dx} = \qquad$ なので $dx = \quad dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6x+7}{9x^2-6x+1}\,dx =$$

$\boxed{\text{問}7.6.3}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x+7}{9x^2-6x+1}\,dx$ を計算せよ.

変数 x の 2 次式 $9x^2-6x+1$ を因数分解すると $9x^2-6x+1=(3x-1)^2$.
変数 y を $y=3x-1$ とおく. $x=\dfrac{y+1}{3}$.

$$\frac{6x+7}{9x^2-6x+1} = \frac{6x+7}{(3x-1)^2} = \frac{6\cdot\dfrac{y+1}{3}+7}{y^2} = \frac{2y+9}{y^2} = \frac{2}{y}+\frac{9}{y^2} \ .$$

$\dfrac{dy}{dx} =$ なので $dx =$ dy . 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6x+7}{9x^2-6x+1}\,dx =$$

$\boxed{問 7.6.3}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x+7}{9x^2-6x+1}\,dx$ を計算せよ.

変数 x の 2 次式 $9x^2-6x+1$ を因数分解すると $9x^2-6x+1=(3x-1)^2$.
変数 y を $y=3x-1$ とおく. $x=\dfrac{y+1}{3}$.

$$\frac{6x+7}{9x^2-6x+1}=\frac{6x+7}{(3x-1)^2}=\frac{6\cdot\dfrac{y+1}{3}+7}{y^2}=\frac{2y+9}{y^2}=\frac{2}{y}+\frac{9}{y^2}\ .$$

$\dfrac{dy}{dx}=3$ なので $dx=\dfrac{1}{3}dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6x+7}{9x^2-6x+1}\,dx=\int\left(\frac{2}{y}+\frac{9}{y^2}\right)\frac{1}{3}\,dy=\frac{2}{3}\int\frac{1}{y}\,dy+3\textstyle\int y^{-2}dy$$

$\boxed{\text{問}7.6.3}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x+7}{9x^2-6x+1}\,dx$ を計算せよ．

変数 x の 2 次式 $9x^2-6x+1$ を因数分解すると $9x^2-6x+1=(3x-1)^2$ ．
変数 y を $y=3x-1$ とおく． $x=\dfrac{y+1}{3}$ ．

$$\frac{6x+7}{9x^2-6x+1}=\frac{6x+7}{(3x-1)^2}=\frac{6\cdot\dfrac{y+1}{3}+7}{y^2}=\frac{2y+9}{y^2}=\frac{2}{y}+\frac{9}{y^2}\ .$$

$\dfrac{dy}{dx}=3$ なので $dx=\dfrac{1}{3}\,dy$ ．積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{6x+7}{9x^2-6x+1}\,dx &= \int\left(\frac{2}{y}+\frac{9}{y^2}\right)\frac{1}{3}\,dy=\frac{2}{3}\int\frac{1}{y}\,dy+3\int y^{-2}dy\\ &=\frac{2}{3}\ln|y|-3y^{-1}+C\\ &=\frac{2}{3}\ln|3x-1|-\frac{3}{3x-1}+C\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a,b,c,h,k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac<0$ のときを考える．

当分の間は関数の微分積は変数や式の値が実数である範囲で考える．

$b^2-4ac<0$ のとき実数の範囲では 2 次式 ax^2+bx+c を因数分解できないので分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ を部分分数分解できない．

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a,b,c,h,k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac<0$ のときを考える．このときは分母の 2 次式 ax^2+bx+c を平方完成する：

$$ax^2+bx+c = a(x+p)^2+q \quad （p,q \text{ は定数}）.$$

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a,b,c,h,k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac<0$ のときを考える．このときは分母の 2 次式 ax^2+bx+c を平方完成する：

$$ax^2+bx+c = a(x+p)^2+q \quad （ p,q \text{ は定数}）.$$

そして変数 y を $y=x+p$ とおいて置換積分をする．

$\boxed{例}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する.

