

6.9 定積分を用いる極限計算

定積分の定義を復習する.

[定義] 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \delta_k$$

と定める. 正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば, 関数 f

は a から b まで (定) 積分可能であるといい,

を a から b までの f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

[定義] 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\delta_n = \quad ,$$

$$S_n =$$

と定める。正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n =$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば、関数 f

は a から b まで (定) 積分可能であるといい、

を a から b までの f の定積分といい、 $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す：

$$\int_a^b f(x) dx = \quad .$$

[定義] 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める. 正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n =$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば, 関数 f

は a から b まで (定) 積分可能であるといい,

を a から b までの f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す:

$$\int_a^b f(x) dx = \quad .$$

[定義] 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める。正の自然数を表す変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば、関数 f

は a から b まで (定) 積分可能であるといい、 f のリーマン和 S_n の極限

値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい、 $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す：

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n .$$

関数 f が a から b まで積分可能であるとき、関数 f は b から a まで積分可能であるといい、 f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x) dx$ を次のように定義する：
$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx .$$

実数 a と b について $a \leq b$ で, 関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含み, f は a から b まで定積分可能であるとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとる.

実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含み、 f は a から b まで定積分可能であるとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとる。

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする。

実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含み、 f は a から b まで定積分可能であるとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとる。

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする。定積分の定義より、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めても、リーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_a^b f(x) dx$ に収束する。

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めても, リーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_a^b f(x) dx$ に収束する.

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めても、リーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_a^b f(x) dx$ に収束する. そこで, $\xi_k = x_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると, リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めても、リーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_a^b f(x) dx$ に収束する. そこで, $\xi_k = x_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると, リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

また別に, $\xi_k = x_{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると, リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めても、リーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_a^b f(x) dx$ に収束する. そこで, $\xi_k = x_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると, リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

また別に, $\xi_k = x_{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると, リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

関数 f の定積分を計算するために, しばしば, f のリーマン和として $\sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}$ 或いは $\sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ を用いる.

定積分はリーマン和の極限值である．微分積分の基本定理を用いると，多くの場合，リーマン和の極限值を計算するより，不定積分を用いて定積分を計算する方が楽である．それ故，逆に，リーマン和の極限值を計算するのに定積分を用いることがある．

等差数列について次のことがいえた：第 0 項から始まる数列 $\{a_k\}_{k \geq 0}$ 及び定数 d について、 $\{a_k\}_{k \geq 0}$ が公差が d である等差数列であることと、各自然数 k について $a_k = a_0 + dk$ であることは同値である。

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．この数列は
数列であり、

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり、

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり、

$$= x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \quad .$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり、

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり、

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} =$ なので $\frac{1}{n} =$.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり、

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{4}$.
 $x_k - x_{k-1}$ は公差である．

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり、

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{4}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3} &= \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{4} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{4} (x_k - x_{k-1}) \right\} .
 \end{aligned}$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり、

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{4}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3} &= \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{4} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{4} (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $f(x)$ のリーマン和である.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり、

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{4}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3} &= \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{4} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{4} (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

これは関数 $\frac{\sqrt{x}}{4}$ のリーマン和である．

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{4}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. リーマン和が定積分に収束ことをいうために $n \rightarrow \infty$ のとき $\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ が 0 に収束することを確認する.

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{4}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{\sqrt{x}}{4}$ のリーマン和

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k + 3} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{4} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_3^7 \frac{\sqrt{x}}{4} dx$ に収束する.

$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7$ なので 3 から 7 までの定積分

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{4}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{\sqrt{x}}{4}$ のリーマン和

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k + 3} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{4} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_3^7 \frac{\sqrt{x}}{4} dx$ に収束する. 故に,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k + 3} \right) = \int_3^7 \frac{\sqrt{x}}{4} dx = \frac{1}{4} \int_3^7 x^{\frac{1}{2}} dx$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{4}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{\sqrt{x}}{4}$ のリーマン和

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k + 3} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{4} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_3^7 \frac{\sqrt{x}}{4} dx$ に収束する. 故に,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k + 3} \right) &= \int_3^7 \frac{\sqrt{x}}{4} dx = \frac{1}{4} \int_3^7 x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_3^7 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (7\sqrt{7} - 3\sqrt{3}) \\ &= \frac{7\sqrt{7}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

終

問6.9.1 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k+2}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{5}{n}k+2$ ($k=0,1,2,3,\dots,n$) と定める。この数列は公差が $\frac{5}{n}$ の等差数列であり、

$$= x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{5n}{n} + 2 = 5 + 2 = 7.$$

$k=1,2,3,\dots,n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{5}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{5}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k+2} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{5} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{5} (x_k - x_{k-1}) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{5} (x_k - x_{k-1}) \right\}. \end{aligned}$$

