7.3 定積分の置換積分法

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a,b が属すある区間において微分可能であるとする.

　変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a,b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a,b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g の定義域は φ の値域を含み，g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする．

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a,b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g の定義域は φ の値域を含み，g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．微分積分の基本定理により

$$\int_p^q g(y)\,dy = G(q)-G(p)\ .$$

[微分積分の基本定理] 実数 a,b が属する区間において関数 f が定積分可能で関数 F が微分可能で $\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)$ ならば， $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ ．

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a,b が属するある区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g の定義域は φ の値域を含み，g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする．$\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．微分積分の基本定理により

$$\int_p^q g(y)\,dy = G(q)-G(p)\ .$$

合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y)$$

　変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a,b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g の定義域は φ の値域を含み，g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．微分積分の基本定理により

$$\int_p^q g(y)\,dy = G(q)-G(p) \ .$$

合成関数 $G\bigl(\varphi(x)\bigr)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\bigl(\varphi(x)\bigr) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

[合成関数の微分法] 関数 φ と f とが微分可能であり φ の値域が f の定義域に含まれるとき，変数 x,y を $y=\varphi(x)$ とすると， $\dfrac{d}{dx}f(y)=\dfrac{d}{dt}f(y)\cdot\dfrac{dy}{dx}$ ．

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a,b が属すある区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g の定義域は φ の値域を含み，g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．微分積分の基本定理により

$$\int_p^q g(y)\,dy = G(q)-G(p) \ .$$

合成関数 $G\bigl(\varphi(x)\bigr)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\bigl(\varphi(x)\bigr) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\,\frac{dy}{dx} \ .$$

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a,b が属するある区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g の定義域は φ の値域を含み，g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．微分積分の基本定理により

$$\int_p^q g(y)\,dy = G(q)-G(p) \ .$$

合成関数 $G\bigl(\varphi(x)\bigr)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\bigl(\varphi(x)\bigr) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\,\frac{dy}{dx} \ .$$

x,y 及びそれらの微分 dx,dy について $f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると，

$g(y)\,\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので，

[定理 **7.1**] 変数 y が変数 x の微分可能な関数であるとき，微分係数 $\dfrac{dy}{dx}$ 及び関数 f と g 及び x の微分 dx 及び y の微分 dy について，

$$g(y)\,\frac{dy}{dx} = f(x) \iff g(y)\,dy = f(x)\,dx \ .$$

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a,b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g の定義域は φ の値域を含み，g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．微分積分の基本定理により

$$\int_p^q g(y)\,dy = G(q)-G(p) \ .$$

合成関数 $G\bigl(\varphi(x)\bigr)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\bigl(\varphi(x)\bigr) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\,\frac{dy}{dx} \ .$$

x,y 及びそれらの微分 dx,dy について $f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると，

$g(y)\,\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので， $\dfrac{d}{dx}G\bigl(\varphi(x)\bigr)=f(x)$ ，

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a,b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g の定義域は φ の値域を含み，g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\frac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．微分積分の基本定理により

$$\int_p^q g(y)\,dy = G(q)-G(p) \ .$$

合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\,\frac{dy}{dx} \ .$$

x,y 及びそれらの微分 dx,dy について $f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると，
$g(y)\,\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので， $\dfrac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big)=f(x)$ ，微分積分の基本定理により

$$\int_a^b f(x)\,dx = G\big(\varphi(b)\big)-G\big(\varphi(a)\big)$$

[微分積分の基本定理] 実数 a,b が属する区間において関数 f が定積分可能で関数 F が微分可能で $\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)$ ならば， $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ ．

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a,b が属するある区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g の定義域は φ の値域を含み，g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．微分積分の基本定理により

$$\int_p^q g(y)\,dy = G(q)-G(p) \ .$$

合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\,\frac{dy}{dx} \ .$$

x,y 及びそれらの微分 dx,dy について $f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると，$g(y)\,\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので， $\dfrac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big)=f(x)$ ，微分積分の基本定理により

$$\int_a^b f(x)\,dx = G\big(\varphi(b)\big)-G\big(\varphi(a)\big) = G(q)-G(p) \ ,$$

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a,b が属するある区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g の定義域は φ の値域を含み，g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．微分積分の基本定理により

$$\int_p^q g(y)\,dy = G(q)-G(p) \ .$$

合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\,\frac{dy}{dx} \ .$$

x,y 及びそれらの微分 dx,dy について $f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると，