$\boxed{例}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する．被積分関数の式の分母 $x^2+2x+10$ を平方完成する：

$$x^2+2x+10 = x^2+2x+1-1+10 = (x+1)^2+9 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する．被積分関数の式の分母 $x^2+2x+10$ を平方完成する：

$$x^2+2x+10 = x^2+2x+1-1+10 = (x+1)^2+9\ .$$

変数 y を $y = x+1$ とおく．

$\boxed{\text{例}}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する．被積分関数の式の分母 $x^2+2x+10$ を平方完成する：

$$x^2+2x+10 = x^2+2x+1-1+10 = (x+1)^2+9 \ .$$

変数 y を $y=x+1$ とおく． $x=y-1$ なので，

$$\frac{3x+5}{x^2+2x+10} = \frac{3x+5}{(x+1)^2+9} = \frac{3(y-1)+5}{y^2+9} = \frac{3y+2}{y^2+9} = \frac{3y}{y^2+9} + \frac{2}{y^2+9} \ .$$

例　不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する．被積分関数の式の分母 $x^2+2x+10$ を平方完成する：

$$x^2+2x+10 = x^2+2x+1-1+10 = (x+1)^2+9 \ .$$

変数 y を $y = x+1$ とおく． $x = y-1$ なので，

$$\frac{3x+5}{x^2+2x+10} = \frac{3x+5}{(x+1)^2+9} = \frac{3(y-1)+5}{y^2+9} = \frac{3y+2}{y^2+9} = \frac{3y}{y^2+9} + \frac{2}{y^2+9} \ .$$

$y = x+1$ より $\dfrac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$ ．

$\boxed{\text{例}}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する．被積分関数の式の分母 $x^2+2x+10$ を平方完成する：

$$x^2+2x+10 = x^2+2x+1-1+10 = (x+1)^2+9 \ .$$

変数 y を $y=x+1$ とおく． $x=y-1$ なので，

$$\frac{3x+5}{x^2+2x+10} = \frac{3x+5}{(x+1)^2+9} = \frac{3(y-1)+5}{y^2+9} = \frac{3y+2}{y^2+9} = \frac{3y}{y^2+9}+\frac{2}{y^2+9} \ .$$

$y=x+1$ より $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$ ．よって

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx &= \int\left(\frac{3y}{y^2+9}+\frac{2}{y^2+9}\right)dy \\ &= \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \ .\end{aligned}$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx \;=\; \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \quad .$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \quad .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = y^2+9$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 2y$ なので

$$y\,dy = \frac{1}{2}\,dz \quad .$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx \;=\; \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \quad .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = y^2+9$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 2y$ なので $y\,dy = \dfrac{1}{2}\,dz$ ．

$$\int \frac{3y}{y^2+9}\,dy = \int \frac{3}{z}\,\frac{1}{2}\,dz$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx \;=\; \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \quad .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = y^2+9$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 2y$ なので $y\,dy = \dfrac{1}{2}\,dz$ ．

$$\int \frac{3y}{y^2+9}\,dy = \int \frac{3}{z}\,\frac{1}{2}\,dz = \frac{3}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{2}\ln|y^2+9| + C_1$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = y^2+9$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 2y$ なので $y\,dy = \dfrac{1}{2}\,dz$ ．

$$\int \frac{3y}{y^2+9}\,dy = \int \frac{3}{z}\frac{1}{2}\,dz = \frac{3}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{2}\ln|y^2+9| + C_1 = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + C_1 \ .$$

任意の実数 y について， $y^2 \geq 0$ ， $y^2+9 \geq 9 > 0$ ，よって $|y^2+9| = y^2+9$ ．

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = y^2+9$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 2y$ なので $y\,dy = \dfrac{1}{2}\,dz$ ．

$$\int \frac{3y}{y^2+9}\,dy = \int \frac{3}{z}\,\frac{1}{2}\,dz = \frac{3}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{2}\ln|y^2+9| + C_1 = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + C_1 \ .$$

$$\int \frac{2}{y^2+9}\,dy = 2\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 = \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 \ .$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = y^2+9$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 2y$ なので