これは関数 $f(x) = \sqrt{5x+2}$ のリーマン和である。

問6.9.1 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k+2}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{5}{n}k+2$ ($k=0,1,2,3,\dots,n$) と定める。この数列は公差が $\frac{5}{n}$ の等差数列であり、

$$2 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k=1,2,3,\dots,n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{5}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{5}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k+2} &= \sum_{k=1}^n \left(\quad \right) = \sum_{k=1}^n \left(\quad \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \quad (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

これは関数 \quad のリーマン和である。

問6.9.1 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k+2}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{5}{n}k+2$ ($k=0,1,2,3,\dots,n$) と定める。この数列は公差が $\frac{5}{n}$ の等差数列であり、

$$2 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k=1,2,3,\dots,n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{5}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{5}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k+2} &= \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{5} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{5} (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

これは関数 $\frac{\sqrt{x}}{5}$ のリーマン和である。

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{5}{n} ;$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{\sqrt{x}}{5}$ のリーマン和

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k + 2} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{5} (x_k - x_{k-1}) \right\} \text{ は } n \rightarrow \infty \text{ のとき定積分 } \int_2^7 \frac{\sqrt{x}}{5} dx$$

に収束する. 故に,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k + 2} \right) =$$

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{5}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{\sqrt{x}}{5}$ のリーマン和

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k + 2} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{5} (x_k - x_{k-1}) \right\} \text{ は } n \rightarrow \infty \text{ のとき定積分 } \int_2^7 \frac{\sqrt{x}}{5} dx$$

に収束する. 故に,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k + 2} \right) &= \int_2^7 \frac{\sqrt{x}}{5} dx = \frac{1}{5} \int_2^7 x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_2^7 = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} (7\sqrt{7} - 2\sqrt{2}) \\ &= \frac{14\sqrt{7} - 4\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

終

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n} (k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この数列は

数列であり、

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この数列は公差が の等差数列であり、

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この数列は公差が $\frac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり、

$$= x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \quad .$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この数列は公差が $\frac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり、

$$-\frac{\pi}{6} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{4\pi}{3} .$$

$x_k = \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6}$ と定めると $x_0 = -\frac{3\pi}{2n} - \frac{\pi}{6}$ とか $x_n = \frac{3\pi}{2n}(n-1) - \frac{\pi}{6}$ とかなるので面倒になる。

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この数列は公差が $\frac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり、

$$-\frac{\pi}{6} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{4\pi}{3} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} =$ なので $\frac{1}{n} =$.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この数列は公差が $\frac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり、

$$-\frac{\pi}{6} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{4\pi}{3} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{2(x_k - x_{k-1})}{3\pi}$.
 $x_k - x_{k-1}$ は公差である。

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この数列は公差が $\frac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり、

$$-\frac{\pi}{6} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{4\pi}{3} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{2(x_k - x_{k-1})}{3\pi}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\} &= \sum_{k=1}^n \left(\cos x_{k-1} \cdot \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \cos x_{k-1} \cdot \frac{2(x_k - x_{k-1})}{3\pi} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2 \cos x_{k-1}}{3\pi} (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この数列は公差が $\frac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり、

$$-\frac{\pi}{6} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{4\pi}{3} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{2(x_k - x_{k-1})}{3\pi}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\} &= \sum_{k=1}^n \left(\cos x_{k-1} \cdot \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \cos x_{k-1} \cdot \frac{2(x_k - x_{k-1})}{3\pi} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2 \cos x_{k-1}}{3\pi} (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $f(x)$ のリーマン和である。

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この数列は公差が $\frac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり、

$$-\frac{\pi}{6} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{4\pi}{3} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{2(x_k - x_{k-1})}{3\pi}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\} &= \sum_{k=1}^n \left(\cos x_{k-1} \cdot \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \cos x_{k-1} \cdot \frac{2(x_k - x_{k-1})}{3\pi} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2 \cos x_{k-1}}{3\pi} (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

これは関数 $\frac{2 \cos x}{3\pi}$ のリーマン和である。

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3\pi}{2n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. リーマン和が定積分に収束ことをいうために $n \rightarrow \infty$ のとき $\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ が 0 に収束することを確認する.

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3\pi}{2n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{2 \cos x}{3\pi}$ のリーマン和

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6}\right\} = \sum_{k=1}^n \left\{\frac{2 \cos x_{k-1}}{3\pi}(x_k - x_{k-1})\right\} \text{ は } n \rightarrow \infty \text{ のとき}$$

定積分 $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2 \cos x}{3\pi} dx$ に収束する.