$g(y)\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので， $\dfrac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big)=f(x)$ ，微分積分の基本定理により

$$\int_a^b f(x)\,dx = G\big(\varphi(b)\big)-G\big(\varphi(a)\big) = G(q)-G(p) \ ,$$

$G(q)-G(p)=\int_p^q g(y)\,dy$ なので $\int_a^b f(x)\,dx=\int_p^q g(y)\,dy$ ．

変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ は実数 a,b が属するある区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g の定義域は φ の値域を含み，g は $p=\varphi(a)$ から $q=\varphi(b)$ まで定積分可能であり，g の原始関数 G があるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=g(y)$ ．微分積分の基本定理により

$$\int_p^q g(y)\,dy = G(q)-G(p)\ .$$

合成関数 $G\big(\varphi(x)\big)=G(y)$ を x で微分する．

$$\frac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx} = g(y)\,\frac{dy}{dx}\ .$$

x,y 及びそれらの微分 dx,dy について $f(x)\,dx=g(y)\,dy$ とすると，$g(y)\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので， $\dfrac{d}{dx}G\big(\varphi(x)\big)=f(x)$ ，微分積分の基本定理により

$$\int_a^b f(x)\,dx = G\big(\varphi(b)\big)-G\big(\varphi(a)\big) = G(q)-G(p)\ ,$$

$G(q)-G(p)=\int_p^q g(y)\,dy$ なので $\int_a^b f(x)\,dx=\int_p^q g(y)\,dy$ ．故に， $\varphi(a)=p$ かつ $\varphi(b)=q$ かつ $f(x)\,dx=g(y)\,dy$ ならば， $\int_a^b f(x)\,dx=\int_p^q g(y)\,dy$ ．

[定積分の置換積分法] 変数 x の関数 y は実数 a,b が属するある区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g の定義域は実数 p,q が属するある区間を含み，g は p から q まで定積分可能であり，g の原始関数があるとする．x,y 及びそれらの微分 dx,dy について，

$x=a$ のとき $y=p$，$x=b$ のとき $y=q$，$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_p^q g(y)\,dy\ .$$

[定積分の置換積分法] 変数 x の関数 y は実数 a,b が属する区間において微分可能であるとする．関数 f は a から b まで定積分可能であるとする．関数 g の定義域は実数 p,q が属する区間を含み，g は p から q まで定積分可能であり，g の原始関数があるとする．x,y 及びそれらの微分 dx,dy について，

$x=a$ のとき $y=p$，$x=b$ のとき $y=q$，$f(x)\,dx=g(y)\,dy$ ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_p^q g(y)\,dy\ .$$

変数 x の関数 y について，定積分では，積分変数 x を積分変数 y に置き換えるとき，x の値の範囲を y の値の範囲に置き換える必要がある．

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$　定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する．変数 y を $y =$ 　　　　とおく．

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する．変数 y を $y = 2x + 1$ とおく．

$\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dy$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する．変数 y を $y = 2x+1$ とおく．
$\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dy$ ．よって，

$$\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^3}\,dy \;\;.$$

例　定積分 $\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する．変数 y を $y=2x+1$ とおく．

$\frac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\frac{1}{2}\,dy$ ．よって，

$$\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \frac{1}{y^3}\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\frac{1}{y^3}\,dy \ .$$

$y=2x+1$ より， $x=0$ のとき $y=1$ ， $x=4$ のとき $y=9$ ．

$\boxed{\text{例}}$　定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する．変数 y を $y=2x+1$ とおく．
$\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}\,dy$ ．よって，

$$\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^3}\,dy\ .$$

$y=2x+1$ より， $x=0$ のとき $y=1$ ， $x=4$ のとき $y=9$ ．故に，

$$\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \int_1^9 \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^3}\,dy$$

積分変数 x の値の範囲を積分変数 y の値の範囲に換える．

例　定積分 $\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する．変数 y を $y=2x+1$ とおく．$\frac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\frac{1}{2}\,dy$ ．よって，

$$\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^3}\,dy \ .$$

$y=2x+1$ より， $x=0$ のとき $y=1$ ， $x=4$ のとき $y=9$ ．故に，

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx &= \int_1^9 \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^3}\,dy = \frac{1}{2}\int_1^9 y^{-3}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2}y^{-2}\right]_1^9 \\ &= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{y^2}\right]_1^9 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{81}-1\right) \\ &= \frac{20}{81} \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する．変数 y を $y=2x+1$ とおく．
$\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}\,dy$ ．よって，

$$\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^3}\,dy \ .$$

$y=2x+1$ より， $x=0$ のとき $y=1$ ， $x=4$ のとき $y=9$ ．故に，

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx &= \int_1^9 \frac{1}{2}\,\frac{1}{y^3}\,dy = \frac{1}{2}\int_1^9 y^{-3}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2}y^{-2}\right]_1^9 \\ &= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{y^2}\right]_1^9 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{81}-1\right) \\ &= \frac{20}{81} \ .\end{aligned}$$