$y\,dy = \dfrac{1}{2}\,dz$ ．

$$\int \frac{3y}{y^2+9}\,dy = \int \frac{3}{z}\frac{1}{2}\,dz = \frac{3}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{2}\ln|y^2+9| + C_1 = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + C_1 \ .$$

$$\int \frac{2}{y^2+9}\,dy = 2\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 = \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 \ .$$

積分定数を C とおく． $y = x+1$ なので，

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = y^2+9$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 2y$ なので $y\,dy = \dfrac{1}{2}\,dz$ ．

$$\int \frac{3y}{y^2+9}\,dy = \int \frac{3}{z}\frac{1}{2}\,dz = \frac{3}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{2}\ln|y^2+9| + C_1 = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + C_1 \ .$$

$$\int \frac{2}{y^2+9}\,dy = 2\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 = \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 \ .$$

積分定数を C とおく． $y = x+1$ なので，

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx &= \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C \\ &= \frac{3}{2}\ln\{(x+1)^2+9\} + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x+1}{3} + C \\ &= \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10) + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x+1}{3} + C \ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問7.6.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx$ を計算せよ.

$x^2-6x+13=(\qquad)^2+\quad$. 変数 y を $y=\qquad\quad$ とおく. $x=\qquad$.

$\dfrac{dy}{dx}=\quad$ なので $dx=dy$.

$$\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx=\int \frac{4x-7}{(\qquad)^2+}\,dx=\int \frac{4(\qquad)-7}{y^2+}\,dy=\int \frac{}{y^2+}\,dy$$

$$=\int \frac{}{y^2+}\,dy+\int \frac{}{y^2+}\,dy\ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく. 変数 z を $z=\qquad\quad$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=\qquad$ なので

$dy=\quad dz$.

$$\int \frac{4y}{y^2+4}\,dy=\int \qquad dz=$$

$$\int \frac{5}{y^2+4}\,dy=$$

$\boxed{問 7.6.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx$ を計算せよ．

$x^2-6x+13=(x-3)^2+4$ ．変数 y を $y=x-3$ とおく． $x=y+3$ ．

$\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$ ．

$$\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx = \int \frac{4x-7}{(\qquad)^2+}\,dx = \int \frac{4(\qquad)-7}{y^2+}\,dy = \int \frac{}{y^2+}\,dy$$

$$= \int \frac{}{y^2+}\,dy + \int \frac{}{y^2+}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z=$ $\qquad\qquad$ とおく． $\dfrac{dz}{dy}=$ $\qquad$ なので

$dy=\quad dz$ ．

$$\int \frac{4y}{y^2+4}\,dy = \int \qquad dz =$$

$$\int \frac{5}{y^2+4}\,dy =$$

$\boxed{\text{問}7.6.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx$ を計算せよ．

$x^2-6x+13=(x-3)^2+4$ ．変数 y を $y=x-3$ とおく． $x=y+3$ ．
$\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$ ．

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx &= \int \frac{4x-7}{(x-3)^2+4}\,dx = \int \frac{4(y+3)-7}{y^2+4}\,dy = \int \frac{4y+5}{y^2+4}\,dy \\ &= \int \frac{4y}{y^2+4}\,dy + \int \frac{5}{y^2+4}\,dy \ .\end{aligned}$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z=$ とおく． $\dfrac{dz}{dy}=$ なので

$dy=\quad dz$ ．

$$\int \frac{4y}{y^2+4}\,dy = \int \qquad dz =$$

$$\int \frac{5}{y^2+4}\,dy =$$

$\boxed{問7.6.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx$ を計算せよ.

$x^2-6x+13=(x-3)^2+4$. 変数 y を $y=x-3$ とおく. $x=y+3$. $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$.