$-\frac{\pi}{6} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{4\pi}{3}$ なので $-\frac{\pi}{6}$ から $\frac{4\pi}{3}$ までの定積分

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3\pi}{2n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{2 \cos x}{3\pi}$ のリーマン和

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6}\right\} = \sum_{k=1}^n \left\{\frac{2 \cos x_{k-1}}{3\pi} (x_k - x_{k-1})\right\} \text{ は } n \rightarrow \infty \text{ のとき}$$

定積分 $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2 \cos x}{3\pi} dx$ に収束する. 故に,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6}\right\} \right] = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2 \cos x}{3\pi} dx$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3\pi}{2n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{2 \cos x}{3\pi}$ のリーマン和

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6}\right\} = \sum_{k=1}^n \left\{\frac{2 \cos x_{k-1}}{3\pi} (x_k - x_{k-1})\right\} \text{ は } n \rightarrow \infty \text{ のとき}$$

定積分 $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2 \cos x}{3\pi} dx$ に収束する. 故に,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6}\right\} \right] = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2 \cos x}{3\pi} dx = \frac{2}{3\pi} [\sin x]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}}$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3\pi}{2n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{2 \cos x}{3\pi}$ のリーマン和

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6}\right\} = \sum_{k=1}^n \left\{\frac{2 \cos x_{k-1}}{3\pi} (x_k - x_{k-1})\right\} \text{ は } n \rightarrow \infty \text{ のとき}$$

定積分 $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2 \cos x}{3\pi} dx$ に収束する. 故に,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6}\right\} \right] &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2 \cos x}{3\pi} dx = \frac{2}{3\pi} [\sin x]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \\ &= \frac{2}{3\pi} \left\{ \sin \frac{4\pi}{3} - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right\} = \frac{2}{3\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{3\pi}. \end{aligned}$$

問6.9.2 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left\{\frac{7\pi}{6n}(k-1) - \frac{\pi}{3}\right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{7\pi}{6n}k - \frac{\pi}{3}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この数

列は公差が $\frac{7\pi}{6n}$ の等差数列であり、

$$= x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{3}.$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{7\pi}{6n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{6n}{6n}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left\{\frac{7\pi}{6n}(k-1) - \frac{\pi}{3}\right\} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \sin(x_{k-1}) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{6n}{6n} \sin(x_{k-1}) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{6n}{6n} (x_k - x_{k-1}) \right\}. \end{aligned}$$

これは関数 $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ のリーマン和である。

問6.9.2 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left\{\frac{7\pi}{6n}(k-1) - \frac{\pi}{3}\right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{7\pi}{6n}k - \frac{\pi}{3}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この数列は公差が $\frac{7\pi}{6n}$ の等差数列であり、

$$-\frac{\pi}{3} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{5\pi}{6} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{7\pi}{6n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{6(x_k - x_{k-1})}{7\pi}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left\{\frac{7\pi}{6n}(k-1) - \frac{\pi}{3}\right\} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \right. \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \quad (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

これは関数 $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ のリーマン和である。

問6.9.2 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left\{ \frac{7\pi}{6n} (k-1) - \frac{\pi}{3} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{7\pi}{6n}k - \frac{\pi}{3}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この数列は公差が $\frac{7\pi}{6n}$ の等差数列であり、

$$-\frac{\pi}{3} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{5\pi}{6} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{7\pi}{6n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{6(x_k - x_{k-1})}{7\pi}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left\{ \frac{7\pi}{6n} (k-1) - \frac{\pi}{3} \right\} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \sin x_{k-1} \cdot \frac{6(x_k - x_{k-1})}{7\pi} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{6 \sin x_{k-1}}{7\pi} (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

これは関数 $\frac{6 \sin x}{7\pi}$ のリーマン和である。

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{7\pi}{6n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{6 \sin x}{7\pi}$ のリーマン和

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left\{\frac{7\pi}{6n}(k-1) - \frac{\pi}{3}\right\} = \sum_{k=1}^n \left\{\frac{6 \sin x_{k-1}}{7\pi}(x_k - x_{k-1})\right\} \text{ は } n \rightarrow \infty \text{ のとき定}$$

積分 $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{6 \sin x}{7\pi} dx$ に収束する. 故に,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left\{\frac{7\pi}{6n}(k-1) - \frac{\pi}{3}\right\} \right] =$$

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{7\pi}{6n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{6 \sin x}{7\pi}$ のリーマン和

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left\{\frac{7\pi}{6n}(k-1) - \frac{\pi}{3}\right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{6 \sin x_{k-1}}{7\pi} (x_k - x_{k-1}) \right\} \text{ は } n \rightarrow \infty \text{ のとき定}$$

積分 $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{6 \sin x}{7\pi} dx$ に収束する. 故に,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left\{\frac{7\pi}{6n}(k-1) - \frac{\pi}{3}\right\} \right] &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{6 \sin x}{7\pi} dx = \frac{6}{7\pi} [-\cos x]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \frac{6}{7\pi} \left\{ -\cos \frac{5\pi}{6} + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\} \\ &= \frac{6}{7\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3 + 3\sqrt{3}}{7\pi}. \end{aligned}$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n} + 4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k + 4} .$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n} + 4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k + 4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k + 4$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n} + 4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k + 4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k + 4$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．この数列は