これらの計算を次のようにまとめて行うことが多い．

例 定積分 $\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する．変数 y を $y = 2x+1$ とおく．
$\frac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \frac{1}{2}\,dy$ ． $x = 0$ のとき $y = 1$ ， $x = 4$ のとき $y = 9$ ．

$\boxed{例}$　定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する．変数 y を $y=2x+1$ とおく．$\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}\,dy$ ． $x=0$ のとき $y=1$ ， $x=4$ のとき $y=9$ ．よって，

$$\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \int_1^9 \frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy$$

例　定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ を計算する．変数 y を $y = 2x+1$ とおく．$\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dy$ ． $x = 0$ のとき $y = 1$ ， $x = 4$ のとき $y = 9$ ．よって，

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx &= \int_1^9 \frac{1}{y^3}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int_1^9 y^{-3}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2}y^{-2}\right]_1^9 \\ &= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{y^2}\right]_1^9 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{81}-1\right) \\ &= \frac{20}{81}\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}7.3.1}$ 定積分 $\displaystyle\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2}\,dy$ を計算せよ.

変数 z を $z=$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=$ なので $dy=$ dz . $y=2$ のとき $z=$. $y=4$ のとき $z=$. よって,

$$\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2}\,dy = \int \qquad dz$$

$\boxed{問7.3.1}$ 定積分 $\displaystyle\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2}\,dy$ を計算せよ.

変数 z を $z=3y-5$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=3$ なので $dy=\dfrac{1}{3}\,dz$. $y=2$ のとき $z=1$. $y=4$ のとき $z=7$. よって,

$$\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2}\,dy = \int \qquad\quad dz$$

$\boxed{問 7.3.1}$ 定積分 $\displaystyle\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2}\,dy$ を計算せよ．

変数 z を $z=3y-5$ とおく． $\dfrac{dz}{dy}=3$ なので $dy=\dfrac{1}{3}\,dz$ ． $y=2$ のとき $z=1$ ． $y=4$ のとき $z=7$ ．よって，

$$\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2}\,dy=\int_1^7 \frac{6}{z^2}\,\frac{1}{3}\,dz=2\Big[-\frac{1}{z}\Big]_1^7=2\Big(-\frac{1}{7}+1\Big)=\frac{12}{7}\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する.

例 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する．変数 z を $z=$ 　　　　　　 とおく．

例　定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する．変数 z を $z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく．

$\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $dy=\dfrac{3}{\pi}\,dz$ ．

$\boxed{例}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する．変数 z を $z = \dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく．

$\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{\pi}{3}$ なので $dy = \dfrac{3}{\pi}\,dz$ ．よって，

$$\sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy = \sin z \cdot \frac{3}{\pi}\,dz = \frac{3}{\pi}\sin z\,dz \ .$$

$\boxed{例}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する．変数 z を $z = \dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく．

$\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{\pi}{3}$ なので $dy = \dfrac{3}{\pi}\,dz$ ．よって，

$$\sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy = \sin z \cdot \frac{3}{\pi}\,dz = \frac{3}{\pi}\sin z\,dz \ .$$

$z = \dfrac{\pi(y-2)}{3}$ より， $y = 3$ のとき $z = \dfrac{\pi}{3}$ ， $y = 5$ のとき $z = \pi$ ．

$\boxed{例}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する．変数 z を $z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく．

$\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $dy=\dfrac{3}{\pi}\,dz$ ．よって，

$$\sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy = \sin z\cdot\frac{3}{\pi}\,dz = \frac{3}{\pi}\sin z\,dz \ .$$

$z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ より， $y=3$ のとき $z=\dfrac{\pi}{3}$ ， $y=5$ のとき $z=\pi$ ．故に，

$$\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{3}{\pi}\sin z\,dz$$

積分変数 y の値の範囲を積分変数 z の値の範囲に換える．

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する．変数 z を $z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく．

$\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $dy=\dfrac{3}{\pi}\,dz$ ．よって，

$$\sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy = \sin z\cdot\frac{3}{\pi}\,dz = \frac{3}{\pi}\sin z\,dz \ .$$