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx &= \int \frac{4x-7}{(x-3)^2+4}\,dx = \int \frac{4(y+3)-7}{y^2+4}\,dy = \int \frac{4y+5}{y^2+4}\,dy \\ &= \int \frac{4y}{y^2+4}\,dy + \int \frac{5}{y^2+4}\,dy \ .\end{aligned}$$

積分定数を C_1, C_2 とおく. 変数 z を $z=y^2+4$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=2y$ なので $y\,dy=\dfrac{1}{2}\,dz$.

$$\int \frac{4y}{y^2+4}\,dy = \int \frac{4}{z}\frac{1}{2}\,dz = 2\ln|z|+C_1 = 2\ln(y^2+4)+C_1 \ .$$

$$\int \frac{5}{y^2+4}\,dy = 5\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{y}{2}+C_2 = \frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{y}{2}+C_2 \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx &= 2\ln(y^2+4)+\frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{y}{2}+C \\ &= 2\ln\{(x-3)^2+4\}+\frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{x-3}{2}+C \\ &= 2\ln(x^2-6x+13)+\frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{x-3}{2}+C \quad .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx$ を計算する．被積分関数の分母 $2x^2-8x+9$ を平方完成する：

$$2x^2-8x+9 = 2(x^2-4x+4)-8+9 = 2(x-2)^2+1 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx$ を計算する．被積分関数の分母 $2x^2-8x+9$ を平方完成する：

$$2x^2-8x+9 = 2(x^2-4x+4)-8+9 = 2(x-2)^2+1 \ .$$

変数 y を $y=x-2$ とおく． $x=y+2$ なので，

$$\frac{3x-11}{2x^2-8x+9} = \frac{3x-11}{2(x-2)^2+1} = \frac{3(y+2)-11}{2y^2+1} = \frac{3y-5}{2y^2+1}$$
$$= \frac{3y}{2y^2+1} - \frac{5}{2y^2+1} \ .$$

例　不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx$ を計算する．被積分関数の分母 $2x^2-8x+9$ を平方完成する：

$$2x^2-8x+9 = 2(x^2-4x+4)-8+9 = 2(x-2)^2+1 \ .$$

変数 y を $y=x-2$ とおく． $x=y+2$ なので，

$$\begin{aligned}\frac{3x-11}{2x^2-8x+9} &= \frac{3x-11}{2(x-2)^2+1} = \frac{3(y+2)-11}{2y^2+1} = \frac{3y-5}{2y^2+1} \\ &= \frac{3y}{2y^2+1} - \frac{5}{2y^2+1} \ .\end{aligned}$$

$y=x-2$ より $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx$ を計算する．被積分関数の分母 $2x^2-8x+9$ を平方完成する：

$$2x^2-8x+9 = 2(x^2-4x+4)-8+9 = 2(x-2)^2+1 \ .$$

変数 y を $y=x-2$ とおく． $x=y+2$ なので，

$$\frac{3x-11}{2x^2-8x+9} = \frac{3x-11}{2(x-2)^2+1} = \frac{3(y+2)-11}{2y^2+1} = \frac{3y-5}{2y^2+1}$$
$$= \frac{3y}{2y^2+1} - \frac{5}{2y^2+1} \ .$$

$y=x-2$ より $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$ ．よって

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx = \int \left(\frac{3y}{2y^2+1} - \frac{5}{2y^2+1}\right)dy$$
$$= \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \ .$$

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx \;=\; \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \;\;.$$

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx = \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \quad .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = 2y^2+1$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 4y$ なので

$y\,dy = \dfrac{1}{4}\,dz$ ．

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx = \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = 2y^2+1$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 4y$ なので $y\,dy = \dfrac{1}{4}\,dz$ ．

$$\int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy = \int \frac{3}{z}\frac{1}{4}\,dz = \frac{3}{4}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{4}\ln|2y^2+1| + C_1$$
$$= \frac{3}{4}\ln(2y^2+1) + C_1 \ .$$

任意の実数 y について， $y^2 \geq 0$ ， $2y^2+1 \geq 1 > 0$ ，よって $|2y^2+1| = 2y^2+1$ ．

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx = \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = 2y^2+1$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 4y$ なので $y\,dy = \dfrac{1}{4}\,dz$ ．

$$\int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy = \int \frac{3}{z}\frac{1}{4}\,dz = \frac{3}{4}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{4}\ln|2y^2+1| + C_1$$
$$= \frac{3}{4}\ln(2y^2+1) + C_1 \ .$$

$$\int \frac{5}{2y^2+1}\,dy = \frac{5}{2}\int \frac{1}{y^2+\frac{1}{2}}\,dy = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{\frac{1}{2}}} + C_2$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\bigl(\sqrt{2}\,y\bigr) + C_2 \ .$$