数列であり、

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k+4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k+4$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．この数列は公差が の等差数列であり、

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k+4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k+4$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．この数列は公差が $\frac{3}{n}$ の等差数列であり、

$$= x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \quad .$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k+4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k + 4$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．この数列は公差が $\frac{3}{n}$ の等差数列であり、

$$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n} + 4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k + 4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k + 4$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．この数列は公差が $\frac{3}{n}$ の等差数列であり、

$$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} =$ なので $\frac{1}{n} =$.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n} + 4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k + 4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k + 4$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．この数列は公差が $\frac{3}{n}$ の等差数列であり、

$$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{3}$.

$x_k - x_{k-1}$ は公差である．

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k+4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k+4$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．この数列は公差が $\frac{3}{n}$ の等差数列であり、

$$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{3}$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{\frac{3}{n}k+4} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{3} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k+4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k+4$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める。この数列は公差が $\frac{3}{n}$ の等差数列であり、

$$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{3}$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{\frac{3}{n}k+4} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{3} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

$\sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は関数 $f(x)$ のリーマン和である。

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる．自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n} + 4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k + 4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k + 4$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める．この数列は公差が $\frac{3}{n}$ の等差数列であり、

$$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{3}$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{\frac{3}{n}k + 4} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{3} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

これは関数 $\frac{2}{x}$ のリーマン和である．

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n} ;$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. リーマン和が定積分に収束ことをいうために $n \rightarrow \infty$ のとき $\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ が 0 に収束することを確認する.

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって, 関数 $\frac{2}{x}$ のリーマン和

$\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_4^7 \frac{2}{x} dx$ に収束する.

$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7$ なので 4 から 7 までの定積分

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって, 関数 $\frac{2}{x}$ のリーマン和

$\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_4^7 \frac{2}{x} dx$ に収束する. 故に,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \int_4^7 \frac{2}{x} dx =$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって, 関数 $\frac{2}{x}$ のリーマン和

$\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_4^7 \frac{2}{x} dx$ に収束する. 故に,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} &= \int_4^7 \frac{2}{x} dx = 2[\ln|x|]_4^7 \\ &= 2(\ln 7 - \ln 4) = \end{aligned}$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって, 関数 $\frac{2}{x}$ のリーマン和

$\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_4^7 \frac{2}{x} dx$ に収束する. 故に,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} &= \int_4^7 \frac{2}{x} dx = 2[\ln|x|]_4^7 \\ &= 2(\ln 7 - \ln 4) = 2 \ln \frac{7}{4} = \ln \left(\frac{7}{4} \right)^2 \\ &= \ln \frac{49}{16}. \end{aligned}$$

終

問6.9.3 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{8}{4k+3n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ。

自然数 k に対して

$$\frac{8}{4k+3n} = \frac{1}{n} \frac{8}{\frac{4}{n}k+3} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k =$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める。この数列

は公差が の等差数列であり、

$$= x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} =$ なので $\frac{1}{n} =$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{8}{4k+3n} = \sum_{k=1}^n \left(\right) = \sum_{k=1}^n \left(\right) = \sum_{k=1}^n \left\{ (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

これは関数 のリーマン和である。

問6.9.3 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{8}{4k+3n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ。

自然数 k に対して

$$\frac{8}{4k+3n} = \frac{1}{n} \frac{8}{\frac{4}{n}k+3} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める。この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり、

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

自然数 $k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{4}$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{8}{4k+3n} = \sum_{k=1}^n \left(\quad \right) = \sum_{k=1}^n \left(\quad \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

これは関数 \quad のリーマン和である。

問6.9.3 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{8}{4k+3n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ。

自然数 k に対して

$$\frac{8}{4k+3n} = \frac{1}{n} \frac{8}{\frac{4}{n}k+3}.$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める。この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり、

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7.$$

自然数 $k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{4}$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{8}{4k+3n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{8}{\frac{4}{n}k+3} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{8}{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{4} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\}.$$

これは関数 $\frac{2}{x}$ のリーマン和である。

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{4}{n} ;$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{2}{x}$ のリーマン和

$\sum_{k=1}^n \frac{8}{4k+3n} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_3^7 \frac{2}{x} dx$ に収束する. 故に,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{8}{4k+3n} &= \int_3^7 \frac{2}{x} dx = 2[\ln|x|]_3^7 = 2(\ln 7 - \ln 3) = 2 \ln \frac{7}{3} \\ &= \ln \frac{49}{9} . \end{aligned}$$

終