$z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ より， $y=3$ のとき $z=\dfrac{\pi}{3}$ ， $y=5$ のとき $z=\pi$ ．故に，

$$\begin{aligned}\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{3}{\pi}\sin z\,dz = \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin z\,dz = \frac{3}{\pi}\Big[-\cos z\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= \frac{3}{\pi}\Big(-\cos\pi+\cos\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{3}{\pi}\Big(1+\frac{1}{2}\Big) \\ &= \frac{9}{2\pi} \ .\end{aligned}$$

例 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する．変数 z を $z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく．$\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $dy=\dfrac{3}{\pi}\,dz$ ．よって，

$$\sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy = \sin z\cdot\frac{3}{\pi}\,dz = \frac{3}{\pi}\sin z\,dz \ .$$

$z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ より， $y=3$ のとき $z=\dfrac{\pi}{3}$ ， $y=5$ のとき $z=\pi$ ．故に，

$$\begin{aligned}\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{3}{\pi}\sin z\,dz = \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin z\,dz = \frac{3}{\pi}\Big[-\cos z\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= \frac{3}{\pi}\left(-\cos\pi+\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{9}{2\pi} \ .\end{aligned}$$

これらの計算を次のようにまとめて行うことが多い．

$\boxed{例}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する．変数 z を $z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく．
$\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $dy=\dfrac{3}{\pi}\,dz$ ． $y=3$ のとき $z=\dfrac{\pi}{3}$ ， $y=5$ のとき $z=\pi$ ．

$\boxed{例}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する．変数 z を $z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく．
$\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $dy=\dfrac{3}{\pi}\,dz$ ． $y=3$ のとき $z=\dfrac{\pi}{3}$ ， $y=5$ のとき $z=\pi$ ．
よって，

$$\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin z\cdot\frac{3}{\pi}\,dz$$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\displaystyle\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy$ を計算する．変数 z を $z=\dfrac{\pi(y-2)}{3}$ とおく．

$\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{\pi}{3}$ なので $dy=\dfrac{3}{\pi}\,dz$ ． $y=3$ のとき $z=\dfrac{\pi}{3}$ ， $y=5$ のとき $z=\pi$ ．

よって，

$$\begin{aligned}
\int_3^5 \sin\frac{\pi(y-2)}{3}\,dy &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin z\cdot\frac{3}{\pi}\,dz = \frac{3}{\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin z\,dz = \frac{3}{\pi}\left[-\cos z\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\
&= \frac{3}{\pi}\left(-\cos\pi+\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{9}{2\pi}\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問7.3.2}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^3 \sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y =$ とおく. $\dfrac{dy}{dz} =$ なので $dx =$ dy . $x = 0$ のとき $y =$. $x = 3$ のとき $y =$. よって,

$$\int_0^3 \sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx = \int \qquad \cdot \qquad dy =$$

$\boxed{問 7.3.2}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^3 \sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = \dfrac{\pi(5x-3)}{6}$ とおく. $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{5\pi}{6}$ なので $dx = \dfrac{6}{5\pi}\,dy$. $x = 0$ のとき $y = -\dfrac{\pi}{2}$. $x = 3$ のとき $y = 2\pi$. よって,

$$\int_0^3 \sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx = \int \qquad \cdot \qquad dy =$$

$\boxed{\text{問}7.3.2}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^3 \sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx$ を計算せよ．

変数 y を $y=\dfrac{\pi(5x-3)}{6}$ とおく． $\dfrac{dy}{dz}=\dfrac{5\pi}{6}$ なので $dx=\dfrac{6}{5\pi}dy$ ． $x=0$ のとき $y=-\dfrac{\pi}{2}$ ． $x=3$ のとき $y=2\pi$ ．よって，

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sin\frac{\pi(5x-3)}{6}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sin y\cdot\frac{6}{5\pi}\,dy = \frac{6}{5\pi}\left[-\cos y\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\\ &= \frac{6}{5\pi}\left\{-\cos 2\pi+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\\ &= -\frac{6}{5\pi}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}7.3.3}$ 定積分 $\int_2^4 e^{2u-5}\,du$ を計算せよ．

変数 v を $v=$ 　　　　とおく． $\dfrac{dv}{du}=$ 　　なので $du=$ 　dv ． $u=2$ のとき $v=$ 　　． $u=4$ のとき $v=$ 　． よって，

$$\int_2^4 e^{2u-5}\,du = \int \qquad dv =$$

$\boxed{問7.3.3}$ 定積分 $\int_2^4 e^{2u-5}\,du$ を計算せよ.