積分定数を C とおく． $y=x-2$ なので，

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx &= \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \\ &= \frac{3}{4}\ln(2y^2+1) - \frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\!\left(\sqrt{2}\,y\right) + C\end{aligned}$$

積分定数を C とおく． $y=x-2$ なので，

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx &= \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \\
&= \frac{3}{4}\ln(2y^2+1) - \frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\bigl(\sqrt{2}\,y\bigr) + C \\
&= \frac{3}{4}\ln\{2(x-2)^2+1\} - \frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\bigl\{\sqrt{2}\,(x-2)\bigr\} + C \\
&= \frac{3}{4}\ln(2x^2-8x+9) - \frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\bigl\{\sqrt{2}\,(x-2)\bigr\} + C \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 7.6.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx$ を計算せよ.

$4x^2-8x+7 = \quad (\qquad)^2 + \quad$. 変数 y を $y = \qquad$ とおく. $x = \qquad$.

$\dfrac{dy}{dx} = \quad$ なので $dx = dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx =$$

$\boxed{問 7.6.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx$ を計算せよ.

$4x^2-8x+7=4(x-1)^2+3$ ． 変数 y を $y=x-1$ とおく． $x=y+1$ ．
$\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$ ． 積分定数を C とおく．

$$\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx =$$

$\boxed{問 7.6.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx$ を計算せよ.

$4x^2-8x+7=4(x-1)^2+3$. 変数 y を $y=x-1$ とおく. $x=y+1$. $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx = \int \frac{5x-8}{4(x-1)^2+3}\,dx = \int \frac{5(y+1)-8}{4y^2+3}\,dy$$

$$=$$

$\boxed{\text{問}\,7.6.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx$ を計算せよ.

$4x^2-8x+7=4(x-1)^2+3$. 変数 y を $y=x-1$ とおく. $x=y+1$. $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. 積分定数を C とおく.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx &= \int \frac{5x-8}{4(x-1)^2+3}\,dx = \int \frac{5(y+1)-8}{4y^2+3}\,dy \\
&= \int \frac{5y-3}{4y^2+3}\,dy = \int \frac{5y}{4y^2+3}\,dy - \frac{3}{4}\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy \\
&=
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{問}\,7.6.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx$ を計算せよ.

$4x^2-8x+7=4(x-1)^2+3$. 変数 y を $y=x-1$ とおく. $x=y+1$. $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx &= \int \frac{5x-8}{4(x-1)^2+3}\,dx = \int \frac{5(y+1)-8}{4y^2+3}\,dy \\ &= \int \frac{5y-3}{4y^2+3}\,dy = \int \frac{5y}{4y^2+3}\,dy - \frac{3}{4}\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy \\ &= \frac{5}{8}\ln(4y^2+3) - \frac{3}{4}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\,\tan^{-1}\frac{2y}{\sqrt{3}} + C \\ &= \end{aligned}$$

$\boxed{\text{問}\,7.6.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx$ を計算せよ.

$4x^2-8x+7=4(x-1)^2+3$. 変数 y を $y=x-1$ とおく. $x=y+1$. $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx &= \int \frac{5x-8}{4(x-1)^2+3}\,dx = \int \frac{5(y+1)-8}{4y^2+3}\,dy \\ &= \int \frac{5y-3}{4y^2+3}\,dy = \int \frac{5y}{4y^2+3}\,dy - \frac{3}{4}\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy \\ &= \frac{5}{8}\ln(4y^2+3) - \frac{3}{4}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2y}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{5}{8}\ln\{4(x-1)^2+3\} - \frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\frac{2(x-1)}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{5}{8}\ln(4x^2-8x+7) - \frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\frac{2x-2}{\sqrt{3}} + C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$