変数 v を $v=2u-5$ とおく. $\dfrac{dv}{du}=2$ なので $du=\dfrac{1}{2}\,dv$. $u=2$ のとき $v=-1$. $u=4$ のとき $v=3$. よって,

$$\int_2^4 e^{2u-5}\,du = \int \qquad dv =$$

$\boxed{\text{問}7.3.3}$ 定積分 $\int_2^4 e^{2u-5}\,du$ を計算せよ.

変数 v を $v = 2u - 5$ とおく. $\dfrac{dv}{du} = 2$ なので $du = \dfrac{1}{2}\,dv$. $u = 2$ のとき $v = -1$. $u = 4$ のとき $v = 3$. よって,

$$\int_2^4 e^{2u-5}\,du = \int_{-1}^{3} e^v \frac{1}{2}\,dv = \frac{1}{2}\big[e^v\big]_{-1}^{3} = \frac{1}{2}\left(e^3 - \frac{1}{e}\right) .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する．変数 y を $y =$ とおく．

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する．変数 y を $y = x^2+1$ とおく．
$\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する．変数 y を $y = x^2+1$ とおく．$\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}dy$ ． $x=-1$ のとき $y=2$ ， $x=2$ のとき $y=5$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する．変数 y を $y=x^2+1$ とおく．
$\dfrac{dy}{dx}=2x$ なので $x\,dx=\dfrac{1}{2}\,dy$ ． $x=-1$ のとき $y=2$ ， $x=2$ のとき $y=5$ ．よって，

$$\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_{-1}^{2}\sqrt{x^2+1}\,x\,dx=\int_{2}^{5}\sqrt{y}\,\frac{1}{2}\,dy$$

積分変数 x の値の範囲を積分変数 y の値の範囲に換える．

例　定積分 $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算する．変数 y を $y=x^2+1$ とおく．$\dfrac{dy}{dx}=2x$ なので $x\,dx=\dfrac{1}{2}\,dy$ ． $x=-1$ のとき $y=2$ ， $x=2$ のとき $y=5$ ．よって，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+1}\,dx &= \int_{-1}^{2} \sqrt{x^2+1}\,x\,dx = \int_{2}^{5}\sqrt{y}\,\frac{1}{2}\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{2}^{5} y^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{2}^{5} = \frac{1}{3}\left[y\sqrt{y}\right]_{2}^{5} \\ &= \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}7.3.4}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{6x}{x^2+2}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y=$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=$ なので $x\,dx=\quad dy$. $x=-1$ のとき $y=$. $x=2$ のとき $y=$. よって,

$$\int_{-1}^{2} \frac{6x}{x^2+2}\,dx = \int \qquad dy =$$

$\boxed{\text{問}7.3.4}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{6x}{x^2+2}\,dx$ を計算せよ．

変数 y を $y = x^2 + 2$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$ ． $x = -1$ のとき $y = 3$ ． $x = 2$ のとき $y = 6$ ．よって，

$$\int_{-1}^{2} \frac{6x}{x^2+2}\,dx = \int \qquad dy =$$

$\boxed{問7.3.4}$ 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{6x}{x^2+2}\,dx$ を計算せよ．

変数 y を $y=x^2+2$ とおく． $\dfrac{dy}{dx}=2x$ なので $x\,dx=\dfrac{1}{2}\,dy$ ． $x=-1$ のとき $y=3$ ． $x=2$ のとき $y=6$ ．よって，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\frac{6x}{x^2+2}\,dx &= \int_{3}^{6}\frac{6}{y}\,\frac{1}{2}\,dy = 3\int_{2}^{6}\frac{1}{y}\,dy = 3\big[\ln y\big]_{3}^{6} = 3(\ln 6-\ln 3) = 3\ln 2\\ &= \ln 8\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問 7.3.5}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y=$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=$ なので $x\,dx=\quad dy$. $x=0$ のとき $y=$. $x=4$ のときき $y=$. よって,

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx=\int \qquad dy$$

$\boxed{\text{問}7.3.5}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ を計算せよ．

変数 y を $y = x^2 + 9$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$ ． $x = 0$ のとき $y = 9$ ． $x = 4$ のとき $y = 25$ ．よって，

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \qquad\qquad dy =$$

$\boxed{問7.3.5}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = x^2 + 9$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. $x = 0$ のとき $y = 9$. $x = 4$ のとき $y = 25$. よって,

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int_9^{25} \frac{1}{\sqrt{y}}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{y}\,\right]_9^{25} = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 2\ .$$

$\boxed{終}$